Bohner | Ott | Deusch

Arbeitsheft
Mathematik
für das Berufskolleg – Berufliches Gymnasium
Jahrgangsstufe 12 und 13

Nordrhein-Westfalen

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Verfasser:

Kurt Bohner

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Ronald Deusch

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intra-nets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG behält sich eine Nutzung ihrer Inhalte für kommerzielles Text- und Data Mining (TDM) im Sinne von § 44 b UrhG ausdrücklich vor. Für den Erwerb einer entsprechenden Nutzungserlaubnis wenden Sie sich bitte an copyright@merkur-verlag.de.

* * * * * * * * * *

2. Auflage 2024

© 2018 by Merkur Verlag Rinteln

Gesamtherstellung:

Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de

lehrer-service@merkur-verlag.de

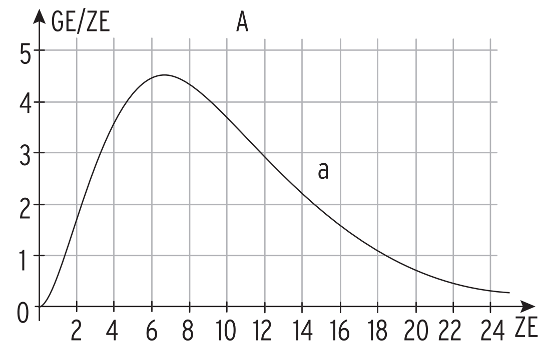
Internet: www.merkur-verlag.de

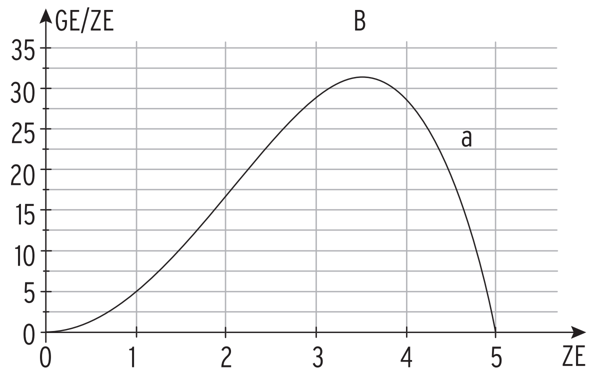
Merkur-Nr: 2666-02

ISBN 978-3-8120-1066-5

6 Anwendungen der Differenzialrechnung

1 Die Abbildungen zeigen die Absatzentwicklungen neuer Produkte A und B.

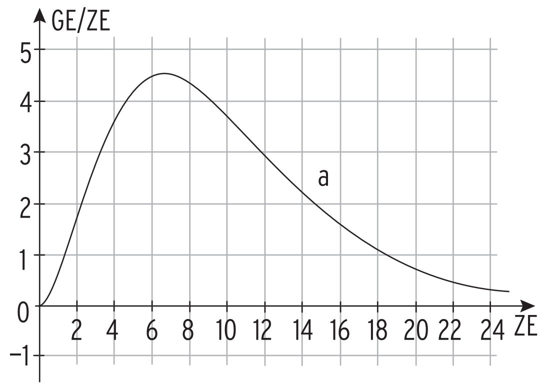


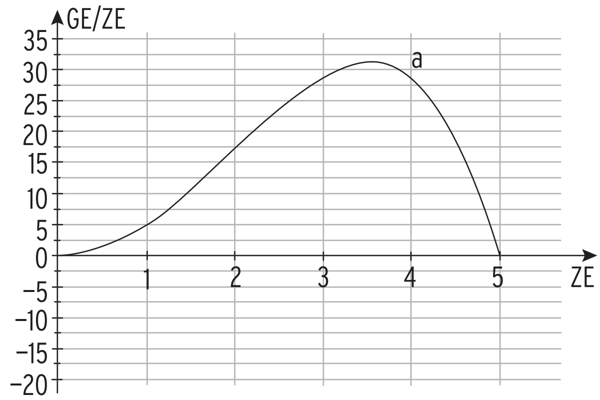


a) Bestimmen Sie den maximalen Absatz.

A: B:

b) Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion, die die Absatzänderung beschreibt, in die Abbildung ein und bestimmen Sie die größte Absatzsteigerung.





c) Ordnen Sie den Verlauf der Absatzzahlen den folgenden Phasen zu.

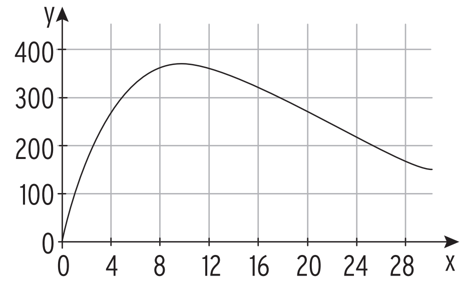
Phase	Wachstum	Reife	Sättigung	Degeneration
Absatz	progressiv steigend	degressiv steigend	langsam fallend	stark fallend

A:

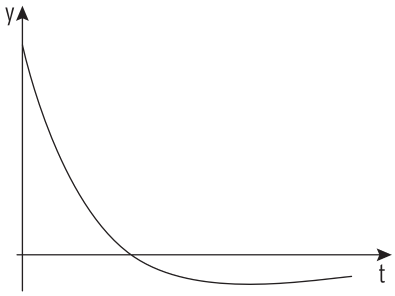
B:

2 Die Abbildung zeigt die Modellierung des Absatzes von neu auf dem Markt eingeführter Setzlinge im Zeitraum von 0 bis 30 Jahren durch die Funktion f.

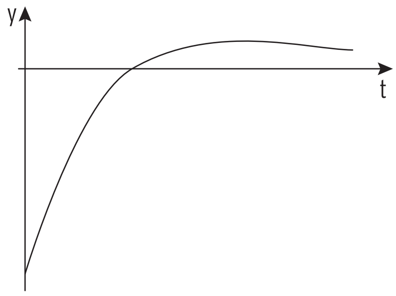
Begründen Sie, welche der drei Abbildungen dem Graphen der Funktion f′ entsprechen könnte und welche beiden nicht.



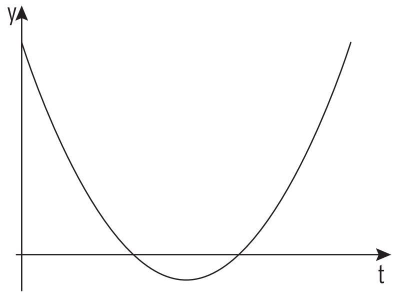
A



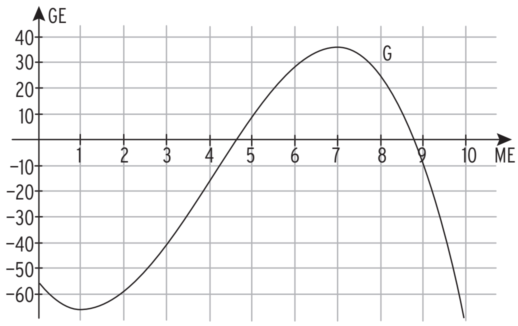
B



C



3 Die Abbildung zeigt den Graphen der Gewinnfunktion G.
Beurteilen Sie begründet anhand des Graphen von G folgende Aussagen:



a) Die Gewinnschwelle wird bei ca. 4,6 ME erreicht.

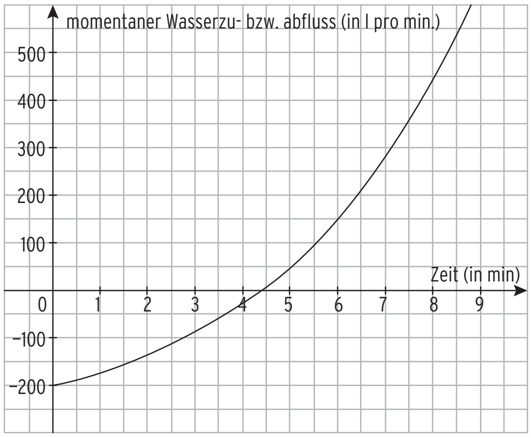
b) Bei ca. 6,9 ME wechselt der Grenzgewinn vom Positiven ins Negative.

c) Die fixen Kosten betragen weniger als 50 GE.

d) Der maximale Gewinn beträgt ca. 35 GE.

3 Die Funktion f mit $f(t) = 100e^{0,25t} - 300$ gibt für die ersten 9 Minuten den momentanen Wasserzu- bzw. abfluss in einem Wasserspeicher an. Das zugehörige Schaubild ist nebenstehend dargestellt. Positive Werte stehen hierbei für einen Wasserzufluss, negative für einen Wasserabfluss.

a) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, indem am meisten Wasser abfließt.

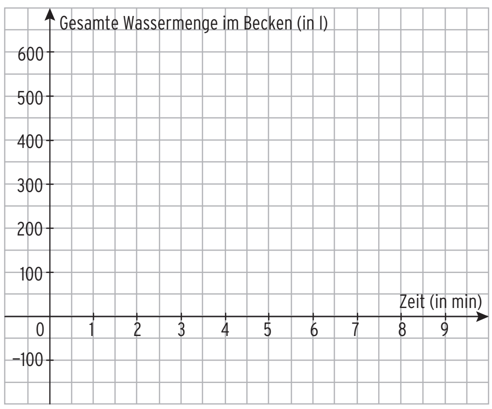


b) Ermitteln Sie den Zeitraum des Wasserabflusses.

c) Geben Sie die gesamte abgeflossene Wassermenge an.

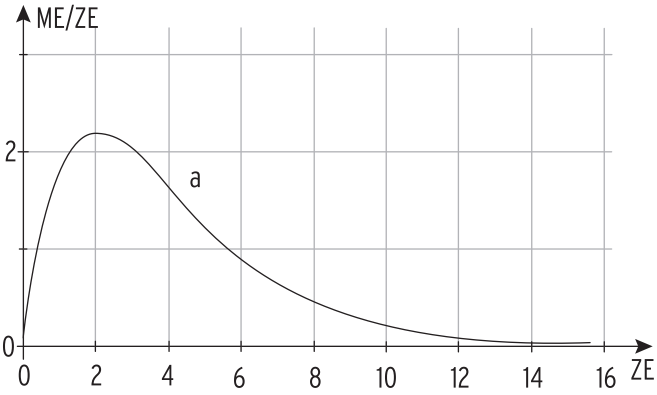
d) Beschreiben Sie die Änderung der vorhandenen Wassermenge im Becken zwischen $t = 3$ und $t = 6$.

e) Zu Beginn befanden sich 550 l Wasser im Becken. Ermitteln Sie den Term der Funktion, welche für jeden Zeitpunkt die gesamte Wassermenge im Becken angibt. Zeichnen Sie diese in das Koordinatensystem ein.



f) Bestimmen Sie die durchschnittliche Wassermenge im Becken zwischen $t = 2$ und $t = 7$.

4 Die Abbildung zeigt den momentanen Absatz a der Pyrokomet AG in ME/ZE.



Der Gesamtabsatz der Pyrokomet AG in ME für die Zeit seit Einführung lässt sich modellieren durch eine Funktion A.
Ordnen Sie begründet zu, welche Abbildung den Graphen der Funktion A zeigt.

Abb. 1

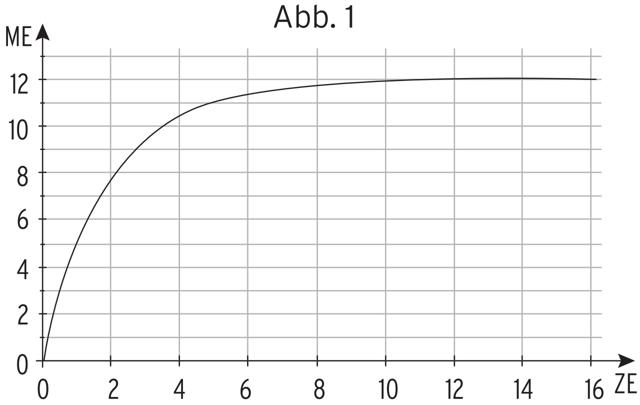


Abb. 2

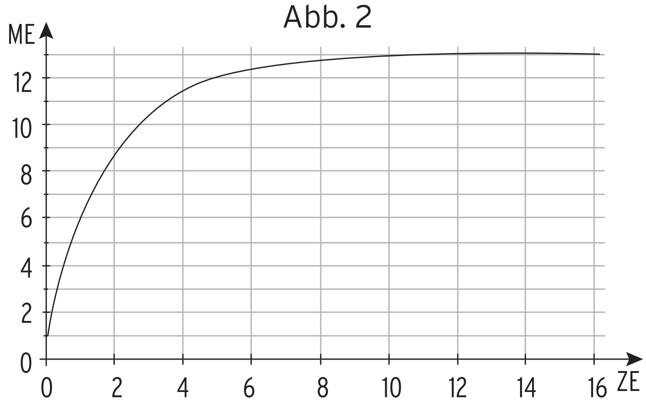
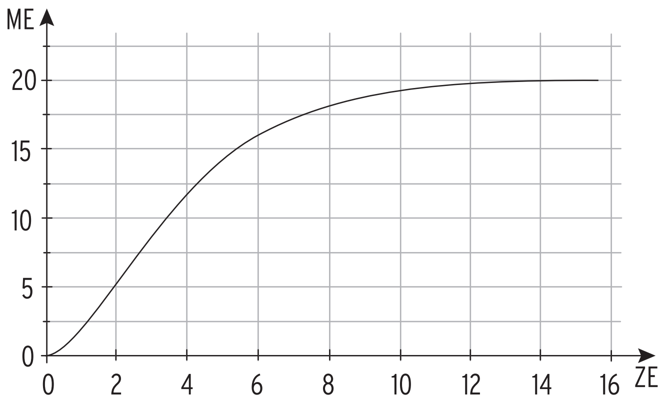
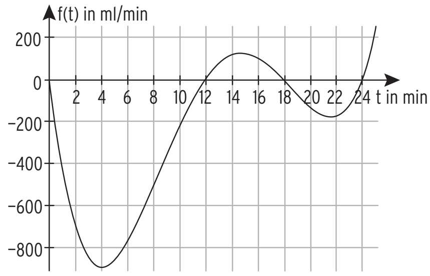


Abb. 3



5 Zum Entfernen von Farbresten werden Eisenteile mit einer Spezialflüssigkeit besprüht. Diese befindet sich in einem Behälter, der zum Zeitpunkt 0 mit 7 Litern Flüssigkeit gefüllt ist. Durch den Verbrauch sinkt die Flüssigkeitsmenge im Behälter und muss daher wieder aufgefüllt werden. Entnahme und Zuführung der Flüssigkeit geschehen nicht gleichzeitig. Der Zu- bzw. Abfluss der Flüssigkeit wird modellhaft beschrieben durch den Graph der Funktion f mit $f(t) = 0{,}1t(t-12)(t-18)(t-24)$; $0 \leq t \leq 24$ (siehe Abb.)



Nehmen Sie begründet Stellung zu folgenden Aussagen:

a) Nach 12 Minuten und nach 18 Minuten wird weder Flüssigkeit aufgetragen noch in den Behälter nachgefüllt.

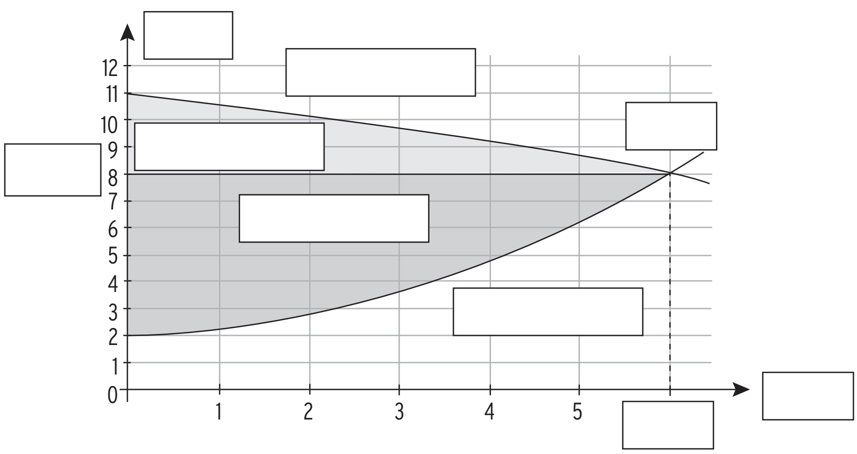
b) Innerhalb der ersten 12 Minuten werden 6428,16 ml Flüssigkeit entnommen.

c) Zu keiner Zeit innerhalb der ersten 24 Minuten wird die Mindestfüllmenge des

Behälters von 500 ml unterschritten.

d) Für ein Eisenteil werden 4 ml dieser Spezialflüssigkeit benötigt. Von Minute 20 bis zur Minute 23 sind insgesamt 121 Eisenteile besprüht worden.

6 Beschriften Sie die Abbildung zum Thema Angebot und Nachfrage.



Erwartungswert und Standardabweichung

1 Es liegt eine binomialverteilte Zufallsvariable vor. Ergänzen Sie die Tabelle.

n	50	50	80		125
p	0,2	0,6		0,5	
μ	$n \cdot p = 10$		40	60	12,5
σ	$\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 2{,}83$				

2 Eine Maschine produziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 % fehlerfreie Schrauben. Bei einer Qualitätskontrolle werden 3 Schrauben überprüft. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl an fehlerfreien Schrauben bei der Qualitätskontrolle an.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert μ der Zufallsvariablen: ____________________

b) μ gibt ____ an.

c) Geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X an.

k	0	1	2	3
P(X = k)				

d) Berechnen Sie μ erneut. Verwenden Sie hierzu jedoch die Wahrscheinlichkeitsverteilung. μ = ____

e) Berechnen Sie die Standardabweichung von X: ____________________

f) σ gibt ____ an.

3 In einem Hallenbad gibt der Eintrittskartenautomat jedem zwölften Besucher eine unbrauchbare Eintrittskarte aus. An einem Samstag Vormittag benutzen 155 Personen den Automat.
X ist die Anzahl der Personen, die eine unbrauchbare Eintrittskarte erhalten.
Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.

μ = ____

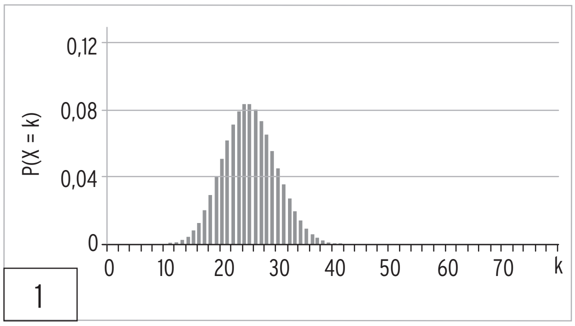
Berechnen Sie $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$: P = ____________________

Interpretieren Sie diese Wahrscheinlichkeit. ____________________

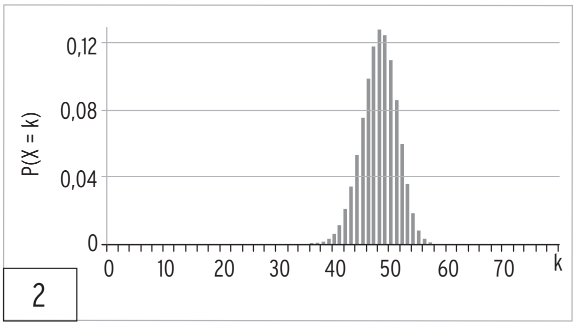
____

4 Vervollständigen Sie die Tabelle. Ordnen Sie dann die Schaubilder zu.

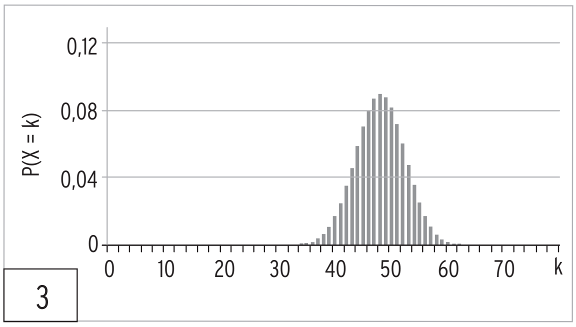
n	250	50	80	60
p	0,1	0,5	0,6	0,8
μ				
σ				
Schaubild				



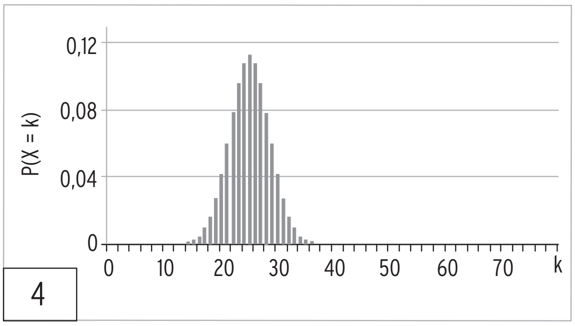
1



2



3



4

5 Ein Glücksrad hat drei farbige Sektoren, die beim einmaligen Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt werden: Rot 20 %; Grün 30 %; Blau 50 %. Das Glücksrad wird n-mal gedreht. Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft die Farbe Rot angezeigt wird.

a) Begründen Sie, dass X binomialverteilt ist.

b) Die Tabelle zeigt einen Ausschnitt der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
P(X = k)	0,01	0,06	0,14	0,21	0,22	0,17	0,11	0,05	

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 3-mal rot angezeigt wird.

Entscheiden Sie, welcher der folgenden Werte von n der Tabelle zugrunde liegen kann: 20, 25 oder 30. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

6 Normalverteilung

1 Die Zufallsgröße X sei ein normalverteiltes Merkmal mit den Parametern $\mu = 80$ und $\sigma = 5$. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten.

a) $P(X \leq 70) =$ b) $P(40 \leq X \leq 90) =$

c) $P(X > 65) =$

d) Berechnen Sie $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$ und vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der Sigmaregel.

2 Vervollständigen Sie den Term, geben Sie die Eigenschaften der normalverteilten Variablen X an und berechnen Sie den Wert des Terms.

a) $P(X \leq 40) = \Phi\left(\frac{\ldots\ldots - 10 + 0{,}5}{3}\right) =$; X ist

b) $P(X \leq \ldots\ldots) = \Phi\left(\frac{370 - 375 + 0{,}5}{3{,}8}\right) =$; X ist

c) $n = 500$; $p = 0{,}9$; $P(X \leq \ldots\ldots) = \Phi\left(\frac{446 - \ldots\ldots + 0{,}5}{\ldots\ldots}\right) =$

X ist

d) $n = 1000$; $P(400 \leq X \leq \ldots\ldots) = \Phi\left(\frac{500 - \ldots\ldots + 0{,}5}{14{,}49}\right) - \Phi\left(\frac{\ldots\ldots - \ldots\ldots - 0{,}5}{14{,}49}\right) =$

X ist

3 Die Hama AG stellt unter anderem in hoher Stückzahl Chips für Laptops her. Aufgrund von technischen Problemen wird davon ausgegangen, dass durchschnittlich 10 % der Chips fehlerhaft sind. Eine Lieferung umfasst 1500 Chips.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Lieferung höchstens 160 Chips fehlerhaft sind.

b) Ermitteln Sie für die Anzahl der fehlerhaften Chips in einer Lieferung eine Obergrenze, die nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 überschritten wird.

5 Lineare Verflechtung

Verflechtungsmatrizen

1 In einem Unternehmen mit einem zweistufigen Produktionsprozess sind die festen Mengenbeziehungen zwischen Rohstoffen, Zwischen- und Endprodukten durch folgende Tabellen gegeben:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	1	2	2
R_2	1	1	3

	E_1	E_2
Z_1	2	5
Z_2	3	1
Z_3	4	4

a) Erläutern Sie die Werte der 2. Spalte der Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix.

b) Bestimmen Sie den Verbrauchan Rohstoffen für eine Produktion von 1 ME E_1 und 1 ME E_2. Erläutern Sie Ihr Ergebnis.

Lösung:

Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $A = A_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Verflechtungsmatrizen

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $B = B_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

a) Die 2. Spalte der Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ besagt:
Für die Produktion einer ME von Z_2 benötigt man 2 ME des Rohstoffs R_1 und 1 ME des Rohstoffs R_2.

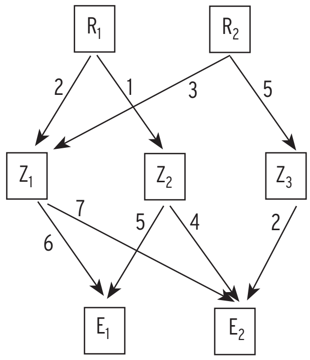
b) $A \cdot B = C = C_{RE} = \begin{pmatrix} 16 & 15 \\ 17 & 18 \end{pmatrix}$

Ergebnis: Für die Produktion von 1 ME E_1 braucht man 16 ME R_1 und 17 ME R_2.
Für die Produktion von 1 ME E_2 braucht man 15 ME R_1 und 18 ME R_2.

Erläuterung: Für die Produktion von 1 ME E_1 braucht man 2 ME Z_1, 3 ME Z_2 und 4 ME Z_3.
Für die Produktion von 1 ME Z_1 braucht man 1 ME R_1 und 1 ME R_2.
Für die Produktion von 1 ME Z_2 braucht man 2 ME R_1 und 1 ME R_2.
Für die Produktion von 1 ME Z_3 braucht man 2 ME R_1 und 3 ME R_2.
Insgesamt braucht man z. B. für 1 ME von E_1 :

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 16$ ME R_1 $\qquad (1 \;\; 2 \;\; 2)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 16$

2 In einem Unternehmen mit einem zweistufigen Produktionsprozess sind die festen Mengenbeziehungen zwischen Rohstoffen, Zwischen- und Endprodukten durch folgenden Graph gegeben:



Der Pfeil z. B. von R_2 nach Z_1, gibt an, dass pro Mengeneinheit (ME) des Zwischenprodukts Z_1 3 ME des Rohstoffs R_2 nötig sind.

Bestimmen Sie den Bedarf an Rohstoffen für eine Produktion von 1 ME E_1 bzw. von 1 ME E_2. Erläutern Sie Ihr Ergebnis.

Lösung:

Verflechtungstabellen:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1			
R_2			

	E_1	E_2
Z_1		
Z_2		
Z_3		

Verflechtungsmatrizen A = B =

A · B = C =

Ergebnis: Man braucht für 1 ME E_1 _____ ME von R_1 und _____ ME von R_2

und für 1 ME E_2 _____ ME von R_1 und _____ ME von R_2 .

Erläuterung:

8 Lineare Optimierung

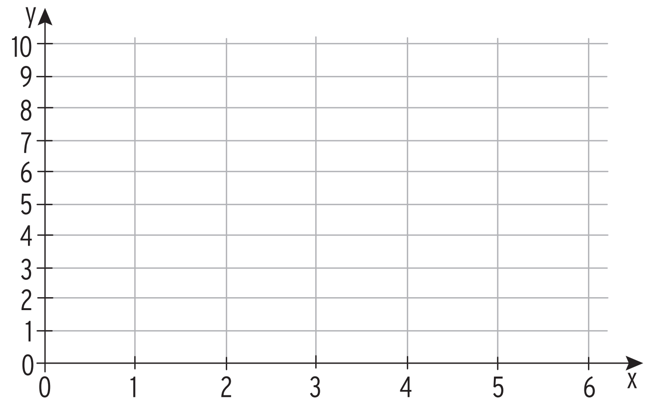
Grafische Lösung

1 Zeichnen Sie den zugehörigen Lösungsraum:

a) $x \geq 0$; $y \geq 0$

$y \leq -2x + 8$

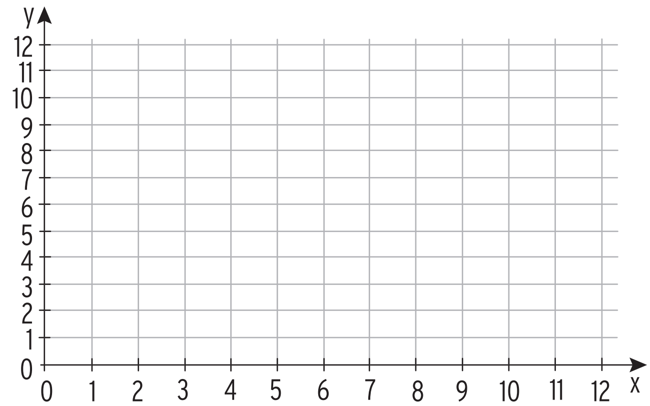
$y \leq 3x$



b) $0 \leq x \leq 10$; $y \geq 0$

$y \leq -x + 12$

$y \leq 3 + 0{,}5x$

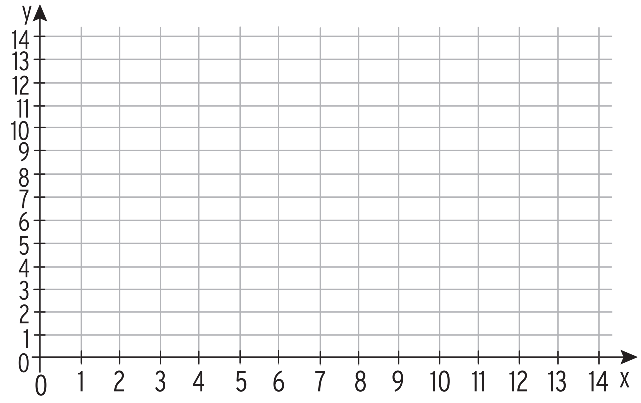


c) $x \geq 0$; $y \geq 0$

$y \leq x + 3$

$y \leq 12 - x$

$y \leq 24 - 3x$



I Differenzialrechnung

1 Grafisches Differenzieren

1 Zeichnen Sie das Schaubild der 1. Ableitungsfunktion.

Abb. 1

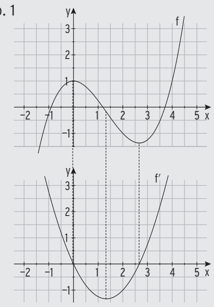
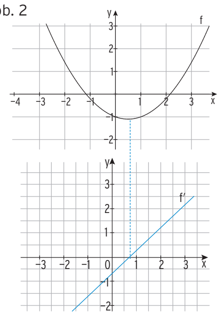
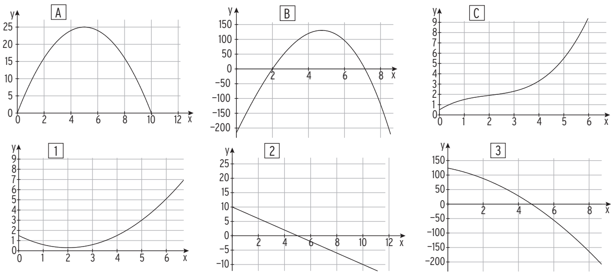


Abb. 2



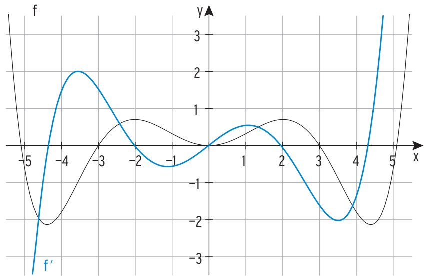
2 Die Abbildungen zeigen die Schaubilder einer Kostenfunktion, einer Erlösfunktion, einer Gewinnfunktion und die Schaubilder der zugehörigen Ableitungsfunktionen. Ordnen Sie zu und begründen Sie.



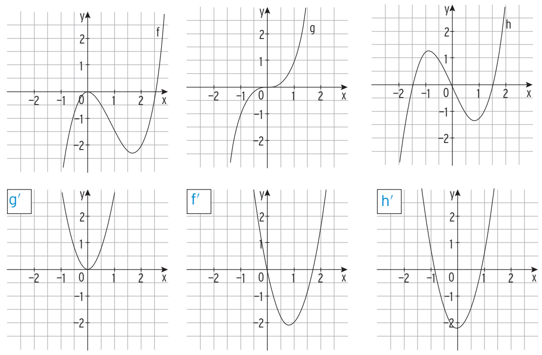
Zuordnung: A (Erlös) → 2; B (Gewinn) → 3; C(Kosten) → 1

Begründung: z.B.: In x = 5 hat der Graph in A eine waagrechte Tangente; f′(5) = 0
In x = 0 hat der Graph in B die größte Steigung von ca. 120 GE/ME.
Der Graph in C hat nur positive Steigungen. Der Graph in (1) verläuft oberhalb der x-Achse.

3 Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f. Skizzieren Sie das Schaubild ihrer Ableitungsfunktion in das untenstehende Koordinatensystem.



4 Die Abbildungen zeigen die Graphen der Funktionen f, g und h und die Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktionen. Ordnen Sie zu und begründen Sie.

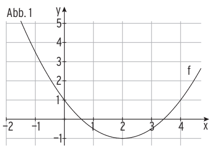


Begründung: z.B.: der Graph von g hat keine negativen Steigungen; der Graph von g′ verläuft nicht unterhalb der x-Achse. In x = 0: f hat die Steigung 0; f′(0) = 0;
In x = 0: h hat die negative Steigung − 2,3 ; h′(0) = − 2,3.

2 Extrem-und Wendepunkte

Monotonie und Extrempunkte

1 Bestimmen Sie die Monotoniebereiche von f mithilfe der Abbildung.



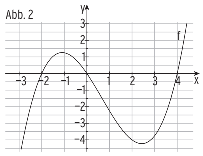


Abb. 1: mon. wachsend für $x \geq 2$
mon. fallend für $x \leq 2$

Abb. 2: mon. wachsend für $x \leq -1{,}2$
oder $x \geq 2{,}5$;
mon. fallend für $-1{,}2 \leq x \leq 2{,}5$

2 Zeigen Sie, f mit $f(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 256$; $x \in \mathbb{R}$, ist monoton wachsend.

Ableitung: $f'(x) = 3x^2 - 24x + 60$

$f'(x) = 0$ $x^2 - 8x + 20 = 0$ hat wegen $D = 4^2 - 20 < 0$ keine Lösung

Wegen $f'(1) = 39 > 0$ ist f monoton wachsend.

3 Gegeben ist die Funktion f. Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f.

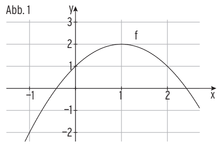
$f(x) = 2x^2 - 2x^3 + 1$; $x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 4x - 6x^2$; $f''(x) = 4 - 12x$ Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$ $4x - 6x^2 = 0$ Ausklammern: $x(4 - 6x) = 0$ Satz vom Nullprodukt: $x = 0 \vee 4 - 6x = 0$ Stellen mit waagrechter Tangente: $x = 0 \vee x = \frac{2}{3}$ Mit $f''(0) = 4 > 0$ und $f(0) = 1$: $T(0 \mid 1)$ Mit $f''(\frac{2}{3}) = -4 < 0$ und $f(\frac{2}{3}) = \frac{35}{27}$: $H(\frac{2}{3} \mid \frac{35}{27})$
$f(x) = x^3 - 3x - 1$; $x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$ Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$ $3x^2 - 3 = 0$ $x^2 = 1$ Stellen mit waagrechter Tangente: $x = -1 \vee x = 1$ Mit $f''(1) = 6 > 0$ und $f(1) = -3$: $T(1 \mid -3)$ Mit $f''(-1) = -6 < 0$ und $f(-1) = 1$: $H(-1 \mid 1)$

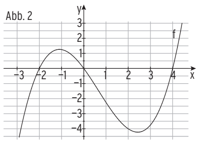
4 Gegeben ist die Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E. Füllen Sie die Tabelle aus.

Kostenfunktion K Erlösfunktion E	$K(x) = x^3 - 4x^2 + 19x + 18$ $E(x) = 30x$	$K(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 41$ $E(x) = -9x^2 + 72x$
Gewinnfunktion	$G(x) = -x^3 + 4x^2 + 11x - 18$	$G(x) = -x^3 + 42x - 41$
Variable Stückkosten-funktion	$k_v(x) = x^2 - 4x + 19$	$k_v(x) = x^2 - 9x + 30$
Stückkostenfunktion	$k(x) = x^2 - 4x + 19 + \frac{18}{x}$	$k(x) = x^2 - 9x + 30 + \frac{41}{x}$
Gewinnmaximum	$G'(x) = -3x^2 + 8x + 11 = 0$ $x_1 = 3{,}67$; $(x_2 = -1 < 0)$ $G''(x) = -6x + 8$ $G''(3{,}67) < 0$ Gewinnmaximum: $G(3{,}67) = 26{,}81$	$G'(x) = -3x^2 + 42 = 0$ $x_1 = \sqrt{14} = 3{,}74$; $(x_2 = -\sqrt{14} < 0)$ $G''(x) = -6x$ $G''(3{,}74) < 0$ Gewinnmaximum: $G(3{,}74) = 63{,}77$
Betriebsminimum; kurzfristige Preisuntergrenze	$k'_v(x) = 2x - 4 = 0$ $x_1 = 2$ $k''_v(x) = 2 > 0$ $x_1 = 2$ Minimalstelle (x_{BM}) $k_v(2) = 15$ kurzfristige Preisuntergrenze	$k'_v(x) = 2x - 9 = 0$ $x_1 = 4{,}5$ $k''_v(x) = 2 > 0$ $x_1 = 4{,}5$ Minimalstelle (x_{BM}) $k_v(4{,}5) = 9{,}75$ kurzfristige Preisuntergrenze
Zeigen Sie: Das Betriebsoptimum liegt bei x_{BO}. Langfristige Preisuntergrenze	$x_{BO} = 3$ $k'(x) = 2x - 4 - \frac{18}{x^2}$ $k'(3) = 6 - 4 - 2 = 0$ $k''(x) = 2 + \frac{36}{x^3}$; $k''(3) > 0$ $x_{BO} = 3$ $k(3) = 22$ Langfristige Preisuntergrenze	$x_{BO} \approx 5{,}25$ $k'(x) = 2x - 9 - \frac{41}{x^2}$ $k'(5{,}25) = 10{,}5 - 9 - 1{,}49 = 0{,}01$ $k'(5{,}25) \approx 0$ $k''(x) = 2 + \frac{82}{x^3}$; $k''(5{,}25) > 0$ $x_{BO} = 5{,}25$ $k(5{,}25) = 18{,}12$ Langfristige Preisuntergrenze

Krümmung und Wendepunkte

1 Bestimmen Sie die Krümmungsbereiche des Graphen von f mithilfe der Abbildung.





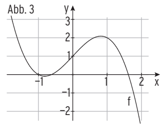


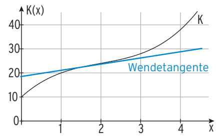
Abb. 1: Rechtskurve für $x \in \mathbb{R}$ Abb. 2: Rechtskurve für $x < 1$ Linkskurve für $x > 1$ Abb. 3: Rechtskurve für $x > 0$ Linkskurve für $x<0$

2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$; $x \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Krümmung.

Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 4x - 3$; $f''(x) = 6x - 4$; $f'''(x) = 6 \neq 0$
$f''(x) = 0$ für $x = \frac{2}{3}$ einzige einfache Lösung, also mit VZW (Krümmungswechsel)
Wegen $f''(0) = -4$ ist der Graph von f für $x < \frac{2}{3}$ rechtsgekrümmt; für $x > \frac{2}{3}$ linksgekrümmt;

3 Gegeben ist die Kostenfunktion K mit $K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 10$; $x \geq 0$.

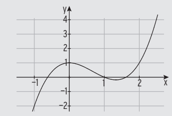
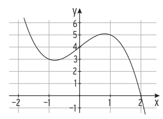
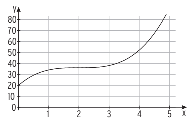
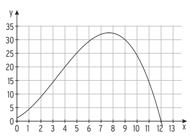
a) Zeigen Sie, das Schaubild von K hat keinen Extrempunkt.
Bed.: $K'(x) = 3x^2 - 12x + 15 = 0$
$x^2 - 4x + 5 = 0$
keine Lösung wegen $D = 4 - 5 = -1 < 0$
Der Graph von K hat keinen Extrempunkt.



b) Geben Sie den Bereich an, auf dem K degressiv wächst.
$K''(x) = 6x - 12$; $K'''(x) = 6 \neq 0$
Bed.: $K''(x) < 0$
Wendestelle: $K''(x) = 0$ $\quad 6x - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow x = 2$
Mit $K'''(x) \neq 0$ ist $x_1 = 2$ Wendestelle.
Mit $K''(1) = -6 < 0$ gilt: $\quad K''(x) < 0$ für $0 < x < 2$
K wächst degressiv für $0 < x < 2$.
Hinweis: Für $x > 2$ wächst K progressiv.

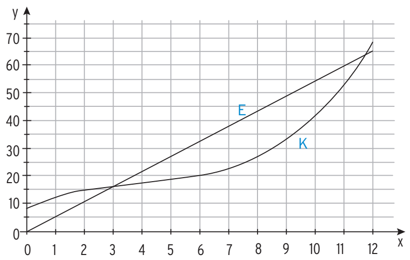
c) Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente. Zeichnen Sie diese Tangente ein.
$K'(2) = 3 = m$; $K(2) = 24$ einsetzen in $y = mx + b$: $24 = 3 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 18$
Gleichung der Wendetangente: $y = 3x + 18$

4 Gegeben ist eine Funktion. Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Schaubildes der gegebenen Funktion.

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$; $x \in \mathbb{R}$ 	$f'(x) = 3x^2 - 4x$; $f''(x) = 6x - 4$; $f'''(x) = 6$ Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$ $\quad 6x - 4 = 0$ Auflösen nach x: $\quad x = \frac{2}{3}$ Mögliche Wendestelle: $\quad x_1 = \frac{2}{3}$ Mit $f'''(\frac{2}{3}) = 6 \neq 0$ und $f(\frac{2}{3}) = \frac{11}{27}$: $\quad W(\frac{2}{3} \mid \frac{11}{27})$
$f(x) = -x^3 + 2x + 4$; $x \in \mathbb{R}$ 	$f'(x) = -3x^2 + 2$; $f''(x) = -6x$; $f'''(x) = -6$ Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$ $\quad -6x = 0$ Auflösen nach x: $\quad x = 0$ Mögliche Wendestelle: $\quad x_1 = 0$ Mit $f'''(0) = -6 \neq 0$ und $f(0) = 4$: $\quad W(0 \mid 4)$
$K(x) = 2x^3 - 12x^2 + 24x + 20$; $x \in \mathbb{R}_+$ 	$K'(x) = 6x^2 - 24x + 24$; $K''(x) = 12x - 24$; $K'''(x) = 12$ Notwendige Bedingung: $K''(x) = 0$ $\quad 12x - 24 = 0$ Auflösen nach x: $\quad x = 2$ Mögliche Wendestelle: $\quad x_1 = 2$ Mit $K'''(2) = 12 \neq 0$ und $K(2) = 36$: $\quad W(2 \mid 36)$
$A(x) = -0{,}1x^3 + x^2 + 2{,}3x + 1{,}2$; $x \in \mathbb{R}_+$ 	$A'(x) = -0{,}3x^2 + 2x + 2{,}3$; $A''(x) = -0{,}6x + 2$ $A'''(x) = -0{,}6 \neq 0$ Notwendige Bedingung: $A''(x) = 0$ $\quad -0{,}6x + 2 = 0$ Auflösen nach x: $\quad x = \frac{10}{3}$ Mögliche Wendestelle: $\quad x_1 = \frac{10}{3} = 3{,}33$ Mit $A'''(x) \neq 0$ ist x_1 Wendestelle. $A(3{,}33) = 16{,}27$: $\quad W(3{,}33 \mid 16{,}27)$

3 Kurvenuntersuchung

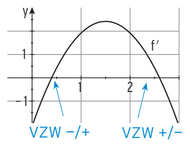
1 Die Abbildung zeigt den Graph einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion und einer Erlösfunktion.



Beschreiben Sie den Verlauf der beiden Graphen, indem Sie den Lückentext mit folgenden Begriffen sinnvoll ergänzen:
steigen, steigend, monoton, degressiv, progressiv, Wendepunkt, linksgekrümmt, Rechtskrümmung, zu, geringer, geringsten, maximal, Fixkosten, Kapazitätsgrenze, ökonomisch sinnvollen, Gewinnschwelle, größten, 3, 8

Der Graph der Gesamtkostenfunktion K mit $K(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 5x + 8$ verläuft im ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich $D_{ök} = [0; 12]$ steigend, d.h. mit zunehmender Produktionsmenge steigen die Gesamtkosten. 12 ist die Kapazitätsgrenze. Der Graph beginnt in (0 | 8). Dies entspricht den Fixkosten in Höhe von 8 GE. Bis zu einer Produktionsmenge von 4 ME steigt der Graph degressiv an. Es liegt eine Rechtskrümmung vor, d.h. die Gesamtkosten nehmen zu, aber diese Zunahme wird geringer. Bei einer Produktion von genau 4 ME steigen die Gesamtkosten am geringsten, hier liegt ein Wendepunkt vor. Danach verlaufen die Gesamtkosten progressiv steigend, die Gesamtkostenkurve ist linksgekrümmt.
Die Schnittstelle von Kostenkurve und Erlösgerade liegt bei 3 ME und wird als Gewinnschwelle bezeichnet. Bei etwa 8 ME ist der Abstand der y-Werte von K und E am größten, der Gewinn wird hier maximal.

2 Die Abbildung zeigt das Schaubild der 1. Ableitungsfunktion einer Funktion f. Begründen Sie mithilfe der Zeichnung, dass das Schaubild von f einen Hoch-, einen Tief- und einen Wendepunkt mit positiver Steigung besitzt.



Das Schaubild von f′ schneidet die x-Achse zweimal mit VZW, also hat das Schaubild von f einen Tief- und einen Hochpunkt. Das Schaubild von f′ hat einen Hochpunkt oberhalb der x-Achse, also hat das Schaubild von f einen Wendepunkt mit positiver Steigung.

3 Vervollständigen Sie folgende Aussagen.

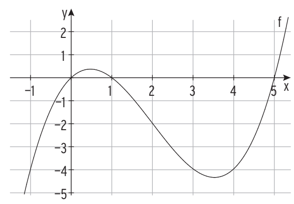
a) Eine Polynomfunktion 3. Grades hat höchstens drei Extremstellen, denn ihre Ableitung ist vom Grad drei.

b) Die Funktion f mit $f(x) = x^3 + 2$; $x \in \mathbb{R}$, ist wachsend, denn ihre Ableitung ist stets positiv.

4 Gegeben ist der Graph der Funktion f. Tragen Sie die wichtigen Punkte ein und lesen Sie die Koordinaten ab. Skizzieren Sie das Schaubild der 1. Ableitung. Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung die Bereiche, in denen das Schaubild der Funktion f steigend ist bzw. rechtsgekrümmt ist.

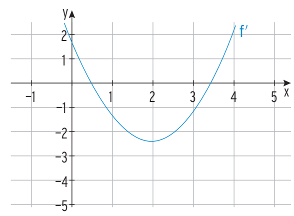
Wichtige Punkte:

H(0,5 | 0,3);
T(3,5 | −4,3); W (2 | − 2)



Der Graph von f ist steigend für

$x \leq 0{,}5 \vee x \geq 3{,}5$



Der Graph von f ist rechtsgekrümmt für

$x < 2$