Vorwort

Der vorliegende Band ist ein Lehr- und Arbeitsbuch zum Thema „Beschreibung von Austausch- und Populationsprozessen durch Matrizen“ für die beruflichen Gymnasien AG, BTG, EG, SGG.
Es richtet sich exakt nach dem aktuellen Bildungsplan von 2021 für die beruflichen Gymnasien (eA) in Baden-Württemberg.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam sowohl die im Lehrplan geforderten inhalts- als auch die prozessbezogenen Kompetenzen (modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).

Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die im Bildungsplan aufgeführten Kompetenzen und Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

Inhaltsverzeichnis

Beschreibung von Austausch- und Populationsprozessen durch Matrizen

In diesem Kapitel werden Austausch- und Populationsprozesse mithilfe von Übergangsmatrizen beschrieben. In einem Austausch- bzw. Populationsprozess, z. B. bei Insekten ändert sich ein bestehender Zustand (Eier, Larve, Insekt). In der Marktforschung z. B. bedient man sich solcher Matrizen, um aus erfassten Daten Schlüsse für das weitere Verhalten der Kunden (Markentreue, Markenwechsel) zu ziehen.

Qualifikationen & Kompetenzen

- Informationen in Matrixform bringen und als Diagramm darstellen
- Stochastische und zyklische Prozesse veranschaulichen, beschreiben und interpretieren
- Verteilungen berechnen
- Eine stabile Verteilung ermitteln

2.2 Stabilitätsvektor und Grenzmatrix

Bei Austauschprozessen ist die langfristige Einwicklung interessant. Eine besondere Stellung nehmen Verteilungen ein, die sich im Laufe des Prozesses nicht ändern. Man nennt diese Verteilungen **stationär (stabil).**

Beispiel 1

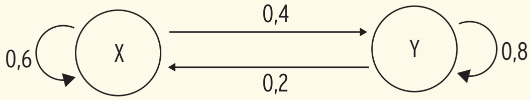
➲ Eine Population von Käfern enthält Tiere mit zwei verschiedenen Merkmalen X und Y (z. B. Farbe). Beobachtungen über längere Zeit zeigen, dass Käfer mit Merkmal X zu 60 % Nachkommen mit Merkmal X und zu 40 % solche mit Merkmal Y haben. Käfer mit Merkmal Y haben zu 80 % wieder Nachkommen mit diesem Merkmal, zu 20 % solche mit Merkmal X. Die Vermehrungsrate wird durch die Merkmale nicht beeinflusst.

a) Die Generation bei Beobachtungsbeginn enthält jeweils 50 % Käfer mit Merkmal X bzw. Merkmal Y. Berechnen Sie eine Verteilung von X und Y der nächsten Generation.

b) Wie sieht die langfristige Verteilung der Merkmale aus?

Lösung

a) Übergangsdiagramm:



Übergangsmatrix: $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ Startvektor: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

Verteilung in der nächsten Generation: $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$

Die nächste Generation enthält 40 % Käfer mit Merkmal X und 60 % Käfer mit Y.

b) Gesucht ist also die Verteilung, die sich durch Multiplikation mit A nicht mehr ändert, die **stationäre Verteilung.** Der **Stabilitätsvektor** (Fixvektor) $\vec{x}$ mit den Eigenschaften $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$ und $x_1 + x_2 = 1$ beschreibt diese stationäre Verteilung.

Der Ansatz $A\,\vec{x} = \vec{x}$ führt mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix}$.

Daraus folgt das LGS $\quad 0{,}6x_1 + 0{,}2(1 - x_1) = x_1$
$\quad 0{,}4x_1 + 0{,}8(1 - x_1) = 1 - x_1$

Vereinfachung ergibt jeweils $\quad 0{,}6x_1 = 0{,}2$ und daraus $x_1 = \frac{1}{3}$

Einsetzen in $x_1 + x_2 = 1$ ergibt $\quad x_2 = \frac{2}{3}$

Lösung: $\quad x_1 = \frac{1}{3};\ x_2 = \frac{2}{3}$

Die stationäre Verteilung ist 33,33 % Käfer mit Merkmal X und 66,67 % mit Merkmal Y.

Stabilitätsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$; $\vec{x}$ beschreibt die stationäre Verteilung.

Für den **stationären (stabilen) Zustand** $\vec{x}$ gilt: $A\,\vec{x} = \vec{x}$.

3 Die drei Autowaschanlagen W1, W2 und W3 haben das Wechselverhalten ihrer Kunden untersucht. Die Kunden von W1 verteilen sich bei der nächsten Autowäsche im Verhältnis 2 : 1 : 1 auf die drei Autowaschanlagen. Die Kunden von W2 wechseln das nächste Mal zu 25 % zu W1 und zu 25 % zu W3. 80 % der Kunden von W3 sind der Anlage treu, der Rest wechselt zu W1. Jeder Kunde wäscht sein Auto genau einmal pro Woche.

a) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix für diesen Prozess.

b) In einer bestimmten Woche waschen von insgesamt 1000 Autofahrern 500 bei W1 und je 250 bei W2 und W3 ihr Auto. Bestimmen Sie die Verteilung in der Vorwoche und für die folgende Woche.

c) Bestimmen Sie die stabile Verteilung und geben Sie die Grenzmatrix an. Wie sieht die langfristige Verteilung aus, wenn zu Beginn alle Autofahrer ihr Fahrzeug in der Anlage W1 waschen?

4 Drei Vollwaschmittel V1, V2 und V3 teilen den Markt unter sich auf. Das Wechselverhalten der Kunden nach jedem Kauf wird durch die Übergangsmatrix

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben.

a) Kaufen 175 Kunden V1, 200 Kunden V2 und 190 Kunden V3, so ist der Markt im Gleichgewicht. Überprüfen Sie diese Behauptung. Welchen Marktanteil hat dann das Vollwaschmittel V2?

b) Anfangs kaufen alle Kunden das Vollwaschmittel V1. Wie lautet die Verteilung nach zweimaligem Kauf? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Käufer von V2 beim übernächsten Einkauf nicht mehr V2 kauft?

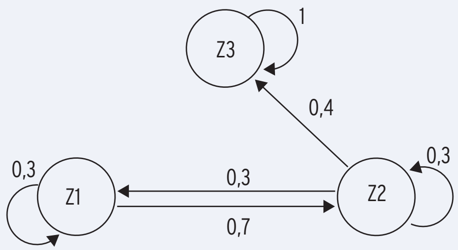
c) Bestimmen Sie das Wechselverhalten der Kunden von Vollwaschmittel V2, damit langfristig die Vollwaschmittel im Verhältnis 1 : 2 : 1 gekauft werden?

5 Im Stadtgebiet von Ulm sollen 30 Elektrosmarts an 3 Standorten X, Y und Z bereitgestellt werden. Ein Modell für die täglichen Veränderungen besagt, dass 60 % der entliehenen Autos abends am Standort X, 30 % in Y und 10 % in Z abgestellt werden.
80 % der in Y entliehenen Autos werden wieder in Y abgestellt, der Rest zu gleichen Teilen in X und Z. Von den in Z abgeholten Autos kehrt die Hälfte abends wieder zurück, 20 % werden bei X und Rest bei Y abgestellt.
Morgens stehen 50 % der Autos in X, 30 % in Y und 20 % in Z. Wie viel % der Autos werden abends nicht am Standort Y abgestellt? Wie sollen die Autos sinnvoll an den Standorten verteilt werden?

2.3 Absorbierender Zustand

Beispiel 1

Ein Computerspiel hat drei Spielstufen Z1 bis Z3. Der Spieler beginnt in Z1.
Das Prozessdiagramm beschreibt die Zustandsverteilung.



a) Geben Sie die Übergangsmatrix an. Beschreiben Sie die Zustände Z1 bis Z3.

b) Zwei Spiele werden durchgeführt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit
- erreicht der Spieler den absorbierenden Zustand?
- ist er nicht mehr in Z1?

Lösung

a) Übergangsmatrix: $A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 1 \end{pmatrix}$.

Von Zustand Z1 erreicht man mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,7 den Zustand Z2.
Von Zustand Z2 erreicht man mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4 den Zustand Z3 und mit 0,3 wieder den Zustand Z1.
Hat man den Zustand Z3 erreicht, kann man diesen Zustand nicht mehr verlassen.
Den Zustand Z3 nennt man **absorbierend.**

b) Startvektor: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Multiplikation mit A ergibt: $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}7 \\ 0 \end{pmatrix}$

Interpretation: Nach einem Spiel kann man Z3 nicht erreicht haben.

Multiplikation von $\begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}7 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit A ergibt: $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}42 \\ 0{,}28 \end{pmatrix}$

Interpretation: Nach zwei Spielen erreicht man Z3 (den absorbierenden Zustand) mit einer Wahrscheinlichkeit von 28 %.

Mit zwei Spielen erreicht man Z3 durch: $Z1 \xrightarrow{0{,}7} Z2 \xrightarrow{0{,}4} Z3$

Wahrscheinlichkeit: $0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28$.

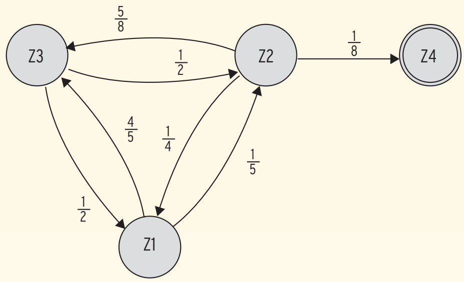
Nach zwei Spielen ist er nicht mehr in Z1 mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

Ein Zustand, den man erreicht, heißt **absorbierend,** wenn man ihn nicht mehr verlassen kann. In einem **absorbierenden Zustand** verbleibt man mit der Wahrscheinlichkeit 1.

Aufgaben

1 Erläutern Sie: Die Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0{,}9 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \end{pmatrix}$ beschreibt einen stochastischen Prozess mit einem absorbierenden Zustand.
Zeichnen Sie ein Übergangsdiagramm für die Zustände Z1, Z2 und Z3.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird von Z3 aus in zwei Schritten der Zustand Z1 erreicht?

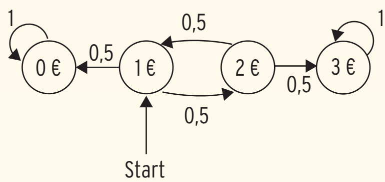
2 Ein Käfer krabbelt auf einer Figur. Er beginnt in Zustand 1. Im Zustand 4 wartet ein Vogel, der den Käfer fressen wird. In den Zuständen 1, 2 und 3 wählt der Käfer den Weg zum nächsten Punkt mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten.



a) Stellen Sie eine Übergangsmatrix auf.
b) Entscheiden Sie, ob der stochastische Prozess einen absorbierenden Zustand hat.

3 Die Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ beschreibt einen Prozess.
Begründen Sie, dass der Übergangsprozess keinen absorbierenden Zustand hat.

4 Ein Spiel verläuft nach dem nebenstehenden Prozessdiagramm.
Karl setzt 1 € ein und hört bei einem Guthaben von 3 € auf.



a) Erstellen Sie eine Übergangsmatrix. Kennzeichnen Sie absorbierende Zustände und geben Sie den Startvektor an.
b) Der Vektor $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \\ 0 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$ beschreibt die Verteilung nach 2 Übergängen. Interpretieren Sie.
c) Mit 4 Übergängen erreicht er einen absorbierenden Zustand. Geben Sie einen Pfad an und bestimmen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeit. Begründen Sie.

5 Zur Beschreibung der Ausbreitung einer Krankheit in einer Pinguinkolonie mit einem Modell teilen die Forscher die gesamte Population von 50 000 Pinguinen in drei Gruppen ein: Gesunde, Kranke und Tote.
Im Rahmen des Modells gilt der Zusammenhang $A \cdot \vec{x}_n = \vec{x}_{n+1}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0{,}15 & 0 \\ 0{,}01 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}$.
$\vec{x}_n$ beschreibt die Verteilung der Gesamtpopulation am Tag n.
Erstellen Sie den zu der Übergangsmatrix A gehörenden Übergangsgraphen.
Interpretieren Sie die Matrixeinträge 0,99; 0,3 und 1 im Sachkontext.

3 Zyklische Verteilungen

Beispiel 1

Bei einer Insektenart vollzieht sich die Entwicklung in einem 3-monatigen Zyklus. Insekten legen durchschnittlich 25 Eier und sterben danach. Aus den Eiern entwickeln sich innerhalb eines Monats 10 % zu Larven. Nur 40 % der Larven überleben den folgenden Monat und entwickeln sich zu Insekten, die wiederum 25 Eier legen.

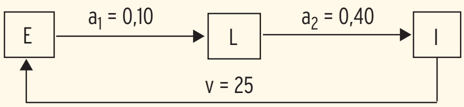
a) Zeichnen Sie ein Entwicklungsdiagramm und geben Sie die Übergangsmatrix an.

b) Wie entwickelt sich eine Startpopulation von 1000 Eiern, 240 Larven und 30 Insekten im Laufe eines Zyklus?

c) Wie entwickelt sich die Population aus b), wenn die Überlebensraten gleich bleiben und
- sich die Vermehrungsrate durch ein günstiges Klima auf 50 erhöht bzw.
- die Vermehrungsrate auf 20 sinkt?

Lösung

a) Entwicklungsdiagramm (Ablaufplan für einen Entwicklungszyklus):



Hinweis: a_1 und a_2 sind **Überlebensraten**, v ist die **Vermehrungsrate.**

Darstellung des Übergangsverhaltens in Tabellenform:

zu \ von	E	L	I
E	0	0	25
L	0,10	0	0
I	0	0,40	0

Erläuterung: Aus Eiern (E) entwickeln sich nur Larven (L), aus L nur Insekten (I), aus I nur E.

Aus der Tabelle erhält man die Übergangsmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 25 \\ 0{,}10 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}40 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Mit der Startpopulation $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 240 \\ 30 \end{pmatrix}$ erhält man die Population $\vec{x}_1$ nach einem Monat:

$$\vec{x}_1 = A \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 25 \\ 0{,}10 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}40 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 240 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 750 \\ 100 \\ 96 \end{pmatrix}$$

Aus 1000 E entwickeln sich $\mathbf{0{,}10} \cdot 1000 = 100$ L, aus 240 L entwickeln sich $\mathbf{0{,}40} \cdot 240 = 96$ I, 30 I legen $\mathbf{25} \cdot 30 = 750$ E.

Population $\vec{x}_2$ nach 2 Monaten: $\vec{x}_2 = A \cdot \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2400 \\ 75 \\ 40 \end{pmatrix}$

Population $\vec{x}_3$ nach 3 Monaten: $\vec{x}_3 = A \cdot \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 240 \\ 30 \end{pmatrix} = \vec{x}_0$

Die Population entwickelt sich **zyklisch.** In einem **Zyklus** von 3 Monaten stellt sich die Startpopulation wieder ein. Ist das Produkt aus Überlebensraten und Vermehrungsrate gleich 1 ($a_1 \cdot a_2 \cdot v = 0{,}10 \cdot 0{,}40 \cdot 25 = 1$), so entwickelt sich die Population zyklisch.

Hinweis: 100 E $\xrightarrow{0{,}10}$ 10 L $\xrightarrow{0{,}40}$ 4 I $\xrightarrow{25}$ 100 E

Erläuterungen: Aus $\vec{x}_2 = A \cdot \vec{x}_1$ folgt mit $\vec{x}_1 = A \cdot \vec{x}_0$: $\vec{x}_2 = A \cdot A \cdot \vec{x}_0 = A^2 \cdot \vec{x}_0$.

Ebenso gilt $\vec{x}_3 = A^3 \cdot \vec{x}_0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 25 \\ 0{,}10 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}40 & 0 \end{pmatrix};\; A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}5 \\ 0{,}04 & 0 & 0 \end{pmatrix};\; A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Bei einem **dreimonatigen** Zyklus gilt $A^3 = E$ (Einheitsmatrix) wegen $a_1 \cdot a_2 \cdot v = 1$.
Das **Produkt aus Überlebensraten und Vermehrungsrate** ist gleich 1.

Daher gilt: $\vec{x}_3 = A^3 \cdot \vec{x}_0 = E \cdot \vec{x}_0 = \vec{x}_0$.

Hinweis: Gilt $A^3 = E$, so reproduziert sich **jede** Population mit der Übergangsmatrix A nach 3 Monaten. A ist eine **zyklische** Matrix.

Jede (Start-) Population, z. B. $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 240 \\ 30 \end{pmatrix}$ oder auch $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 750 \\ 100 \\ 96 \end{pmatrix}$, reproduziert sich nach drei Monaten.

c) Mit der neuen Übergangsmatrix $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0{,}10 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}40 & 0 \end{pmatrix}$ folgt für $A^{*3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Für die Population nach 3 Monaten erhält man $\vec{x}_3 = A^{*3} \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2000 \\ 480 \\ 60 \end{pmatrix}$.

Die Ausgangspopulation verdoppelt sich alle 3 Monate.
Das Wachstum ist unbegrenzt.
$a_1 \cdot a_2 \cdot v = 2$ bedeutet eine Vermehrung um 100 %.

Mit der neuen Übergangsmatrix $A^{**} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0{,}10 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}40 & 0 \end{pmatrix}$ folgt für $A^{**3} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

Für die Population nach 3 Monaten erhält man $\vec{x}_3 = A^{**3} \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 800 \\ 192 \\ 24 \end{pmatrix}$.

Die Ausgangspopulation hat sich in 3 Monaten auf 80 % verringert.
Die Population stirbt aus.
$a_1 \cdot a_2 \cdot v = 0{,}8$ bedeutet eine Abnahme um 20 % in 3 Monaten.

Eine Matrix A heißt **zyklisch,** wenn $A^n = E$ für $n > 1$ ist, d. h., eine Population reproduziert sich mit der Zykluslänge n.
Eine **Populationsentwicklung** wird durch die Übergangsmatrix

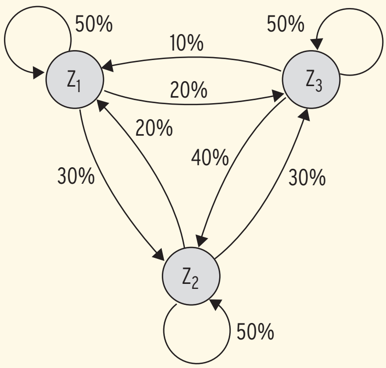
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Dabei sind a_1 und a_2 die **Überlebensraten** und v die **Vermehrungsrate.**

Gilt $\begin{cases} a_1 \cdot a_2 \cdot v < 1, \text{ stirbt die Population aus.} \\ a_1 \cdot a_2 \cdot v = 1, \text{ entwickelt sich die Population zyklisch (Zykluslänge } n = 3). \\ a_1 \cdot a_2 \cdot v > 1, \text{ nimmt die Population zu.} \end{cases}$

Vermischte Aufgaben

1 Drei Wochenzeitschriften Z_1, Z_2 und Z_3 beherrschen den Zeitschriftenmarkt einer Kleinstadt. Das Diagramm beschreibt das monatliche Wechselverhalten der Leser.



a) Erstellen Sie die Übergangsmatrix A für einen Monat und interpretieren Sie die Elemente der 2. Spalte.

b) Eine aktuelle Markterhebung hat ergeben, dass sich die Marktanteile der drei Zeitschriften wie 1 : 1 : 3 verhalten. Berechnen Sie die voraussichtlichen Marktanteile der drei Zeitschriften nach einem Monat und nach 2 Monaten.

c) Die Grenzmatrix lautet $G = \frac{1}{55}\begin{pmatrix} 13 & 13 & 13 \\ 23 & 23 & 23 \\ 19 & 19 & 19 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie die langfristige Verteilung der Marktanteile auf 1 Dezimale gerundet.

2 Beim Vergleich zweier aufeinanderfolgender Landtagswahlen ergibt sich folgende prozentuale Wählerwanderung:

	von Partei C	von Partei S	von Nichtwähler
an Partei C	70 %	10 %	40 %
an Partei S	20 %	80 %	20 %
an Nichtwähler	10 %	10 %	40 %

Diese Wählerwanderung bei zwei aufeinanderfolgenden Landtagswahlen wird für die folgenden Fragen als konstant vorausgesetzt.

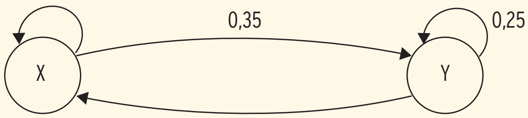
a) Bei einer Landtagswahl haben 45 % der Wahlberechtigten die Partei C und 35 % der Wahlberechtigten die Partei S gewählt. 20 % der Wahlberechtigten waren Nichtwähler. Wie viel Prozent der Wahlberechtigten werden bei der darauffolgenden Landtagswahl die Partei C bzw. die Partei S wählen?

b) Es wird Folgendes angenommen: Bei zwei aufeinanderfolgenden Landtagswahlen ändert sich der Anteil der Nichtwähler an den Wahlberechtigten nicht, und auch das Wahlergebnis der beiden Parteien bleibt konstant.
Wie viel Prozent der Wahlberechtigten wählen dann die Partei C bzw. die Partei S?
Wie viel Prozent der Wahlberechtigten sind dann Nichtwähler?

3 Zeigen Sie: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$ ist eine zyklische Matrix mit einem Zyklus von n = 3.

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

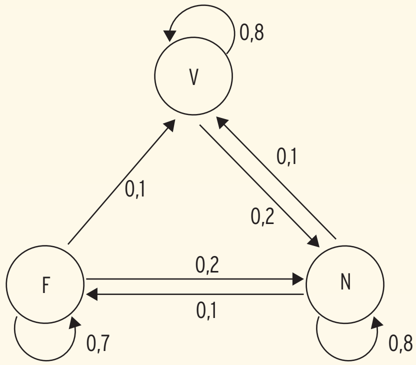
1 Vervollständigen Sie das Diagramm. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix.



2 Gegeben ist die Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

Zeichnen Sie einen Übergangsgraph. Bestimmen Sie die Verteilung $\vec{x}_1$ für den Startvektor $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 200 \end{pmatrix}$.

3 Die Bewohner einer Stadt können zwischen drei Frisörsalons F, N und V wählen. Der nebenstehende Graph gibt das Wahlverhalten der Bewohner von einem Besuch zum nächsten an.
Es soll davon ausgegangen werden, dass die Gesamtanzahl der Frisörbesuche konstant bleibt.



a) Geben Sie die in der zugehörigen Übergangsmatrix A fehlenden Werte an:

$A = \begin{pmatrix} \square & 0{,}1 & \square \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ \square & 0{,}1 & \square \end{pmatrix}$

b) Geben Sie den Wert d der Matrix $A^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ an.
Interpretieren Sie diesen Wert.

4 Die Populationsentwicklung einer Tierart wird durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben.

a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen und beschreiben Sie diesen Graphen aus biologischer Sicht.

b) Zeigen Sie, dass es eine Population gibt, die sich jährlich wiederholt.
Bestimmen Sie die Altersverteilung in dieser stationären Population, wenn sie insgesamt 2600 Tiere umfasst.