

Patyna

Mathematik

für das Berufliche Gymnasium in Niedersachsen
Kerncurriculum und Bildungsstandards

Qualifikationsphase – Schwerpunkt Wirtschaft

Stochastik, Lineare Algebra und Analytische Geometrie



Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasserin:

Marion Patyna

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die in diesem Buch zitierten Internetseiten wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte in zumutbarem Umfang untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.

Stand: Mai 2023

Umschlag: Hintergrund: ECE, Ernst-August-Galerie, Hannover,
Kreis rechts oben: Candy Box — Fotolia.com, Kreis Mitte: Colourbox.de,
Kreis links: Syda Productions — Colourbox.de, Grafik: Colourbox.de

* * * * *

3. Auflage 2023

© 2020 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0687-03-DS

Vorwort

Das vorliegende Buch ist der dritte Band von drei Büchern der Reihe „Mathematik für das **Berufliche Gymnasium** in Niedersachsen – Kerncurriculum und Bildungsstandards“ und damit ein Arbeitsbuch für den Mathematikunterricht mit dem Schwerpunkt Wirtschaft am Beruflichen Gymnasium in Niedersachsen. Die Basis dieses Buches ist das neue *Kerncurriculum (KC)* von 2018, das wiederum auf den *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife* aus dem Jahr 2012 basiert.

Die Autorin berücksichtigt bei der Erstellung dieser Bücher die **inhaltsbezogenen** und die **prozessbezogenen Kompetenzen**, die die Schülerinnen und Schüler gemäß KC während der drei Jahre am Beruflichen Gymnasium erwerben sollen. Der in der BbS VO bzw. EB BbS VO verankerten **Handlungsorientierung** wird durchgängig Rechnung getragen. Jedes Hauptkapitel beginnt mit **berufsbezogenen Lernsituationen gemäß SchuCu-BBS**, die die Schülerinnen und Schüler **eigenverantwortlich** und **selbstorganisiert** mithilfe der Informationstexte und der Beispielaufgaben aus den nachfolgenden Abschnitten bearbeiten und sich so die notwendigen Kompetenzen aneignen können. Jede Lernsituation umfasst nicht nur die zugrunde liegende **Handlungssituation**, sondern auch **problemorientierte Aufgabenstellungen**. Neben den Hinweisen auf die benötigten und die zu erzielenden Kompetenzen werden Hinweise zur Bearbeitung und ergänzend Hinweise für die Umsetzung im Distanzunterricht gegeben. Die vorgeschlagenen Sozialformen sind in **grün** hervorgehoben und die Handlungsergebnisse in **blau**. Die Abfolge der Lernsituationen ist so konzipiert, dass die Schülerinnen und Schüler immer selbstständiger agieren können und müssen. Das mathematische und wirtschaftliche Fachvokabular wird durchgängig in **rot** hervorgehoben. Auf diese Weise erhalten die Schülerinnen und Schüler einen Überblick über die zu lernenden Vokabeln. Außerdem sind alle roten Begriffe im Stichwortverzeichnis aufgeführt. Die wirtschaftlichen Erklärungen können sich die Lernenden mittels QR-Code in Videos anschauen und sich so die Fachsprache einfacher aneignen.

Um die in den Lernsituationen benötigten Fähigkeiten und Fertigkeiten im Nachgang zu trainieren und zu festigen, enthält das Buch eine Vielzahl verschiedener Übungsaufgaben, die je nach Aufgabentyp händisch und/oder mit dem passenden **Technologieeinsatz** (CAS) gelöst werden können und durchgängig mithilfe von **Operatoren** formuliert werden. In den zugehörigen Arbeitsheften finden sich weitere Übungen und/oder Spiele bzw. Rätsel, um Fachvokabeln zu lernen, das strukturierte Vorgehen bei der Bearbeitung von Lernsituationen zu üben und benötigte innermathematische Kompetenzen zu erwerben. Dadurch wird zielgerichtet der Kompetenzaufbau erreicht und die Schülerinnen und Schüler, die am **Zentralabitur Mathematik** teilnehmen werden, können die Aufgaben des Teils A (ohne Hilfsmittel) und des Teils B (mit Hilfsmitteln) adäquat und sachgerecht bearbeiten.

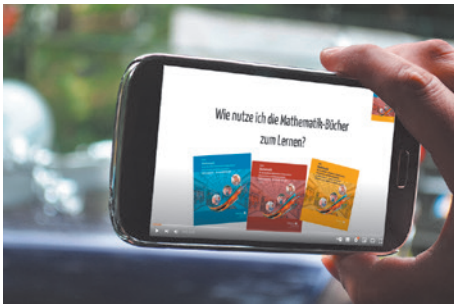
Die Reihenfolge der einzelnen Kapitel kann als Basis für den Aufbau des **schulinternen Curriculums** und der **Jahresplanung** dienen, muss sie aber nicht. Die Autorin hat darauf geachtet, dass die Lehrkräfte ihren Unterricht mithilfe dieser Bücher individuell aufbauen können, weil die mathematisch inhaltsbezogenen Kompetenzen gemäß **Spiralcurriculum** in die Berufsbezüge integriert werden. Außerdem unterstützt die zu dieser Reihe gehörende Formelsammlung, die sich auf **alle** inhaltsbezogenen Kompetenzen des Kerncurriculums bezieht, das eigenständige und selbstorganisierte Lernen. Der Aufbau der Formelsammlung orientiert sich an dem Aufbau der Buchreihe, ist aber als Nachschlagewerk fachsystematisch strukturiert und thematisch sortiert.

Aus Gründen der Sprachökonomie und der besseren Lesbarkeit wird zumeist die männliche Form von personenbezogenen Substantiven verwendet, wie z. B. „Kunde“; das schließt selbstverständlich auch die weibliche Form „Kundin“ ein.

Wie nutze ich die Bücher zum Lernen?

Das folgende Video zeigt, wie Sie das Buch und die Arbeitshefte eigenständig nutzen können, um Mathematik zu lernen, die Bedeutung der Mathematik für wirtschaftliche Handlungssituationen zu verstehen und problemorientierte Aufgabenstellungen zu lösen. Es zeigt die vielfältigen Angebote und Nutzungsmöglichkeiten der Bücher und Arbeitshefte zum selbstorganisierten Lernen.

Über den folgenden QR-Code gelangen Sie zum Erklärvideo:



mvurl.de/hktd

Die Verfasserin, Mai 2023

Lernsituation 2

Benötigte Kompetenzen für die Lernsituation 2

Kenntnisse aus der Sek. I; Rechnen mit Matrizen und Vektoren

Inhaltsbezogene Kompetenzen der Lernsituation 2

- Mehrstufige Verflechtungsdiagramme
- Vertiefung Rechnen mit Matrizen
- Kosten-, Erlös- und Gewinnanalysen
- Lineare Gleichungssysteme

Prozessbezogene Kompetenzen der Lernsituation 2

Mathematisch argumentieren; Probleme mathematisch lösen; mathematisch modellieren; mathematische Darstellungen verwenden; mit symbolischen, formalen und technischen Elementen umgehen; kommunizieren

Methode

Lernspirale¹

Hinweise für den Distanzunterricht

- Schritt 1: Die Lernenden können die Texte lesen und/oder sich die wirtschaftlichen Zusammenhänge im Video² anschauen.
- Schritt 2 und 3: Die Lernenden sollen nach der Erstellung des Spickzettels diesen fotografieren und das Bild ihrem Gesprächspartner über „Bildschirm teilen“ während des Minivortrages zeigen.
- Schritt 4: Break-Out-Räume für die Partnerarbeit erleichtern das kollaborative Arbeiten.
- Schritt 5: Break-Out-Räume für die Gruppenarbeit sind notwendig, um die Ergebnisse der Tandemarbeit zu zeigen und dann kollaborativ weiterzuarbeiten. Statt eines Plakates kann bspw. eine PPP oder ein Dokument in Textform und mit Bildern erstellt werden. Bei Verwendung von Texten und/oder Bildern aus dem Internet muss der Urheberrecht beachtet werden.
- Schritt 6: Die Präsentation erfolgt per Videokonferenz mithilfe der Funktion „Bildschirm teilen“.
- Schritt 7: Die gemeinsame Planung erfolgt per Videokonferenz und kann über ein für alle zugängliches Dokument verschriftlicht werden. Dafür gibt es frei verwendbare Tools im Internet oder auch im Rahmen des Videokonferenztools.

1 Zum Lernspirale-Konzept vgl. Klippert, H.: Lernförderung im Fachunterricht. Leitfaden zum Arbeiten mit Lernspiralen. Donauwörth 2013; vgl. außerdem die entsprechenden Mathematik-Hefte im Auer-Verlag.

2 Das Video ist über den QR-Code in Kapitel 2.3.2 abrufbar.

- Schritt 8: Diese Phase kann im Distanzunterricht als EA und/oder als Hausaufgaben durchgeführt werden.
- Schritt 9: Die gemeinsame Reflexion kann per Videokonferenz, per anonymer digitaler Umfrage, per digitaler Zielscheibe oder als Gespräch stattfinden.

Zeit

3 Doppelstunden

Lernsituation 2



- 1** Lesen Sie im Buch den Text Kapitel 2.3.2 und 2.3.3 sowie 2.3.5. Fassen Sie die wichtigsten Inhalte stichwortartig zusammen. **Allein**
- 2** Schreiben Sie einen **Spickzettel** zum Thema „Mehrstufige Produktionsprozesse“. Sie dürfen 8 Wörter und so viele Bilder, wie Sie möchten, verwenden. **Allein**
- 3** **Doppelkreis**: Erzählen Sie Ihrem Gegenüber die wichtigsten Inhalte zum Thema „Mehrstufige Produktionsprozesse“. Verwenden Sie dafür Ihren Spickzettel. **Tandem**
- 4** Lösen Sie mit Ihrem Tandempartner in Kapitel 2.3.4 eine der Aufgaben 1–4 und eine der Aufgaben 5–8. **Tandem**
- 5** Stellen Sie Ihre Lösungen in der Gruppe vor, ergänzen und/oder verbessern Sie Ihre Lösungen mithilfe der Gruppe. Lösen Sie in Kapitel 2.3.6 eine der Aufgaben 4 oder 5 sowie eine der Aufgaben 6 oder 7 und erstellen Sie jeweils eine Musterlösung. Erstellen Sie ein **Plakat** zum Thema „Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus“. **Gruppe**
- 6** Präsentieren Sie Ihr Plakat auf einem **Marktplatz**. **Plenum**
- 7** Planen Sie gemeinsam mithilfe des Buches, des Arbeitsheftes und/oder des Internets eine **Übungseinheit** zum Thema „Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus“. **Plenum**
- 8** Führen Sie die Übungseinheit durch und legen Sie vorher die Sozialform für die Durchführung fest. **EA, PA, GA**
- 9** Reflektieren Sie Ihren Lernzuwachs und Ihren Lernerfolg. **Plenum**



2.3.2 Wirtschaftliche Zusammenhänge



mvurl.de/adpv

Produktionszusammenhang im mehrstufigen Produktionsprozess

In diesem Beispiel werden aus drei **Rohstoffen** zwei **Zwischenprodukte** hergestellt, um aus diesen wiederum drei verschiedene **Endprodukte** zu produzieren.

Zwischenprodukt \ Rohstoff	Z ₁	Z ₂
R ₁	a_{11}	a_{12}
R ₂	a_{21}	a_{22}
R ₃	a_{31}	a_{32}

Die Elemente a_{mn} geben an, wie viele Mengeneinheiten (ME) des Rohstoffes m benötigt werden, um eine ME des jeweiligen Zwischenproduktes n herzustellen.

Die Datentabelle wird als **Produktionsmatrix** $A_{RZ} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ zusammengefasst.

Zwischenprodukt \ Endprodukt	E ₁	E ₂	E ₃
Z ₁	b_{11}	b_{12}	b_{13}
Z ₂	b_{21}	b_{22}	b_{23}

Die Elemente b_{nu} geben an, wie viele Mengeneinheiten (ME) des Zwischenproduktes n benötigt werden, um eine ME des jeweiligen Endproduktes u zu produzieren.

Die Datentabelle wird als **Produktionsmatrix** $B_{ZE} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ zusammengefasst.



Um die benötigten Rohstoffmengen je Endprodukt zu ermitteln, wird die Formel $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$ verwendet. Die Matrix C_{RE} ist die **Bedarfsmatrix**.



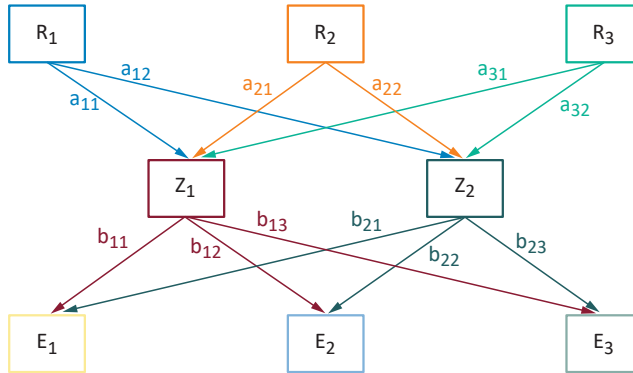
mvurl.de/co7x

Rohstoff \ Endprodukt	E ₁	E ₂	E ₃
R ₁	c_{11}	c_{12}	c_{13}
R ₂	c_{21}	c_{22}	c_{23}
R ₃	c_{31}	c_{32}	c_{33}

Die Elemente c_{mu} geben an, wie viele Mengeneinheiten (ME) des Rohstoffes m benötigt werden, um eine ME des jeweiligen Endproduktes u zu produzieren.

Die Datentabelle wird als Matrix $C_{RE} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ zusammengefasst.

Verflechtungsdiagramm¹



Die Pfeile geben die Richtung des Produktionsprozesses an.

Produktionsmenge

Die Berechnung der Rohstoffmengen, die beispielsweise für die Produktion einer externen Bestellung erforderlich sind, erfolgt mithilfe der Formel:

$$\vec{r} = C_{RE} \cdot \vec{m}$$

Der Vektor \vec{m} enthält die Angaben für die einzelnen Endproduktmengen, die produziert werden sollen. Der Vektor \vec{r} gibt den Rohstoffeinsatz für die gesamte Herstellung der Endprodukte an.

Produktionskosten

Die Produktionskosten müssen beispielsweise ermittelt werden, um die Verkaufspreise festzulegen und zu untersuchen, ob das Unternehmen bei vorgegebenen Preisen einen Gewinn erzielt, oder um festzustellen, ob die Einkaufspreise neu verhandelt werden sollten.

- Die **Rohstoffkosten** berechnen sich mithilfe der Formel: $\vec{k}_R^T \cdot C_{RE}$.

Der Vektor \vec{k}_R^T enthält die Preisangaben in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME) je Rohstoff.

- Die **Fertigungskosten** für die erste Produktionsstufe, also die Kosten für die Herstellung der Zwischenprodukte aus den Rohstoffen, berechnen sich mithilfe der Formel: $\vec{k}_Z^T \cdot B_{ZE}$.

Der Vektor \vec{k}_Z^T enthält die Angaben für die Kosten, die auf der ersten Produktionsstufe für die Produktion einer ME des jeweiligen Zwischenproduktes entstehen. Die Angaben erfolgen in GE/ME.

Fortsetzung

¹ Das Verflechtungsdiagramm wird auch Gozintograph genannt. Der Mathematiker Andrew Vazsonyi hat den Begriff Gozintograph nach dem fiktiven italienischen Mathematiker Zepartzat Gozinto („the part that goes into“) eigentlich als Verballhornung geprägt. Mittlerweile ist der Begriff allgemein anerkannt.

- Die **Fertigungskosten** für die zweite Produktionsstufe, also die Kosten für die Verarbeitung der Zwischenprodukte zu Endprodukten, werden mithilfe des folgenden Vektors ermittelt: \vec{k}_E .

Die Elemente des Vektors geben die Kosten an, die auf der zweiten Produktionsstufe für die Produktion einer ME des jeweiligen Endproduktes entstehen. Die Angaben erfolgen in GE/ME.

- Mithilfe dieser drei Berechnungen werden die **variablen Stückkosten** für die Produktion je einer Mengeneinheit der Endprodukte ermittelt:

$$\vec{k}_V = \vec{k}_R \cdot C_{RE} + \vec{k}_Z \cdot B_{ZE} + \vec{k}_E.$$

Die **variablen Kosten** für die gesamte Produktionsmenge berechnen sich dementsprechend durch: $K_V = \vec{k}_V \cdot \vec{m}$ und die **Gesamtkosten** für die gesamte Produktion durch $K = K_V + K_f$, wobei K_f die Fixkosten für die Produktion angibt.

Erlöse

Die Erlöse für den Verkauf der bestellten Produktionsmengen ergeben sich mithilfe der Formel: $E = \vec{p}^T \cdot \vec{m}$.

Der Vektor \vec{p}^T enthält die Verkaufspreise für die Endprodukte in GE/ME.

Gewinn

Der Gewinn ermittelt sich aus der Differenz von Erlösen und Gesamtkosten:

$$G = E - K.$$

2.3.8 Aufgaben aus dem Zentralabitur Niedersachsen

2.3.8.1 Hilfsmittelfreie Aufgaben

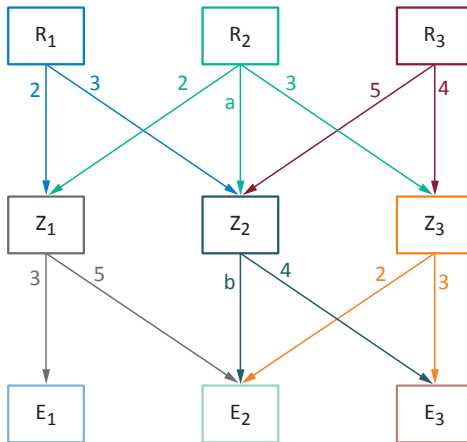
ZA 2015 | Haupttermin | eA | P4

Ein Betrieb erzeugt aus drei Rohstoffen (R_1, R_2, R_3) drei Zwischenprodukte (Z_1, Z_2, Z_3), die zu drei Endprodukten (E_1, E_2, E_3) weiterverarbeitet werden.

Es gibt Werte für a und b , sodass die Zusammenhänge durch den folgenden Verflechtungsgraphen und die Rohstoff-Endprodukt-Tabelle gegeben sind.

Verflechtungsgraph

Angaben in Mengeneinheiten



Rohstoff-Endprodukt-Tabelle

Anzahl der benötigten Mengeneinheiten der Rohstoffe je Mengeneinheit des Endproduktes

Endprodukte	E_1	E_2	E_3
Rohstoffe			
R_1	6	16	12
R_2	6	21	25
R_3	0	18	32

- Der Zusammenhang Rohstoff-Zwischenprodukt wird durch eine Matrix A_{RZ} , der Zusammenhang Zwischenprodukt-Endprodukt durch eine Matrix B_{ZE} und der Zusammenhang Rohstoff-Endprodukt durch eine Matrix C_{RE} beschrieben. Geben Sie eine Beziehung zwischen diesen drei Matrizen an.
- Bestimmen Sie die im Verflechtungsgraphen fehlenden Werte für a und b .

ZA 2017 | Haupttermin | eA | P5

In einem Produktionsprozess werden aus den Rohstoffen Zwischenprodukte und daraus die Endprodukte hergestellt. Die Verflechtung kann den folgenden Matrizen entnommen werden. Die Werte sind in Mengeneinheiten (ME) angegeben.

$$A_{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B_{ZE} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ a & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, C_{RE} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 0 & 4 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

- a) Berechnen Sie den Wert für a .
Der Rohstoff R_2 fällt dauerhaft aus.
Untersuchen Sie, welches Endprodukt weiterhin produziert werden kann.
- b) Der Rohstoff R_2 kann durch zwei andere Rohstoffe R_{21} und R_{22} ersetzt werden. Eine Mengeneinheit (ME) von R_2 wird ersetzt durch 3 ME von R_{21} und 5 ME von R_{22} .
Bestimmen Sie die neue Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix, in der die Rohstoffe R_{21} und R_{22} berücksichtigt werden.

ZA 2018 | Haupttermin | gA | P4

In einem mehrstufigen Prozess sind folgende Produktionszusammenhänge in Mengeneinheiten (ME) bekannt:

Rohstoff-Zwischenproduktmatrix mit $A_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

Zwischenprodukt-Endproduktmatrix mit $B_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

sowie der aktuelle Lagerbestand der Rohstoffe $\vec{r} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 120 \end{pmatrix}$.

- a) Bestimmen Sie die Rohstoff-Endproduktmatrix C_{RE} .
- b) Bestimmen Sie die Anzahl an Zwischenprodukten in ME, die mithilfe des vorhandenen Lagerbestandes an Rohstoffen hergestellt werden können.

ZA 2019 | Haupttermin | eA | P5

Eine Unternehmung stellt aus zwei Rohstoffen R_1 und R_2 drei verschiedene Mischungen M_1 , M_2 und M_3 her. Die folgende Tabelle gibt für jede dieser Mischungen an, wie viele Mengeneinheiten von R_1 und R_2 pro Mengeneinheit der betreffenden Mischung benötigt werden.

	M_1	M_2	M_3
R_1	8	6	11
R_2	8	10	5

Die zugehörige Matrix wird mit A_{RM} bezeichnet.

Die Mischungen werden an Großkunden verkauft, die diese verpacken und in den Handel bringen. Folgende Bestellung zweier Kunden K_1 und K_2 liegt vor:

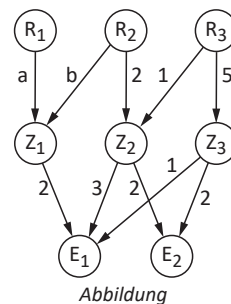
	K_1	K_2
M_1	30	0
M_2	20	20
M_3	0	10

Die zugehörige Matrix wird mit B_{MK} bezeichnet.

- Berechnen Sie die zugehörige Matrix C_{RK} und interpretieren Sie das Matrixelement in der ersten Zeile und ersten Spalte im Sachzusammenhang.
- Die Unternehmung muss die benötigten Rohstoffe einkaufen. Die Kosten einer Mengeneinheit von R_1 betragen dabei 75 % der Kosten einer Mengeneinheit von R_2 . Die Rohstoffkosten, die bei der Herstellung einer Mengeneinheit der Mischung M_1 entstehen, betragen 2.800 EUR. Berechnen Sie die Kosten einer Mengeneinheit von R_2 .

ZA 2021 | Haupttermin | eA | P5

Aus den Rohstoffen R_1 , R_2 und R_3 werden die Zwischenprodukte Z_1 , Z_2 sowie Z_3 und daraus die Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt. Die Abbildung gibt, jeweils in Mengeneinheiten, für jedes Zwischenprodukt den Bedarf an Rohstoffen und für jedes Endprodukt den Bedarf an Zwischenprodukten an.



Für den Produktionsprozess gilt

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 4 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}.$$

Dabei gibt der Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ die Anzahlen der Mengeneinheiten der Rohstoffe und der Vektor

$\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ die Anzahlen der Mengeneinheiten der Endprodukte an.

- a) Ausgehend von 8 Mengeneinheiten von R_1 , 28 Mengeneinheiten von R_2 und r_3 Mengeneinheiten von R_3 werden Endprodukte hergestellt. Dabei bleiben keine Rohstoffe übrig.
Bestimmen Sie den Wert von r_3 .

- b) Bestimmen Sie die Werte von a und b (vgl. Abb.).

ZA 2022 | Haupttermin | eA | P5

Das Unternehmen Blühfreude stellt verschiedene Dünger her. Im Rahmen des Produktionsprozesses werden aus drei Rohstoffen (R), drei Zwischenprodukte (Z) und dann vier Endprodukte (E) hergestellt. Nur die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C_{RE} ist bekannt:

$$C_{RE} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Stellen Sie den prinzipiell zugrundeliegenden Produktionsprozess grafisch dar. Geben Sie das Format der zugrundeliegenden Matrizen A_{RZ} und B_{ZE} an.
- b) In der Produktionsabteilung sollen von Dünger E_1 und von E_3 je 20 Mengeneinheiten (ME) hergestellt werden sowie je 10 ME von E_2 und E_4 .
Berechnen Sie die benötigten Rohstoffmengen, die aus dem Lager für diese Produktion beschafft werden müssen.

2.3.8.2 Aufgaben aus dem Wahlteil

ZA 2014 | Haupttermin | CAS | eA | 3B

Ein Unternehmen, das Rasierwasser herstellt, hat nachfolgenden Produktionszusammenhang. Die Angaben sind in Mengeneinheiten (ME), $a \in [5; 8] \wedge a \in \mathbb{N}$ ist ein Parameter, der die Produktion in unterschiedlichen Ländern widerspiegelt:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	100	200	0
R_2	200	200	400
R_3	200	300	400
R_4	400	300	600

Rohstoffe: R_1, R_2, R_3, R_4
 Zwischenprodukte: Z_1, Z_2, Z_3
 Endprodukte: E_1, E_2

	E_1	E_2
Z_1	8	$2a$
Z_2	a	16
Z_3	20	a

- a) Für den Produktionsprozess und für die Angabe der Inhaltsstoffe auf der Verpackung werden mehrere Informationen benötigt:
 Stellen Sie den Produktionsprozess mit allen Werten grafisch dar.
 Berechnen Sie die benötigten Mengenangaben der einzelnen Rohstoffe für die Produktion je einer Mengeneinheit (ME) der beiden Rasierwasser in Abhängigkeit vom Parameter a .
 Geben Sie an, wie viele Rohstoffmengen mindestens und wie viele höchstens für je eine ME der Endprodukte vorrätig sein müssen.
- b) An ein Werk im Ausland werden 100 ME von Z_1 , 75 ME von Z_2 und 80 ME von Z_3 verkauft. Die Einkaufspreise für die Rohstoffe liegen für R_1 bei 3 Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME), für R_2 bei 3,5 GE/ME, für R_3 bei 6 GE/ME und für R_4 bei 10 GE/ME. Der Verkaufspreis pro Zwischenprodukteinheit liegt für Z_1 bei 110% der Rohstoffkosten, für Z_2 bei 200% und für Z_3 bei 150%.
 Bestimmen Sie die Höhe des Überschusses, der aus diesem Verkauf resultiert.
- c) In einem Land wird mit dem Parameter $a = 6$ produziert. Für die Preiskalkulation benötigt die Unternehmensleitung den Fertigungskostenvektor \vec{k}_2^T der ersten Produktionsstufe. Bei der Produktion für eine ME von E_1 entstehen Fertigungskosten für die Zwischenprodukte in Höhe von 15 GE/ME und für eine ME von E_2 in Höhe von 24 GE/ME.
 Berechnen Sie das Kostenintervall für Z_3 .

ZA 2016 | Haupttermin | CAS | eA | 3B

Das Unternehmen *BIOSAFT* produziert Smoothies in einem zweistufigen Produktionsprozess zunächst aus den Rohstoffen Obst (R_1), Gemüse (R_2) und Wasser (R_3) die Zwischenprodukte Obstbasis (Z_1), Gemüsebasis (Z_2) und eine fruchtige Wasserbasis (Z_3), die anschließend zu den Endprodukten Obst-Smoothie (E_1), Grüner-Smoothie (E_2) und Obst-Gemüse-Smoothie (E_3) verarbeitet werden. Folgende Informationen in Mengeneinheiten (ME) sind bekannt:

$$B_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1,4 \\ 2 & 3,5 & 2,5 \\ 0 & 2,5 & 1,8 \end{pmatrix} \quad C_{RE} = \begin{pmatrix} 36 & 28 & 19,8 \\ 18 & 34 & 24,3 \\ 8 & 24 & 17,2 \end{pmatrix}$$

- a) Der Discounter *OLDI* überlegt, die Smoothies von *BIOSAFT* in sein Sortiment aufzunehmen und ist bereit, einen einheitlichen Preis von 35 Geldeinheiten (GE) je ME Smoothie zu bezahlen.

Der Auftrag von *OLDI* an *BIOSAFT* umfasst 500 ME Obst-Smoothies und 200 ME Grüner-Smoothie. *BIOSAFT* möchte den Auftrag kalkulieren.

Folgende Informationen bezüglich der Produktionskosten sind bekannt:

Rohstoffkosten in GE/ME		Fertigungskosten der 1. Produktionsstufe in GE/ME		Fertigungskosten der 2. Produktionsstufe in GE/ME	
R_1	0,6	Z_1	0,5	E_1	0,4
R_2	0,4	Z_2	0,5	E_2	0,45
R_3	0,1	Z_3	0,2	E_3	0,37
Fixkosten: 228 GE je Auftrag					

Interpretieren Sie das Element b_{31} der Matrix B_{ZE} im Sachzusammenhang.

Bestimmen Sie die variablen Stückkosten je einer Mengeneinheit der Endprodukte.

Berechnen Sie die variablen Kosten für diesen Auftrag.

Begründen Sie rechnerisch, ob *BIOSAFT* den Auftrag annehmen sollte.



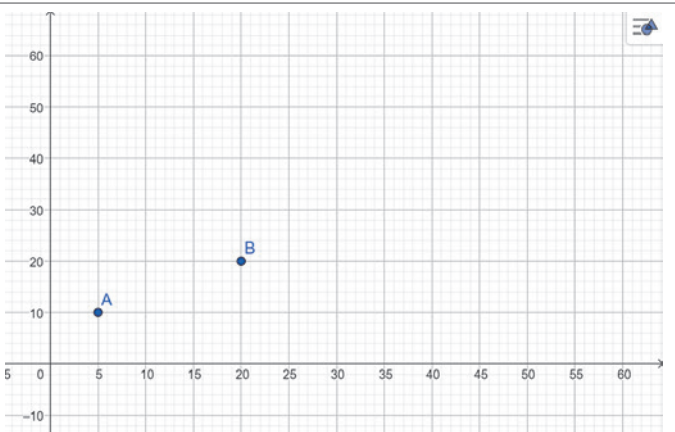
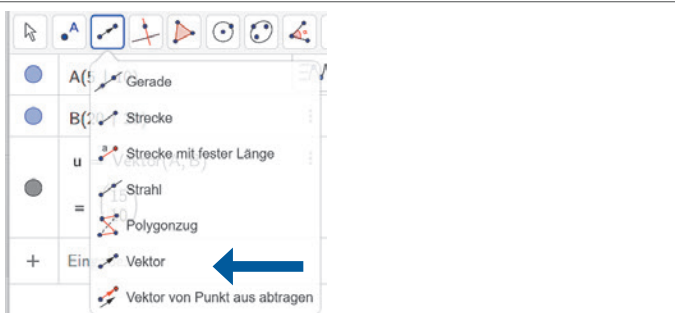
Im Folgenden verändert sich aufgrund von Ernteschwankungen der Rohstoffpreis für Obst, während die übrigen Preise konstant bleiben.

Bestimmen Sie die für *BIOSAFT* maximal akzeptable prozentuale Preissteigerung für Obst, wenn der Gewinn für diesen Auftrag nicht negativ werden soll.

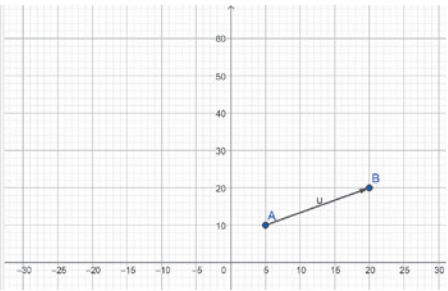
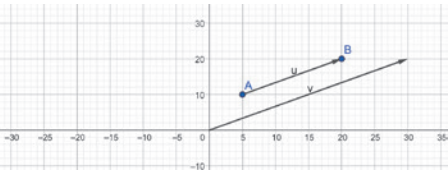
- b) Von der Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A_{RZ} ist bekannt, dass von Obst viermal so viel zur Produktion einer Mengeneinheit der Obstbasis benötigt wird wie zur Produktion einer Mengeneinheit der Gemüsebasis, hingegen von Gemüse siebenmal so viel zur Produktion einer Mengeneinheit der Gemüsebasis wie zur Produktion einer Mengeneinheit der Obstbasis. Der Rohstoff Wasser wird für die Fertigung der Gemüsebasis nicht benötigt.


Bestimmen Sie die fehlende Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A_{RZ} .

5 GeoGebra – Schritt für Schritt Anleitungen¹ und Hinweise

Vektoren	
<p>1 Tool: Grafikrechner oder Tool: CAS</p>	
<p>2 Angeben: – Koordinaten vom Startpunkt A – Koordinaten vom Endpunkt B</p>	
<p>3 Punkte werden im Koordinatensystem gezeichnet</p>	
<p>4 Auswählen: Vektor</p>	

1 Es wird immer nur eine Möglichkeit beschrieben – GeoGebra bietet in den meisten Fällen auch Alternativen.

Vektoren	
<p>5 Vektor zeichnen Bei Punkt A beginnen bis zu B den Pfeil ziehen</p> <p>Vektor wird gezeichnet Vektor wird berechnet</p>	<div style="display: flex; align-items: flex-start;"> <div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; margin-right: 10px;"> <p>● $A(5 10)$ ↵</p> <p>● $B(20 20)$ ⋮</p> <p>● $u = \text{Vektor}(A, B)$ ⋮</p> <p>● $= \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}$</p> <p>+ Eingabe...</p> </div>  </div>
Vektor eingeben im \mathbb{R}^2	<div style="border: 1px solid gray; padding: 5px;"> <p>+ $\{\{2\}, \{4\}\}$ ⋮</p> <hr/> <p>$m1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ⋮</p> </div>
Vektor eingeben im \mathbb{R}^3	<div style="border: 1px solid gray; padding: 5px;"> <p>$\{\{1\}, \{0\}, \{2\}\}$ ⋮</p> <hr/> <p>$m2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ⋮</p> </div>
<p>Rechnen mit Vektoren</p> <p>S-Multiplikation</p>	<div style="display: flex; align-items: flex-start;"> <div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; margin-right: 10px;"> <p>● $v = 2 u$ ⋮</p> <p>● $= \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix}$</p> <p>+ Eingabe...</p> </div>  </div>

Matrizen	
<p>1 Tool: Grafikrechner oder Tool: CAS</p>	
<p>2 Matrix eingeben</p>	$+ \quad \{ \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 5\} \} \quad \vdots$ $m1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
<p>Rechnen mit Matrizen S-Multiplikation</p>	$+ \quad \begin{aligned} & 3 \cdot m1 \\ & = \{ \{6, 9, 12\}, \{3, 9, 15\} \} \end{aligned}$ $m2 = 3 m1$ $= \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 3 & 9 & 15 \end{pmatrix}$
<p>Rechnen mit Matrizen Matrizenaddition und -subtraktion</p>	$m3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ <hr/> $+ \quad \begin{aligned} & m1 + m3 \\ & = \{ \{3, 5, 9\}, \{6, 6, 7\} \} \end{aligned}$ $m4 = m1 + m3$ $= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$