Bohner | Ott | Deusch

Mathematik

Beschreibung von Abbildungen mit Matrizen

Berufliches Gymnasium

Baden-Württemberg

Merkur Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

* * * * * * * * * *

1. Auflage 2023

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0678-01
ISBN 978-3-8120-0678-1

Vorwort

Der vorliegende Band ist ein Lehr- und Arbeitsbuch zum Thema „Beschreibung von Abbildungen mit Matrizen“ für die technischen Gymnasien (TG).
Es richtet sich exakt nach dem aktuellen Bildungsplan von 2021 für die beruflichen Gymnasien (eA) in Baden-Württemberg.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam sowohl die im Lehrplan geforderten inhalts- als auch die prozessbezogenen Kompetenzen (modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).

Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die im Bildungsplan aufgeführten Kompetenzen und Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

Inhaltsverzeichnis

Beschreibung von Abbildungen mit Matrizen

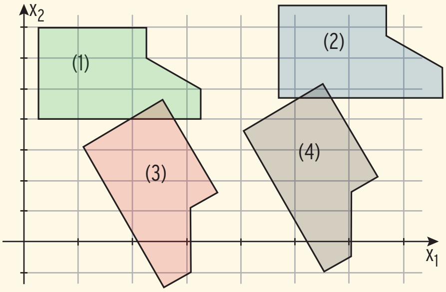
Elementare Abbildungen wie Verschiebungen, Spiegelungen, Streckungen und Drehungen können elementargeometrisch aber auch mit Vektoren und Matrizen behandelt werden. Affine Abbildungen sind von großer Bedeutung in der Physik, Informatik und beim technischen Zeichnen.
Z. B. können elementare Abbildungen bei der Lageänderung des Grundrisses eines Hauses nützlich sein.

Qualifikationen & Kompetenzen

- Elementare Abbildungen in der Ebene untersuchen und durchführen
- Affine Abbildungen mit Gleichungen und Matrizen beschreiben
- Verkettung von affinen Abbildungen bilden und untersuchen

Beispiel 1

Grundriss eines Hauses



Abbildungen

Veränderung der Lage des Grundrisses (1)

- durch Verschiebung (2),
- durch Drehung (3),
- durch Drehung und Verschiebung (4).

Beispiel 2

Farn

Wiederholungen („Fraktale“)

Viele Naturobjekte sind ähnlich, d. h. ihre Struktur wiederholt sich in verschiedenen Größen. Z. B. lässt sich ein Farn mithilfe von vier affinen Abbildungen zeichnen.

1 Elementare Abbildungen in der Ebene

Verschiebung

Beispiel 1

Die drei Punkte A(− 4 | 1), B(1 | 2) und C(− 1 | 3) sollen um 3 in x_1-Richtung und um − 2 in x_2-Richtung verschoben werden.

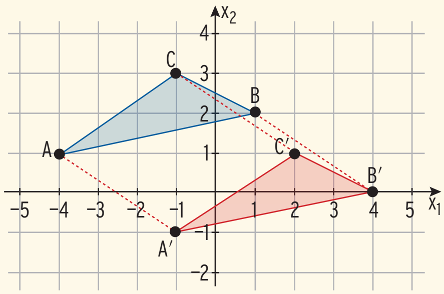
a) Zeichnen Sie die drei Punkte A, B und C und ihre Bildpunkte in ein Koordinatensystem ein.

b) Beschreiben Sie durch Gleichungen, wie sich die Bildkoordinaten x_1' und x_2' berechnen lassen.

c) Geben Sie die Bildpunkte von O(0|0), $E_1(1 \mid 0)$ und $E_2(0 \mid 1)$ an.

Lösung

a) Zeichnung



b) $A(-4 \mid 1) = A(x_1 \mid x_2)$

$A'(-1 \mid -1) = A'(x_1' \mid x_2')$

Abbildungsgleichungen

$x_1' = x_1 + 3$

$x_2' = x_2 - 2$

c) Bildpunkte

$O'(3 \mid -2)$, $E_1'(4 \mid -2)$, $E_2'(3 \mid -1)$

Hinweis: Das Dreieck A′B′C′ entsteht aus dem Dreieck ABC durch Verschiebung mit dem Verschiebungsvektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Der Punkt $P(x_1 \mid x_2)$ wird um c_1 in x_1-Richtung und um c_2 in x_2-Richtung auf den Bildpunkt $P'(x_1' \mid x_2')$ verschoben.

Abbildungsgleichungen:

$$x_1' = x_1 + c_1$$
$$x_2' = x_2 + c_2$$

Mit Vektoren:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + c_1 \\ x_2 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{x} + \vec{c}$$

Mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{c}$$

Verschiebung um $\vec{c}$: $\quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{c}$

Beispiel 2

Der Punkt A(4 | 3) wird durch Verschiebung auf den Bildpunkt A′(− 5 | 6) abgebildet. Geben Sie den Verschiebungsvektor und die Abbildungsgleichungen an.

Lösung

Gleichung: $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{c}$

$\vec{c} = \vec{x}' - \vec{x}$

Mit $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$: $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$

Abbildungsgleichungen: $x_1' = x_1 - 9$

$x_2' = x_2 + 3$

Spiegelung an den Koordinatenachsen

Beispiel

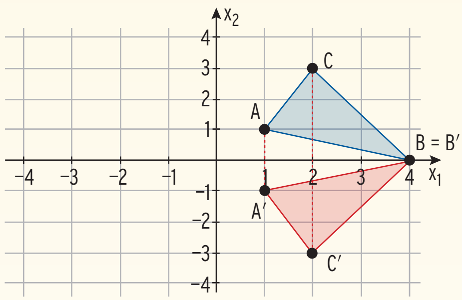
Gegeben sind die Punkte A(1 | 1), B(4 | 0) und C(2 | 3).

a) Spiegeln Sie das Dreieck ABC an der x_1-Achse und geben Sie die Abbildungsgleichungen an.
Ermitteln Sie Punkte, die auf sich abgebildet werden (Fixpunkte).

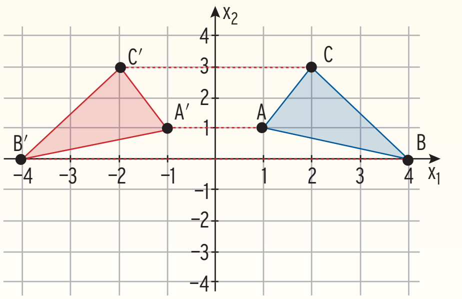
b) Spiegeln Sie das Dreieck ABC an der x_2-Achse und geben Sie die Abbildungsgleichungen an.
Bestimmen Sie die Bildpunkte von O(0 | 0), E_1(1 | 0) und E_2(0 | 1).

Lösung

a) Spiegelung an der x_1-Achse.
A(1 | 1) = A(x_1 | x_2)
A′(1 | − 1) = A′(x_1' | x_2')
Abbildungsgleichungen
$x_1' = x_1$
$x_2' = -x_2$
Fixpunkte
Z. B.: B(4 | 0); P_1(1 | 0); P_2(− 2 | 0)
Alle Punkte auf der x_1-Achse sind Fixpunkte.



b) Spiegelung an der x_2-Achse.
A(1 | 1) = A(x_1 | x_2)
A′(− 1 | 1) = A′(x_1' | x_2')
Abbildungsgleichungen
$x_1' = -x_1$
$x_2' = x_2$
Bildpunkte
O′(0 | 0), E_1'(− 1 | 0), E_2'(0 | 1)



Der Punkt $P(x_1 \mid x_2)$ wird durch **Spiegelung an der x_1-Achse** auf den Punkt $P'(x_1' \mid x_2')$ abgebildet.

Abbildungsgleichungen: $x_1' = x_1$
$x_2' = -x_2$

Mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Der Punkt $P(x_1 \mid x_2)$ wird durch **Spiegelung an der x_2-Achse** auf den Punkt $P'(x_1' \mid x_2')$ abgebildet.

Abbildungsgleichungen: $x_1' = -x_1$
$x_2' = x_2$

Mit der Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Spiegelung an der x_1-Achse: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Spiegelung an der x_2-Achse: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Aufgaben

1 Geben Sie eine Matrixdarstellung der folgenden Abbildung an.

a) Verschiebung $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Verschiebung um 3 nach links und 2 nach unten.

2 Gegeben ist das Dreieck mit den Eckpunkten $A(0 \mid 0)$, $B(2 \mid 1)$ und $C(-1 \mid 2)$.

a) Verschieben Sie das Dreieck um 4 in x_1-Richtung und um -2 in x_2-Richtung.
Geben Sie die Abbildungsgleichungen und die Koordinaten der Bildpunkte A′, B′ und C′ an.

b) Verschieben Sie die Punkte A′, B′ und C′ mit den Abbildungsgleichungen $x_1' = x_1 - 1$ und $x_2' = x_2 - 3$. Bestimmen Sie die Koordinaten der Bildpunkte A″, B″ und C″.
Welche Verschiebung bildet das Dreieck ABC direkt auf das Dreieck A″B″C″ ab?

c) Spiegeln Sie das Dreieck ABC an der x_2-Achse.

3 Eine Verschiebung bildet das Dreieck ABC mit $A(3 \mid 0)$, $B(0 \mid 1)$ und $C(2 \mid -3)$ auf das Dreieck mit dem Eckpunkt $A'(4 \mid 3)$ ab.
Bestimmen Sie die Abbildungsgleichungen und geben Sie die Bildpunkte B′ und C′ an.

4 Eine Gerade durch die Punkte $A(0 \mid 2)$, $B(-2 \mid 5)$ wird an der x_1-Achse gespiegelt.
Ermitteln Sie die Abbildungsgleichungen und die Koordinaten der Bildpunkte A′ und B′.
Bestimmen Sie den Fixpunkt der Abbildung.

2 Von der elementaren zur affinen Abbildung

Festlegung einer affinen Abbildung

Bisher wurden nur elementare Abbildungen behandelt.
Im Folgenden wird der Abbildungsbegriff verallgemeinert und erweitert.

Abbildungsgleichung einer Verschiebung: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{c}$

Abbildungsgleichung einer Drehung: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Abbildungsgleichung allgemein: $\vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{c}$

Eine **affine Abbildung** α kann durch die Gleichung $\vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{c}$ beschrieben werden.

Schreibweise: $\vec{x}' = \alpha(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} + \vec{c}$

Hinweis: Verschiebungen, Spiegelungen, Streckungen ($k \neq 0$) und Drehungen sind affine Abbildungen.

Beispiel 1

Gegeben ist die affine Abbildung mit $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie die Bildpunkte von A(0 | 3) und B(2 | − 4) an.
b) Bestimmen Sie die Bildpunkte von O(0|0), E_1(1 | 0) und E_2(0 | 1).

Lösung

a) Bildpunkt von A: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

A′(4 | − 1)

Bildpunkt von B: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

B′(1 | 0)

b) Bildpunkte von O, E_1 und E_2: O′(1|2), E_1'(3 | − 1) und E_2'(2 | 1)

Beispiel 2

Geben ist für eine beliebige affine Abbildung die Bildpunkte von O(0|0), E_1(1 | 0) und E_2(0 | 1) an.

Lösung

Bildpunkt von O(0|0): $\vec{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$; O′($c_1$| c_2)

Bildpunkt von E_1(1 | 0): $\vec{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c_1 \\ c + c_2 \end{pmatrix}$; E_1'($a + c_1$ | $c + c_2$)

Bildpunkt von E_2(0 | 1): $\vec{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + c_1 \\ d + c_2 \end{pmatrix}$; E_2'($b + c_1$ | $d + c_2$)

3 Verkettung von affinen Abbildungen

In diesem Kapitel werden mehrere affine Abbildungen hintereinander ausgeführt. Diese Hintereinanderausführung nennt man **Verkettung.**

Spiegelung und Verschiebung

Beispiel 1

Gegeben sind die Punkte A(− 3 | 2), B(− 1 | 1) und C(− 2 | 4). Das Dreieck ABC wird an der x_2-Achse gespiegelt und anschließend um 3 in x_1-Richtung verschoben.

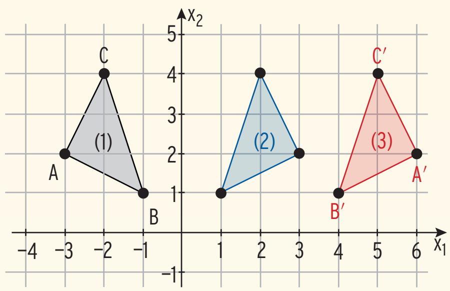
a) Fertigen Sie eine Zeichnung an.

b) Geben Sie eine Abbildungsgleichung für diese Hintereinanderausführung an. Berechnen Sie den Bildpunkt von B.

c) Der Punkt B(− 1 | 1) wird um 3 in x_1-Richtung verschoben und anschließend an der x_2-Achse gespiegelt. Spielt die Reihenfolge der Abbildungen eine Rolle? Nehmen Sie Stellung.

Lösung

a) Dreieck ABC (1)
Dreieck (1) nach der Spiegelung ergibt Dreieck (2).
Dreieck (2) nach der Verschiebung ergibt Dreieck (3).



b) Spiegelung an der x_2-Achse: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Verschiebung um 3 in x_1-Richtung: $\vec{x}'' = \vec{x}' + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Hintereinanderausführung: $\vec{x}'' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Abbildungsgleichung mit $\vec{x}'$: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bildpunkt von B(− 1 | 1): $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

B′(4 | 1)

c) Spiegelung und Verschiebung: B′(4 | 1)
Verschiebung und Spiegelung: B(− 1 | 1); B*(2 | 1); B′(− 2 | 1)
Die Reihenfolge ist von Bedeutung.

Bemerkung: Die Hintereinanderausführung von affinen Abbildungen ist nicht kommutativ.

Beispiel 2

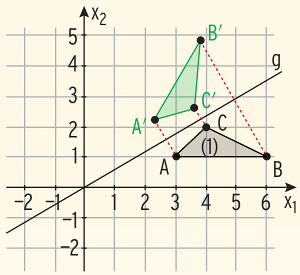
Die Punkte A(3 | 1), B(6 | 1) und C(4 | 2) sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Dieses Dreieck wird an der Ursprungsgeraden g mit dem Steigungswinkel $\varphi = 30°$ gespiegelt.

a) Fertigen Sie eine Zeichnung an.

b) Bestimmen Sie eine Abbildungsgleichung.

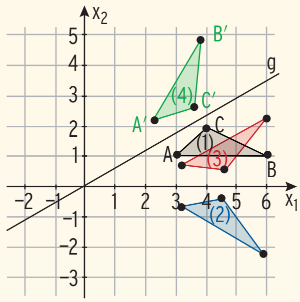
Lösung

a) Spiegelung des Dreiecks (1) an der Geraden g.



b) Die Spiegelung des Dreiecks (1) an der Geraden g kann auf elementare Abbildungen zurückgeführt werden.

Drehung des Dreiecks (1) am Ursprung um $\varphi^* = -30°$ (zur x_1-Achse) ergibt (2).
Spiegelung von (2) an der x_1-Achse ergibt (3).
Drehung von (3) am Ursprung um $\varphi = 30°$ ergibt (4).



Drehung um $\varphi^* = -30°$:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos(-30°) & -\sin(-30°) \\ \sin(-30°) & \cos(-30°) \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0{,}5\sqrt{3} & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Spiegelung an der x_1-Achse:

$$\vec{x}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}'$$

$$\vec{x}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5\sqrt{3} & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\vec{x}'' = \begin{pmatrix} 0{,}5\sqrt{3} & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Drehung um $\varphi = 30°$:

$$\vec{x}''' = \begin{pmatrix} \cos(30°) & -\sin(30°) \\ \sin(30°) & \cos(30°) \end{pmatrix} \cdot \vec{x}''$$

$$\vec{x}''' = \begin{pmatrix} 0{,}5\sqrt{3} & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5\sqrt{3} & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Abbildungsgleichung mit $\vec{x}'$:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5\sqrt{3} \\ 0{,}5\sqrt{3} & -0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

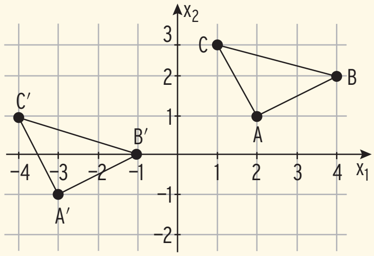
Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

1 Gegeben ist das Dreieck mit den Eckpunkten A(0 | 0), B(3 | 2) und C(− 1 | 3).

a) Spiegeln Sie das Dreieck ABC an der x_2-Achse.

b) Verschieben Sie das Dreieck um 3 in x_1-Richtung und um − 2 in x_2-Richtung.
Geben Sie die Abbildungsgleichung und die Koordinaten der Bildpunkte A′, B′ und C′ an.

2 Eine affine Abbildung bildet das Dreieck ABC auf das Dreieck A′B′C′ ab. Geben Sie die Abbildung und deren Abbildungsgleichung an.



3 Gegeben ist das Viereck mit den Eckpunkten A(1 | 0), B(3 | 1), C(3 | 2) und D(1 | 2).
Strecken Sie das Viereck ABCD am Ursprung mit Faktor k = 1,5.
Geben Sie die Abbildungsgleichungen an.

4 Eine affine Abbildung bildet die Punkte A(1 | 1), B(3 | 0) und C(2 | 3) auf die Punkte A′(5 | 2), B′(4 | − 3) und C′(12 | 2) ab.
Bestimmen Sie die Abbildungsgleichung in Matrixform.

5 Eine affine Abbildung ist gegeben durch $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Bildgeraden g′ von g mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$.

b) Ermitteln Sie die Umkehrabbildung.

6 Geben Sie die Matrixdarstellung der affinen Abbildung an.

a) Spiegelung an der Geraden g: $x_1 = -4$.

b) Drehung um den Punkt P(3 | 2) mit dem Winkel $\varphi = 20°$.

7 Es wird eine Drehung am Ursprung mit Winkel $\varphi = 60°$ und anschließend eine Streckung am Ursprung mit Faktor k = 3 ausgeführt.
Geben Sie die Abbildungsgleichung dieser verketteten Abbildung an.
Ermitteln Sie den Bildpunkt von A(3 | − 7).