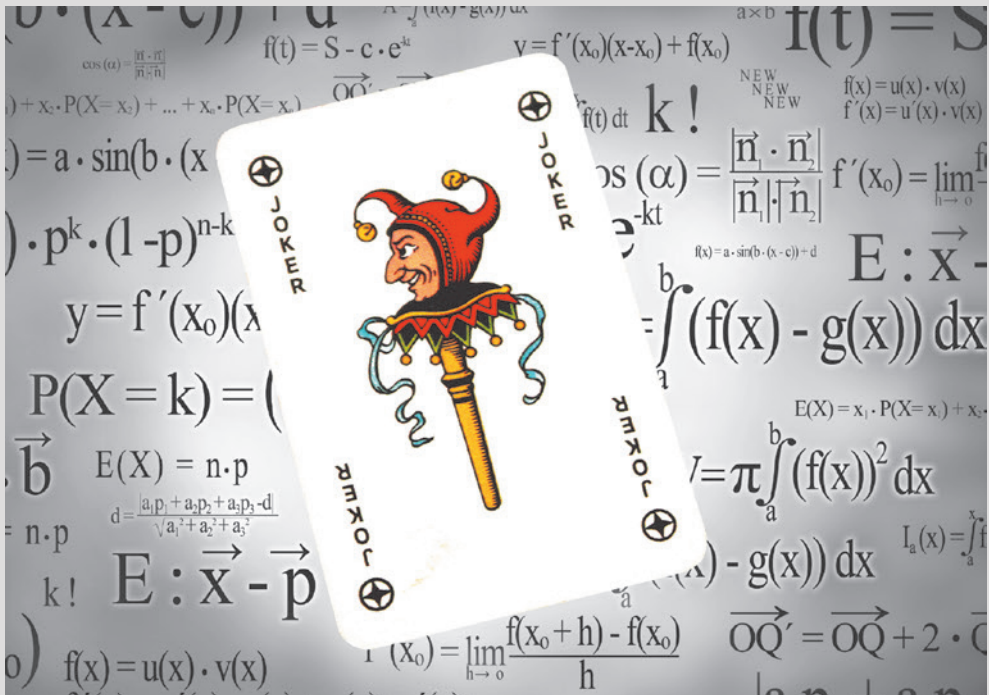


Rosner

Optimale Vorbereitung auf das Abitur in Mathematik

*Verständliche Zusammenfassungen
zu allen Themen*

*für alle Berufskollegs – beruflichen Gymnasien
in Nordrhein-Westfalen*



Merkur 
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Der Verfasser:



Stefan Rosner

Lehrer für Mathematik in der Oberstufe

stefan_rosner@hotmail.com

Beratende Mitarbeit:

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Coverbild (Joker): © fotomaedchen - Fotolia.com

* * * * *

1. Auflage 2019

© 2019 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung:

MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de

lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-0554-8

„Sie müssen das Buch so schreiben, dass alles drin ist, aber man es trotzdem versteht!“
(Aufforderung einer Schülerin)

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

das Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- sich in den letzten beiden Schuljahren optimal auf Klausuren und auf das Abitur in Mathematik vorzubereiten.
- sich alle Lehrplaninhalte anhand verständlicher und übersichtlicher Stoffzusammenfassungen anzueignen.
- die Abituraufgaben der vergangenen Jahrgänge zu bearbeiten, da Sie hiermit ein Nachschlagewerk zur Verfügung haben.
- durch Erfolge neue Motivation für das Fach Mathematik zu bekommen.

Liebe Fachkolleginnen und Fachkollegen,

das Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- die zeitintensive Stoffwiederholung, Klausur- und Abiturvorbereitung teilweise aus dem Unterricht auslagern zu können.
- auf diese Weise mehr Zeit für verständnisorientierten Unterricht zu gewinnen.
- sicherzustellen, dass Ihre Schülerinnen und Schüler über ausreichendes Basiswissen verfügen.

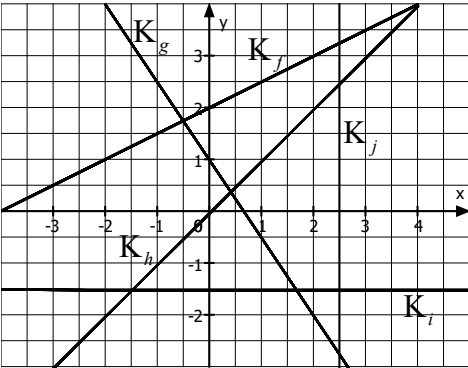
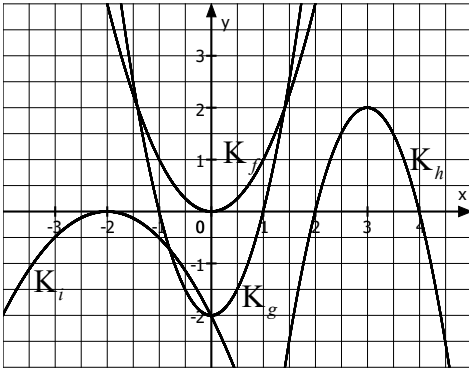
EXTRA

100 Videos des Autors, welche zu 69 Themenvideos zusammengestellt wurden. Hier werden alle Stoffzusammenfassungen nochmals erklärt.

Zugriff auf die Themenvideos über Kurzadresse oder QR-Code aus dem Buch.

1. Funktionen

1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

1. Grades (Geraden)	2. Grades (Parabeln)
<p>Hauptform : $y = mx + b$</p> <p>Vorgehen zum Einzeichnen: $y = \frac{\text{hoch / runter}}{\text{rechts}} \cdot x + \frac{y\text{-Achsen-}}{\text{abschnitt}}$</p> <p>Steigung aus 2 Punkten: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$</p> <p>Steigungswinkel aus Steigung bestimmen: $m = \tan(\alpha)$</p> <p>Parallele Geraden: $m_1 = m_2$ (gleiche Steigung)</p> <p>Senkrechte (orthogonale) Geraden: Steigungen sind negative Kehrwerte voneinander: $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ bzw. $m_1 \cdot m_2 = -1$</p> <p>1. Winkelhalbierende: $y = x$ ($m = 1$) 2. Winkelhalbierende: $y = -x$ ($m = -1$)</p>  <p> $K_f: y = \frac{1}{2}x + 2$ $K_g: y = -\frac{3}{2}x + 1$ $K_h: y = x$ (1. Winkelhalbierende) $K_i: y = -1,5$ $K_j: x = 2,5$ </p>	<p>Allg.: $f(x) = ax^2 + bx + c$</p> <p>Scheitelpunkt-Ansatz: $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ mit $S(x_s y_s)$</p> <p>$a > 0$: nach oben geöffnet bzw. Verlauf von II nach I</p> <p>$a < 0$: nach unten geöffnet bzw. Verlauf von III nach IV</p> <p>Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 c)$</p> <p>Bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^2 + c$ (nur gerade Hochzahlen)</p>  <p> $K_f: f(x) = x^2$ $K_g: g(x) = 2x^2 - 2$ $K_h: h(x) = -2(x - 3)^2 + 2$ $K_i: i(x) = -0,5x^2 - 2x - 2$ </p>



3. Grades

Allg.: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

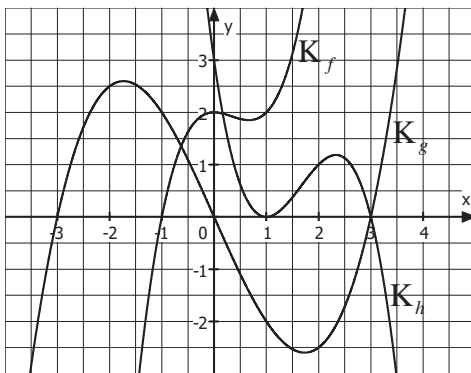
$a > 0$: Verlauf von III nach I

$a < 0$: Verlauf von II nach IV

Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0|d)$

Ansatz bei Symmetrie zum Ursprung:

$f(x) = ax^3 + cx$ (nur ungerade Hochzahlen)



$K_f: f(x) = x^3 - x^2 + 2$

$K_g: g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x$

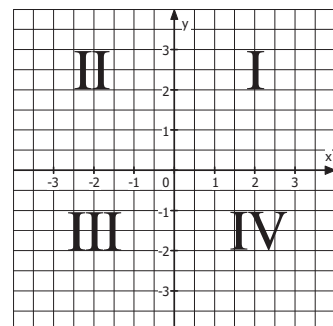
$K_h: h(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3$

Tipp (für alle ganzrationalen Funktionen)

$a > 0$: Verlauf von ... nach **I** („endet **oben**“)

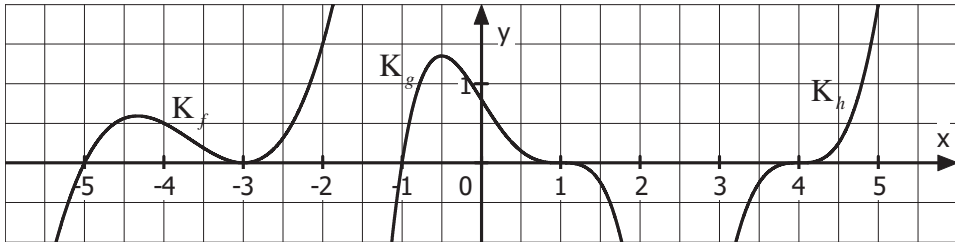
$a < 0$: Verlauf von ... nach **IV** („endet **unten**“)

Die Quadranten



1.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen

Beispiele



$$K_f: f(x) = 0,5 \cdot (x+5) \cdot (x+3)^2 \quad K_g: g(x) = -0,8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3 \quad K_h: h(x) = 2 \cdot (x-4)^3$$

Aufbau des Nullstellenansatzes (am Beispiel)

$$g(x) = -0,8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$$

\swarrow \uparrow \swarrow
 Verlauf $x_0 = -1$ $x_{1/2/3} = +1$
 von III ist einfache ist dreifache
 nach IV Nullstelle Nullstelle

Übersicht (für ganzrationale Funktionen)

Vielfachheit Nullstelle	Linearfaktor im Nullstellenansatz	Skizze	Beschreibung
Einfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0) \cdot \dots$		Schaubild schneidet x-Achse (mit Vorzeichenwechsel VZW)
Doppelte Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^2 \cdot \dots$		Schaubild berührt x-Achse (ohne VZW)
Dreifache Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^3 \cdot \dots$		Schaubild schneidet und berührt x-Achse (mit VZW)



Beispiel

Gesucht ist der Funktionsterm zum nebenstehenden Schaubild.

Lösung

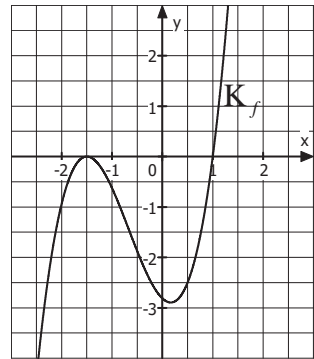
Da die Nullstellen ($x_{1/2} = -1,5; x_3 = 1$) des Schaubildes ablesbar sind, kann der Nullstellenansatz der Funktion weitgehend aufgestellt werden:

$$f(x) = a \cdot (x + 1,5)^2 \cdot (x - 1)$$

Dann werden die Koordinaten eines weiteren Punktes, der kein Schnittpunkt mit der x -Achse ist, eingesetzt:

$$\begin{aligned} P(0,5 | -2,5): \quad & f(x) = a \cdot (x + 1,5)^2 \cdot (x - 1) \\ -2,5 &= a \cdot (0,5 + 1,5)^2 \cdot (0,5 - 1) \\ -2,5 &= -2a \\ \frac{5}{4} &= a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{5}{4} \cdot (x + 1,5)^2 \cdot (x - 1)$$



4.2 Tangente

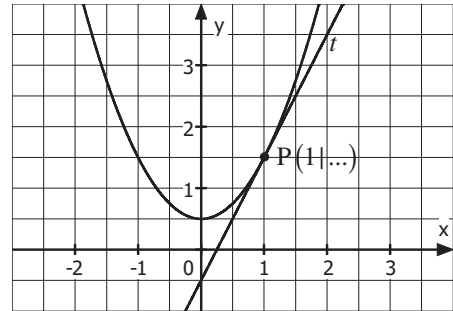
1. Aufgabentyp (Tangente im Kurvenpunkt)

Gegeben ist die Funktion

$$f \text{ mit } f(x) = x^2 + 0,5.$$

Bei dem x -Wert 1 wird eine Tangente und an das Schaubild angelegt.

Berechnen Sie deren Gleichung.



Vorgehen: Ermittlung einer Tangente im Kurvenpunkt (geg. $f(x)$ und x -Wert des Kurvenpunktes)	
1. y-Wert des Kurvenpunktes berechnen (Einsetzen in $f(x)$)	$f(1) = 1^2 + 0,5 = 1,5 \rightarrow P(1 1,5)$
2. Tangentensteigung berechnen (Einsetzen in $f'(x)$)	$f'(x) = 2x$ $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \quad (= m_t)$
3. Tangentengleichung berechnen (Einsetzen in $y = m \cdot x + b$)	$y = m_t \cdot x + b$ $1,5 = 2 \cdot 1 + b$ $1,5 = 2 + b \quad -2$ $-0,5 = b$ \Rightarrow Tangente: $y = 2x - 0,5$

Alternative: Durch Einsetzen in die nachfolgende **Punkt-Steigungs-Form** (siehe Merkhilfe) kann alles in einem Schritt ausgeführt werden:

$$\text{Formel (allg.): } y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u) \quad (\text{mit } u \text{ als Berührstelle})$$

$$\text{Einsetzen: } y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1)$$

$$y = 2 \cdot (x - 1) + 1,5$$

$$y = 2x - 0,5 \quad (\text{Tangente})$$

Hinweis: Diese Aufgabenstellung kann direkt mithilfe des **GTR/CAS** bearbeitet werden.



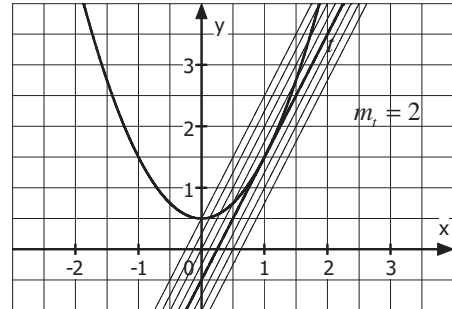
2. Aufgabentyp (Tangente mit gegebener Steigung)

Gegeben ist die Funktion f

mit $f(x) = x^2 + 0,5$.

Eine Tangente mit Steigung 2 soll an das Schaubild angelegt werden.

Berechnen Sie deren Gleichung.



Vorgehen: Ermittlung einer Tangente mit gegebener Steigung (geg. $f(x)$ und Steigung der Tangente)	
1. $f'(x) = m_t$ liefert x-Wert des Kurvenpunktes (Gleichsetzen von $f'(x)$ und gegebener Tangentensteigung m_t ; Gleichung lösen)	$f'(x) = 2x; m_t = 2$ $f'(x) = m_t$ $2x = 2$ $x = 1$ (An dieser Stelle hat die Parabel also die Steigung 2. Hier muss sich demnach der Berührungspunkt befinden.)
2. y-Wert des Kurvenpunktes berechnen (Einsetzen in $f(x)$)	$f(1) = 1^2 + 0,5 = 1,5 \rightarrow B(1 1,5)$
3. Tangentengleichung berechnen (Einsetzen in $y = mx + b$)	$y = m_t \cdot x + b$ $1,5 = 2 \cdot 1 + b$ $1,5 = 2 + b \quad -2$ $-0,5 = b$ \Rightarrow Tangente: $y = 2x - 0,5$

5. Differenzialrechnung (im wirtschaftlichen Kontext)

5.1 Der Produktlebenszyklus

Modellierung mit: Ganzrationaler Funktion 3. Grades	Modellierung mit: Exponentialfunktion	
Beispiel		
Für ein Produkt liegt die Absatzfunktion A mit $A(t) = -3t^3 + 18t^2$ vor.	Für ein Produkt liegt die Absatzfunktion A mit $A(t) = 160 \cdot t \cdot e^{-0,61t}$ vor.	
Beschreibung		
Absatz beginnt langsam, erreicht Maximum, bricht dann abrupt ein.	Absatz beginnt stark, erreicht Maximum, läuft dann langsam (asymptotisch) aus.	
Am Schaubild		
<p>Absatz wächst immer schneller</p> <p>progressiv wachsend</p> $\begin{pmatrix} A'(t) > 0 \\ A''(t) > 0 \end{pmatrix}$	<p>Absatz wächst immer langsamer</p> <p>degressiv wachsend</p> $\begin{pmatrix} A'(t) > 0 \\ A''(t) < 0 \end{pmatrix}$	<p>Absatz fällt immer schneller</p> <p>progressiv fallend</p> $\begin{pmatrix} A'(t) < 0 \\ A''(t) < 0 \end{pmatrix}$
<p>Absatz wächst immer langsamer</p> <p>degressiv wachsend</p> $\begin{pmatrix} A'(t) > 0 \\ A''(t) < 0 \end{pmatrix}$	<p>Absatz fällt immer schneller</p> <p>progressiv fallend</p> $\begin{pmatrix} A'(t) < 0 \\ A''(t) < 0 \end{pmatrix}$	<p>Absatz fällt immer langsamer</p> <p>degressiv fallend</p> $\begin{pmatrix} A'(t) < 0 \\ A''(t) > 0 \end{pmatrix}$
H	Maximaler Absatz	H
W	Maximaler Absatzzuwachs	N
N ₂	Maximaler Absatzrückgang	W



5.2 Die ertragsgesetzliche Kostenfunktion

Beteiligte Funktionen

• **K** gibt die **Gesamtkosten** an, die bei der Herstellung von x ME entstehen.

Ansatz: $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

• **K'** gibt die **Grenzkosten**, also die Kosten, die bei Herstellung einer zusätzlichen (beliebig kleinen) Mengeneinheit entstehen, an.

Erläuterungen

Da eine Mehrproduktion stets mit höheren Gesamtkosten verbunden ist, ist K streng monoton steigend bzw. K' überall positiv ($K'(x) > 0$).

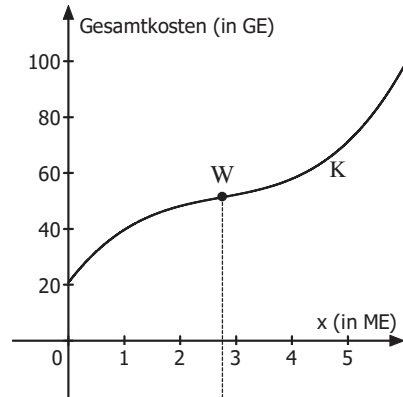
Bis zur Wendestelle fällt K' . Zusätzliche Mengeneinheiten führen zwar zu Mehrkosten, diese jedoch sinken. ($K''(x) < 0$).

Es liegt **degressives Wachstum** vor.

An der Wendestelle selbst sind die Mehrkosten der nächsten Einheit minimal (Tiefpunkt bei K').

Ab der Wendestelle steigt K' . Zusätzliche Mengeneinheiten führen zu immer höheren Mehrkosten. ($K''(x) > 0$).

Es liegt **progressives Wachstum** vor.



Kosten wachsen immer langsamer

Kosten wachsen immer schneller

degressiv wachsend

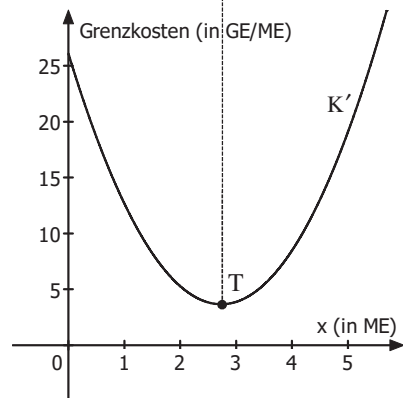
progressiv wachsend

$K'(x) > 0$
(steigende Kosten)

$K'(x) > 0$
(steigende Kosten)

$K''(x) < 0$
abnehmende Grenzkosten
(bzw. K ist rechtsgekrümmt)

$K''(x) > 0$
zunehmende Grenzkosten
(bzw. K ist linksgekrümmt)



5.3 Kostenanalyse: Betriebsminimum und kurzfristige Preisuntergrenze

Beispiel : Die Gesamtkostenfunktion K lautet $K(x) = x^3 - 7x^2 + 20x + 40$. Berechnen Sie das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze.

Beteiligte Funktionen

$$K_V(x) = x^3 - 7x^2 + 20x \quad (\text{Var. Gesamtkostenfkt; ohne Fixkosten})$$

$$k_V(x) = \frac{K_V(x)}{x} = \frac{x^3 - 7x^2 + 20x}{x} = x^2 - 7x + 20 \quad (\text{Variable Stückkostenfunktion})$$

Berechnung : Tiefpunkt des Graphen der variablen Stückkostenfunktion k_V

$$k_V(x) = x^2 - 7x + 20; \quad k_V'(x) = 2x - 7; \quad k_V''(x) = 2$$

$$\begin{aligned} k_V'(x) &= 0 \\ 2x - 7 &= 0 \\ x_{BM} &= 3,5 \end{aligned}$$

$$k_V''(3,5) = 2 > 0 \Rightarrow T$$

$$k_V(3,5) = 3,5^2 - 7 \cdot 3,5 + 20 = 7,75 \quad (= \text{kurzfr. Preisuntergrenze})$$

→ $T(3,5 | 7,75)$ (direkte Berechnung durch GTR/CAS ist möglich)

Wenn der Betrieb $x_{BM} = 3,5$ ME produziert, liegen **minimale variable Stückkosten** vor.

Diese betragen **7,75 GE pro ME** und entsprechen der **kurzfristigen Preisuntergrenze**.

Bis zu dieser Grenze könnte der Betrieb den Verkaufspreis kurzfristig senken, da dann noch die variablen Stückkosten gedeckt sind.

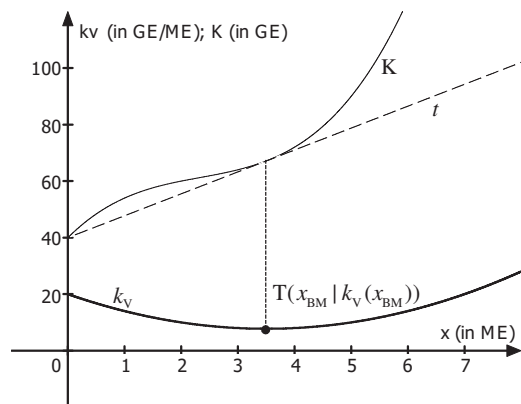
Dies ist jedoch nur kurzfristig möglich, da die **Fixkosten** hierbei **nicht gedeckt** sind.

Weitere Informationen

Eine Gerade durch den y-Achsenabschnitt von K , die den Graphen von K tangieren soll, tangiert diesen stets in x_{BM} .

Die Steigung dieser Tangenten entspricht dann den minimalen variablen Stückkosten ($m = 7,75$).

(Tangentengleichung $y = 7,75x + 40$)



7. Integralrechnung im wirtschaftlichen Kontext

7.1 Marktgleichgewicht, Konsumenten- und Produzentenrente (an quadratischen Funktionen)

Beispiel : In einem Markt liegen die Angebotsfunktion p_A mit $p_A(x) = 4x^2 + 20$ und die Nachfragefunktion p_N mit $p_N(x) = 300 - 5x^2$ vor.

a) Berechnen Sie die **Gleichgewichtsmenge** und den **Gleichgewichtspreis (Marktgleichgewicht)**.

Hier stimmen **Angebot** und **Nachfrage** überein:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= p_N(x) \\ 4x^2 + 20 &= 300 - 5x^2 \quad | +5x^2 - 20 \\ 9x^2 &= 280 \quad | :9 \\ x^2 &\approx 31,11 \quad | \sqrt{} \\ x_G &\approx 5,6 \text{ (Gleichgewichtsmenge)} \quad (x_2 \approx -5,6 < 0) \end{aligned}$$

$$\text{Gleichgewichtspreis : } p_A(5,6) = 4 \cdot 5,6^2 + 20 = 145,4 \rightarrow p_G = 145,4$$

Marktgleichgewicht: MGG(5,6 | 145,4)

b) Berechnen Sie die **Konsumentenrente**, also die Summe der Ersparnisse der Nachfrager im Marktgleichgewicht.

$$\begin{aligned} \mathbf{KR} &= \int_0^{x_G} (p_N(x) - p_G) dx = \int_0^{5,6} (300 - 5x^2 - 145,4) dx = \int_0^{5,6} (154,6 - 5x^2) dx \\ &= \left[154,6x - \frac{5}{3}x^3 \right]_0^{5,6} = 154,6 \cdot 5,6 - \frac{5}{3} \cdot 5,6^3 - 0 \approx 573,07 \end{aligned}$$

c) Berechnen Sie die **Produzentenrente**, also die Summe der Mehreinnahmen der Anbieter im Marktgleichgewicht.

$$\begin{aligned} \mathbf{PR} &= \int_0^{x_G} (p_G - p_A(x)) dx = \int_0^{5,6} (145,4 - (4x^2 + 20)) dx = \int_0^{5,6} (-4x^2 + 125,4) dx \\ &= \left[-\frac{4}{3}x^3 + 125,4x \right]_0^{5,6} = -\frac{4}{3} \cdot 5,6^3 + 125,4 \cdot 5,6 - 0 \approx 468,09 \end{aligned}$$

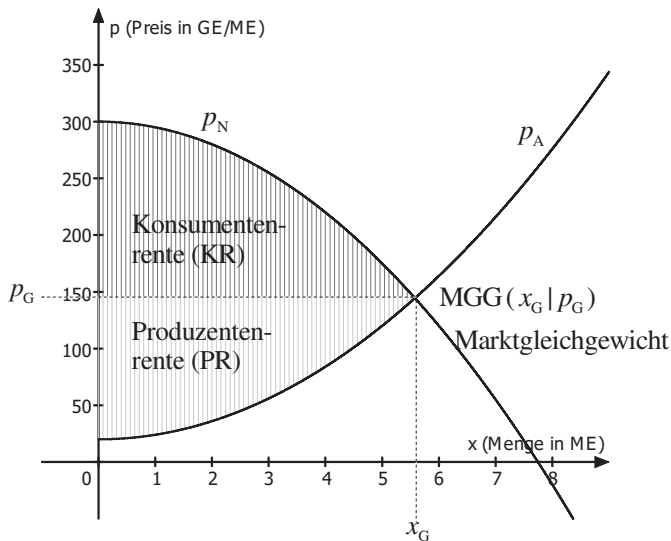
Hinweis : Grafisch wird $p_G = 145,4$ als waagrechte Gerade gedeutet.

Die gesuchten Flächen erhält man dann jeweils durch die Regel (S. 70):

$$\int_{\text{linke Grenze}}^{\text{rechte Grenze}} (\text{oberer Funktionsterm} - \text{unterer Funktionsterm}) dx$$



Grafische Darstellung

**Zusatz:** Ausführliche Erklärung der Begriffes **Konsumentenrente**

Im obigen Beispiel hat sich auf dem Markt ein Preis von 145,4 GE ergeben. An der obigen Grafik sieht man jedoch an p_N , dass einige Konsumenten auch bereit gewesen wären, einen höheren Preis zu bezahlen. Selbst für einen Preis von 250 GE wären ca. 3 ME verkauft worden. Diese Konsumenten haben gespart. Die Ersparnis wird als Konsumentenrente bezeichnet. Der Inhalt der berechneten Fläche entspricht der Summe der Ersparnisse all jener Konsumenten, die bereit gewesen wären, auch einen höheren Preis zu bezahlen.

Hinweis

Entsprechend entspricht die Summe der Mehreinnahmen alle jener Produzenten, die bereit gewesen wären, das Produkt auch für einen geringeren Preis als 145,40 GE zu verkaufen, der **Produzentenrente**.

2. Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit, Vierfeldertafel

2.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Formel (allg.)

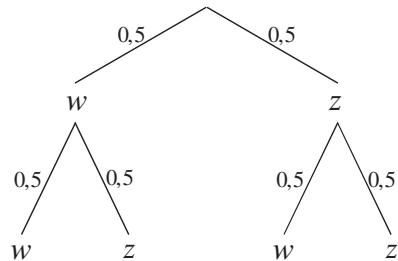
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A: Gesuchtes Ereignis
 B: Vorwissen bzw. Bedingung
 \cap : „und“

Formel (in Worten)

$$P_{\text{Vorwissen}}(\text{gesucht}) = \frac{P(\text{entspricht Vorwissen und ist gesucht})}{P(\text{möglich laut Vorwissen})}$$

Beispiel 1: Eine Münze wird 2-mal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Mal Zahl geworfen wird, wobei bekannt ist, dass im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.



$$P_{\text{Wappen im 2. Wurf}}(\text{genau ein Mal Zahl}) = \frac{P(\text{Wappen im 2. Wurf und genau ein Mal Zahl})}{P(\text{Wappen im 2. Wurf})}$$

$$= \frac{P(zw)}{P(zw) + P(ww)} = \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5} = \frac{0,25}{0,5} = 0,5 = 50\%$$

Beispiel 2: An einer Schule werden Schüler nach der Marke ihres Smartphones befragt:

Marke	Samsung	Apple	Sony	HTC	sonst
Anteil	45 %	21 %	8 %	6 %	20 %

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Schüler, von welchem bekannt ist, dass er kein Smartphone von Samsung besitzt, ein Smartphone von HTC?

$$P_{\text{kein Samsung}}(\text{HTC}) = \frac{P(\text{kein Samsung und HTC})}{P(\text{kein Samsung})} = \frac{P(\text{HTC})}{P(\text{kein Samsung})}$$

$$= \frac{0,06}{1 - 0,45} = \frac{0,06}{0,55} \approx 0,109 = 10,9\%$$



Wichtige Hinweise

Erkennen, dass eine Aufgabe zur bedingten Wahrscheinlichkeit vorliegt

Die Schwierigkeit bei Aufgaben zur bedingten Wahrscheinlichkeit besteht oftmals darin, diese überhaupt als solche zu entlarven und nicht mit „üblichen Baumaufgaben“ zu verwechseln. Hierbei muss das Merkmal solcher Aufgaben, nämlich die Existenz von Vorwissen, erkannt werden.

Es gibt mehrere **grammatikalische Formulierungen**, die den Aufgabenbearbeiter über vorhandenes Vorwissen informieren sollen.

Beispiel (siehe Vorseite)

gesuchtes Ereignis
 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Mal Zahl geworfen wird,
wobei bekannt ist, dass im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.
grammatikalische Vorwissen (Bedingung)
Formulierung

Weitere grammatikalische Formulierungen für die bedingte Wahrscheinlichkeit

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Mal Zahl geworfen wird, **wenn man weiß, dass** im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Mal Zahl geworfen wird, **falls** im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Mal Zahl geworfen wird, **wenn** im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.

Im zweiten Wurf wird Wappen geworfen. (**Vorwissen in eigenem Satz.**)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Mal Zahl geworfen wird.

Achtung: Keine bedingte Wahrscheinlichkeit bei Formulierungen mit „und“

Formulierungen mit „und“ deuten auf eine Aufgabenstellung ohne eine bedingte Wahrscheinlichkeit hin.

Beispiel: Eine Münze wird 2-mal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Mal Zahl **und** im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.

$$P(zw) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$$

5. Binomialverteilung

5.1 Bernoulliformel

Zugrunde liegt ein mehrfach ausgeführtes Bernoulli-Experiment, bei dem ...

... nur **zwei mögliche Ergebnisse** („Treffer“ und „Niete“) eintreten können und

... sich die **Wahrscheinlichkeiten nicht ändern** („Ziehen mit Zurücklegen“)

Beispiele: Münzwurf („Kopf“ oder „Zahl“); Mehrfach würfeln („6“ oder „keine 6“); ...

Bernoulliformel (allg.)

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

n : Anzahl der Versuche (Durchführungen)

k : Anzahl der „Treffer“

p : Wahrscheinlichkeit für einen „Treffer“

Bernoulliformel (in Worten)

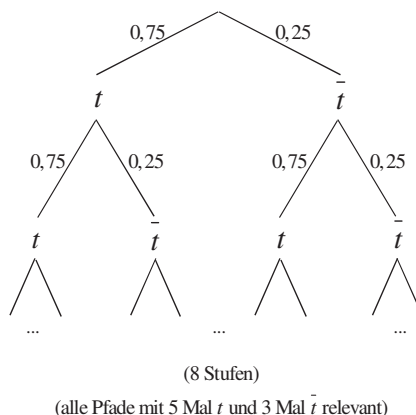
$$P(X = \text{Anz. Treffer}) = \binom{\text{Anz. Versuche}}{\text{Anz. Treffer}} \cdot \text{Trefferwahrsch.}^{\text{Anz. Treffer}} \cdot \text{Nietenwahrsch.}^{\text{Anz. Nieten}}$$

Beispiel 1

Ein Basketballspieler trifft (t) erfahrungsgemäß einen Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. Er wirft 8 Mal.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er insgesamt 5 Mal (und 3 Mal nicht)?

$$P(X = 5) = \binom{8}{5} \cdot 0,75^5 \cdot 0,25^3 \approx 0,2076$$



Erläuterungen

- Binomialkoeffizient (allg.): $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
- $n!$ steht für die Fakultät einer Zahl: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$
- $P(X = 5) = \binom{8}{5} \cdot 0,75^5 \cdot 0,25^3 = \frac{8!}{5! \cdot (8-5)!} \cdot 0,75^5 \cdot 0,25^3 = 56 \cdot 0,00371 \approx 0,2076$.

Es gibt also 56 mögliche Reihenfolgen für 5 Treffer unter 8 Schüssen ($ttttt\bar{t}\bar{t}\bar{t}$, $\bar{t}tttt\bar{t}$, ...), von welchen jede eine Einzelwahrscheinlichkeit von ungefähr 0,00371 aufweist.



Beispiel 2

Eine faire Münze wird 5 Mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man genau 3 Mal „Zahl“? (Lösen ohne GTR/CAS)

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{16}$$

$$\left(\text{Nebenrechnung: } \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{(\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}) \cdot (2 \cdot 1)} = 10 \right)$$

Beispiel 3

Ein Bauteil ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 4 % defekt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich in einem Karton mit 50 Bauteilen genau 3 defekte Bauteile?

$$P(X = 3) = \binom{50}{3} \cdot 0,04^3 \cdot 0,96^{47} (\approx 19600 \cdot 0,000009396) \approx 0,184 = 18,4\% \quad \begin{array}{l} \text{GTR/CAS:} \\ \text{BV (50, 0,04, 3)} \\ \rightarrow P \approx 0,184 \end{array}$$

(Es gibt also 19600 mögliche Reihenfolgen für 3 defekte unter 50 (nacheinander entnommenen) Bauteilen.)

Beispiel 4

Jonas würfelt 24 Mal.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er genau 7 Mal eine 3?

$$P(X = 7) = \binom{24}{7} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{17} \approx 0,056 \quad \begin{array}{l} \text{GTR/CAS:} \\ \text{BV (24, 1/6, 7)} \\ \rightarrow P \approx 0,056 \end{array}$$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er genau 10 Mal eine 2 oder eine 3?

$$\left(\text{Wahrscheinlichkeit für 2 oder 3: } \frac{2}{6} \right) \quad \begin{array}{l} \text{GTR/CAS:} \\ \text{BV (24, 2/6, 10)} \\ \rightarrow P \approx 0,114 \end{array}$$

$$P(X = 10) = \binom{24}{10} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{14} \approx 0,114$$

7. Normalverteilung (nur LK)

7.1 Einführung

Beispiel: Messung der Körpergröße bei einer zufällig ausgewählten männlichen Person.

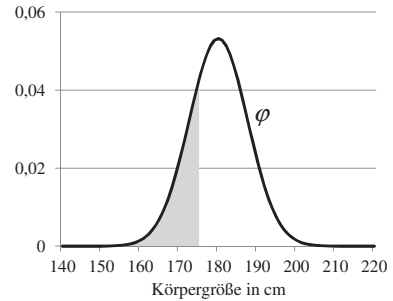
1. Normalverteilung: Dichtefunktion φ (Gauß - Kurve)

- Der Bereich um den Erwartungswert (hier $\mu = 180$ cm) hat die größte Wahrscheinlichkeit.
- Die Standardabweichung (hier $\sigma = 7,5$) bestimmt die Breite der Verteilung.
- Achtung: **Funktionswerte von φ stellen nicht die Wahrscheinlichkeiten** der einzelnen Werte dar! Die Wahrscheinlichkeit (jedes) einzelnen Wertes beträgt 0%: $P(X = k) = 0$.

Grund: Z.B. beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass

jemand (auf unendlich viele Kommastellen) genau 1,70000000 ...0 m groß ist, 0%.

- Über den **Inhalt der Fläche unter der φ - Kurve** können jedoch **Wahrscheinlichkeiten** berechnet werden. Die nachfolgende Funktion Φ (Integralfunktion zu φ) gibt diese an.



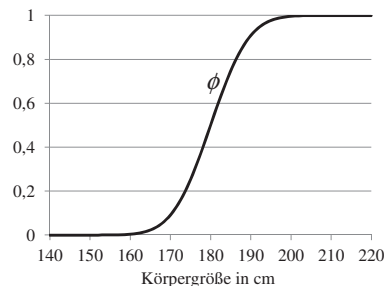
2. „Kumulierte“ Normalverteilung: Verteilungsfunktion Φ

Gibt für jeden möglichen Wert der Zufallsvariablen die **Wahrscheinlichkeit** an, dass **dieser oder ein geringerer Wert als dieser** angenommen wird.

$$P(X \leq k) = \Phi(k) = \int_{-\infty}^k \varphi(x) dx$$

Beispiel

$$P(X \leq 174) = \Phi(174) = \int_{-\infty}^{174} \varphi(x) dx \approx 0,2119$$



Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte männliche Person höchstens 174 cm groß ist, beträgt 21,19 %.

Hinweis

Im nachfolgenden Kapitel werden die Aufgabenstellungen jeweils zunächst durch **GTR / CAS (normalcdf)** gelöst.

Es ist jedoch ebenfalls die Lösung mithilfe der **Standardnormalverteilung Φ** dargestellt.

Hierbei gilt: $P(X \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right)$

7.2 Aufgabentypen

Beispiel: Die Körpergröße vom Männern ist näherungsweise normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 180$ cm und der Standardabweichung $\sigma = 7,5$ cm.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Mann ...

Aufgabentypen, gelöst mit GTR/CAS	
1. „höchstens k“ $P(X \leq k)$ $\approx \text{normalcdf}(-10^{99}; k; \mu; \sigma)$... höchstens 174 cm groß? $P(X \leq 174)$ $\approx \text{normalcdf}(-10^{99}; 174; 180; 7,5) \approx 0,212$
2. „mindestens k“ $P(X \geq k)$ $\approx 1 - \text{normalcdf}(-10^{99}; k; \mu; \sigma)$... mindestens 192 cm groß? $P(X \geq 192) = 1 - P(X < 192)$ $\approx 1 - \text{normalcdf}(-10^{99}; 192; 180; 7,5)$ $\approx 1 - 0,9452 \approx 0,055$
3. „mind. k_1 und höchst. k_2“ $P(k_1 \leq X \leq k_2)$ $\approx \text{normalcdf}(k_1; k_2; \mu; \sigma)$... mind. 183 cm und höchst. 195 cm groß? $P(183 \leq X \leq 195)$ $\approx \text{normalcdf}(183; 195; 180; 7,5)$ $\approx 0,322$
Aufgabentypen, gelöst mit Standardnormalverteilung Φ (Tabelle)	
1. „höchstens k“ $P(X \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right)$... höchstens 174 cm groß? $P(X \leq 174) \approx \Phi\left(\frac{174 - 180}{7,5}\right)$ $\approx \Phi(-0,8) \approx 0,212$
2. „mindestens k“ $P(X \geq k) \approx 1 - P(X < k)$ $\approx 1 - \Phi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right)$... mindestens 192 cm groß? $P(X \geq 192) = 1 - P(X < 192) \approx 1 - \Phi\left(\frac{192 - 180}{7,5}\right)$ $\approx 1 - \Phi(1,6) \approx 1 - 0,9452 \approx 0,055$
3. „mind. k_1 und höchst. k_2“ $P(k_1 \leq X \leq k_2) \approx P(X \leq k_2) - P(X \leq k_1)$ $\approx \Phi\left(\frac{k_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - \mu}{\sigma}\right)$... mind. 183 cm und höchst. 195 cm groß? $P(183 \leq X \leq 195) = P(X \leq 195) - P(X \leq 183)$ $\approx \Phi\left(\frac{195 - 180}{7,5}\right) - \Phi\left(\frac{183 - 180}{7,5}\right)$ $\approx \Phi(2) - \Phi(0,4) \approx 0,9772 - 0,6554 \approx 0,322$