Ott
Schomburg

Abitur 2023

Aufgabensammlung zur zentralen schriftlichen Abiturprüfung
Berlin/Brandenburg

Mathematik

grundlegendes Anforderungsniveau – Grundkurs

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Wolfgang Schomburg
Studium der Mathematik an der Technischen Universität zu Berlin

* * * * *

5. Auflage 2022

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0635-05
ISBN 978-3-8120-0635-4

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung für Berlin und Brandenburg enthält auf die **neue Prüfungsordnung** für die gymnasiale Oberstufe abgestimmte Aufgaben zur Vorbereitung auf die schriftliche Abiturprüfung 2023 im Fach Mathematik.

Der aktuellen Entwicklung geschuldet ist eine veränderte Struktur der schriftlichen Prüfungsklausuren für das Fach Mathematik im Abitur 2023:

- Der Umfang der Prüfungsklausuren bleibt unverändert. Im Grundkursfach müssen Aufgaben im Umfang von 100 Bewertungseinheiten (BE) bearbeitet werden.
- Der Anteil des hilfsmittelfreien Aufgabenteils bleibt unverändert bei 25 % der BE.
- Die Bearbeitungszeiten bleiben unverändert bei 285 Minuten (Gk), jeweils einschließlich Lese- und Auswahlzeit.

Verändert werden der Auswahlmodus und der Umfang der einzelnen Aufgaben zu den Sachgebieten. Der Auswahlmodus enthält nun eine vorgeschaltete **„Auswahl durch die unterrichtende Lehrkraft".** Dadurch werden das thematische Spektrum der zu bearbeitenden Aufgaben und die Auswahlmöglichkeiten für die Schülerinnen und Schüler beschränkt.

Die zentrale Abiturprüfung ab 2019 besteht aus zwei Teilen, einem hilfsmittelfreien Prüfungsteil (ohne Formelsammlung, Taschenrechner) und einem Prüfungsteil mit Hilfsmittel (Formelsammlung und Taschenrechner).
Die Aufgaben für den **Grundkurs** bzw. das grundlegende Anforderungsniveau sind gegliedert nach den Prüfungsgebieten: Analysis, Stochastik und Analytische Geometrie.
Der erste Teil der Aufgabensammlung bietet eine Vielzahl von Übungsaufgaben zum neuen hilfsmittelfreien Teil der Abiturprüfung auf grundlegendem Niveau.
Für den zweiten Teil wurden die Originalprüfungsaufgaben der Jahre 2015 bis 2018 mit einer Aufgabenstellung 1 ergänzt, die ohne Hilfsmittel bearbeitet werden muss.
Die zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019 enthält eine Aufgabenstellung 1, einen hilfsmittelfreien Teil. Die Abituraufgaben ab 2019 werden in der Aufgabensammlung im Original behandelt und ausführlich gelöst.
Diese Einteilung nach Prüfungsgebieten ermöglicht ein gezieltes Üben.
Die Aufgaben sind als Übungsaufgaben zu verstehen, im Umfang und in den Fragestellungen. Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.
Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.
Da die Aufgabensammlung allen Schüler/innen bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben.
An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.
Autor und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Veränderte Struktur der schriftlichen Prüfungs klausuren im Abitur 2023

Grundlegendes Anforderungsniveau - Grundkurs
Die insgesamt zu erreichenden 100 Bewertungseinheiten verteilen sich folgendermaßen auf die beiden Prüfungsteile und die drei Sachgebiete:
Aufgabenstellung 1 (Hilfsmittelfreier Aufgabenteil): 25 BE (75 Minuten)
Das Aufgabenset für SuS enthält 3 Aufgaben zur Analysis (je 5 BE) und zwei Aufgaben (je 5 BE) zu einem Sachgebiet (Stochastik oder Analytische Geometrie)
Aufgabenstellung 2 (komplexe Aufgaben zu den Sachgebieten: 75 BE (210 Minuten)
Das Aufgabenset für SuS enthält **2** Aufgaben zur Analysis (je 45 BE) und **eine** Aufgabe (30 BE) zu einem Sachgebiet (Stochastik oder Analytische Geometrie)

<table>
<tr><th></th><th>Vorbereitete Prüfungsaufgaben</th><th>Auswahl durch die Lehrkraft</th><th>Aufgabenset für die SuS</th><th>Wahl durch die SuS</th><th>BE/Zeit</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Aufgabenstellung 1 (Hilfsmittelfreier Aufgabenteil)</td><td>3 Aufgaben zur Analysis (je 5 BE)</td><td>keine</td><td>3 Aufgaben zur Analysis</td><td rowspan="3">keine</td><td rowspan="3">25 BE
(75 Minuten)</td></tr>
<tr><td>2 Aufgaben zur Analytische Geometrie (je 5 BE)</td><td rowspan="2">2 Aufgaben zu einem Sach-gebiet</td><td rowspan="2">2 Aufgaben zu einem anderen Sachgebiet</td></tr>
<tr><td>2 Aufgaben zur Stochastik (je 5 BE)</td></tr>
<tr><td>Aufgabenstellung 2</td><td>2 Aufgaben zur Analysis 45 BE</td><td>keine</td><td>2 Aufgaben zur Analysis</td><td>1 Aufgabe muss aus-gewählt werden</td><td rowspan="3">45 BE
+
30 BE
(210 Minuten einschl. Aus-wahlzeit)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Aufgabenstellung 3 (komplexe Aufgaben zu den Sachgebieten)</td><td>1 Aufgabe zur Analytische Geometrie 30 BE</td><td rowspan="2">1 Aufgabe zu einem Sach-gebiet</td><td rowspan="2">1 Aufgabe zu einem anderen Sachgebiet</td><td rowspan="2">keine</td></tr>
<tr><td>1 Aufgabe zur Stochastik 30 BE</td></tr>
</table>

Die Gesamtbearbeitungszeit beträgt 285 Minuten. Sie beinhaltet eine individuelle Lese- und Auswahlzeit für die Prüflinge, die 30 Minuten nicht überschreiten sollte.
Die Abiturprüfung beginnt mit der Bearbeitung der Aufgabenstellung 1 zum hilfsmittelfreien Teil in einem Umfang von maximal 75 Minuten. Die Lösungen der Aufgaben aus diesem Teil der Prüfung werden nach 75 Minuten abgegeben.
Prüflinge, die für die Aufgabe 1 weniger Zeit benötigen, können bereits mit der Bearbeitung der weiteren Wahlaufgaben beginnen, vorerst ohne die Nutzung von Hilfsmitteln.
Nach der **vollständigen Abgabe der Lösungen der Aufgabe 1** durch alle Prüflinge beginnt mit der Nutzung von Formelsammlung und Rechner die weitere Arbeit an den Aufgaben.

Hinweis für das Abitur 2023: *Wenn eine Schule sich z.B. für Vektorgeometrie und gegen Stochastik entschieden hat, dann fliegt die Stochastik aus dem hilfsmittelfreien Teil und aus den weiteren Aufgabenstellungen heraus! In der Aufgabensammlung werden die beiden Gebiete jedoch gleichwertig behandelt.*

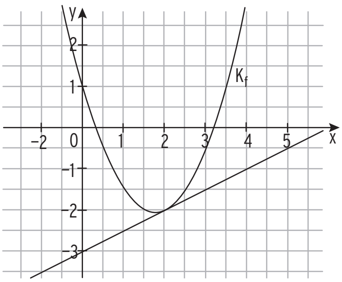
I Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

Übungsaufgaben zur Aufgabenstellung 1 Analysis

Lösungen Seite 22/23

Aufgabe 1

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f.
Ermitteln Sie einen möglichen Funktionsterm.



Aufgabe 2

Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 4$ besitzt einen Wendepunkt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt.

Aufgabe 3

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung. Der Punkt $H(1 \mid 1)$ ist der Hochpunkt des Schaubilds.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabe 4

K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^{x-3} - 2$.
Die Tangente an K an der Stelle $x = 3$ schneidet die Asymptote von f in S.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{2} (x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)\,dx$.
Interpretieren Sie den Integralwert mithilfe geeigneter Flächenstücke.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 2x$.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

Aufgabe 7 **Lösungen Seite 24/25**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4e^{2x} - 2$.

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(0{,}5) = -1$.

Aufgabe 8

Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:

(1) $f(0) = 1$ (2) $f'(0) = 0$

(3) $f''(1) = 0$ und $f'''(1) \neq 0$ (4) $f'(1) = -1$

Beschreiben Sie für jede dieser vier Eigenschaften, welche Bedeutung sie für den Graphen von f hat. Skizzieren Sie eine möglichen Verlauf des Graphen.

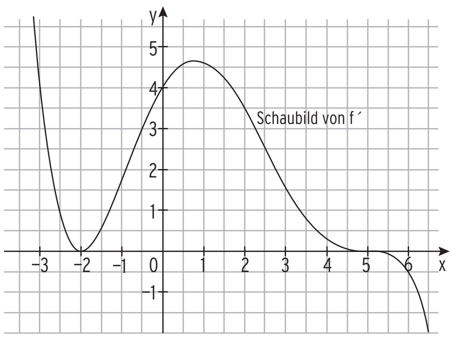
Aufgabe 9

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$.

Aufgabe 10

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f′ einer Funktion f. Geben Sie für jeden der folgenden Sätze an, ob er richtig, falsch oder nicht entscheidbar ist. Begründen Sie jeweils ihre Antwort.

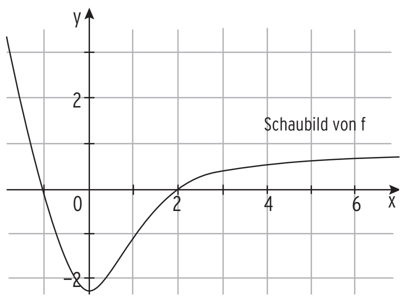
1. Das Schaubild von f hat bei $x = -2$ einen Tiefpunkt.
2. Das Schaubild von f hat für $-3 \leq x \leq 6$ genau zwei Wendepunkte.
3. Das Schaubild von f verläuft im Schnittpunkt mit der y-Achse steiler als die erste Winkelhalbierende
4. $f(0) > f(5)$



Aufgabe 11

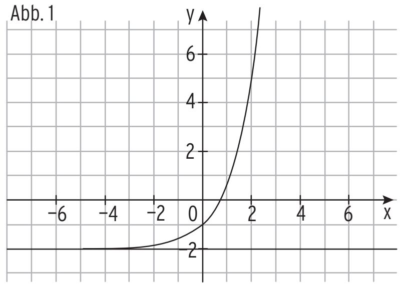
Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f. F ist eine Stammfunktion von f.

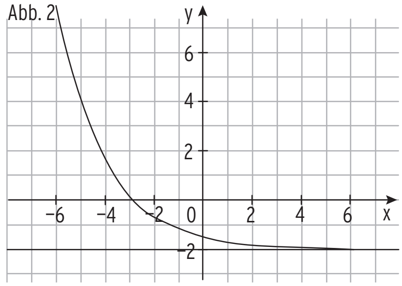
a) Machen Sie Aussagen über F im Bereich $-2 < x < 7$ hinsichtlich Extremstellen, Wendestellen, Nullstellen. Begründen Sie Ihre Antworten.
b) Begründen Sie, dass $F(6) - F(2) > 1$ gilt.
c) Bestimmen Sie näherungsweise: $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

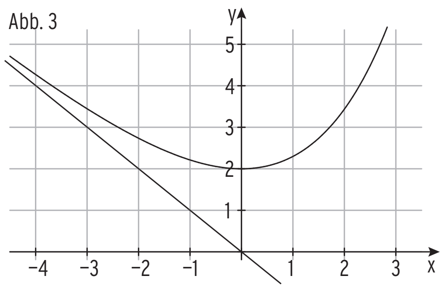


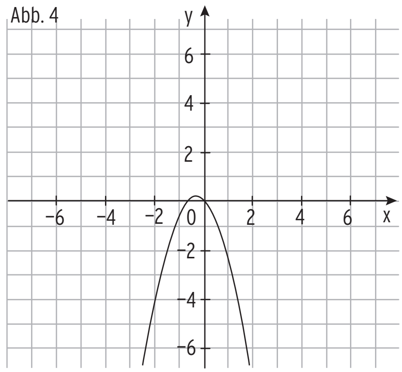
Aufgabe 12 **Lösungen Seite 25**

Gegeben sind die Schaubilder von vier Funktionen, jeweils mit sämtlichen Asymptoten:









Drei dieser vier Schaubilder werden beschrieben durch die Funktionen f, g und h mit $f(x) = ae^{0,5x} - x$, $g(x) = -2 + be^{-0,5x}$, $h(x) = cx^2 - x$

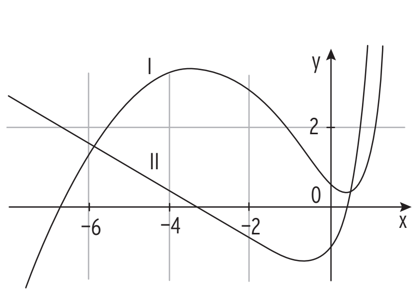
a) Ordnen Sie den Funktionen f, g und h das jeweils passende Schaubild zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

b) Bestimmen Sie die Werte für a, b und c.

Aufgabe 13

Die Abbildung zeigt die Graphen einer Funktion und der zugehörigen Ableitungsfunktion. Entscheiden Sie, welcher der Graphen I und II die Ableitungsfunktion darstellt.

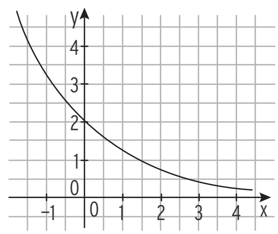
Begründen Sie Ihre Entscheidung.



Aufgabe 56 **Lösungen Seite 34/35**

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$.

Für die erste Ableitungsfunktion f′ von f gilt $f'(x) = -e^{-\frac{1}{2}x}$.



a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f in seinem Schnittpunkt mit der y-Achse.

b) Zeichnen Sie in die Abbildung ein Flächenstück ein, das vom Graphen von f, der x-Achse, der y-Achse sowie einer zur y-Achse parallelen Geraden eingeschlossen wird und dessen Flächeninhalt etwa 1,5 beträgt. Geben Sie einen Term an, mit dem der Inhalt des von Ihnen eingezeichneten Flächenstücks berechnet werden kann.

Aufgabe 57

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \rightarrow x^3 + 2x^2$.

a) Bestätigen Sie, dass $x_1 = -2$ und $x_2 = 0$ die einzigen Nullstellen von f sind.

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

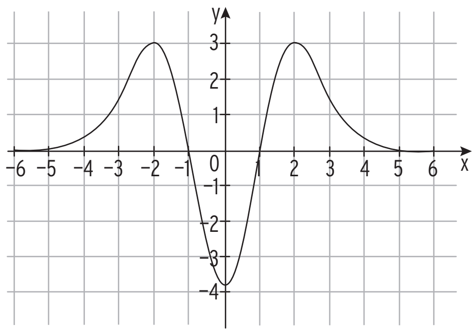
Aufgabe 58

Geben Sie die Nullstellen des Polynoms p mit $p(x) = x^3 - 100x$; $x \in \mathbb{R}$ an. 4

Erstellen Sie ohne weitere Rechnung eine Skizze des Schaubilds von p.

Aufgabe 59

Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds der Funktion s. 5



Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie.

(1) Es gilt: $s''(4) < 0$.

(2) Das Schaubild der Ableitungsfunktion s′ von s besitzt für $0 < x < 2$ einen Hochpunkt.

(3) Der Wert von $\int_0^4 s(x)\,dx$ ist größer als 0.

Lösungen – Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

Lösungen – **Analysis Übungsaufgaben**

Aufgabe 1 *Lösung der Aufgaben Seite 8*

Man liest ab: Parabel von f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$; $f'(x) = 2ax + b$

Die Gerade hat die Steigung $m = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Bedingungen und LGS: $f(0) = 1$ $c = 1$

$f(2) = -2$ $4a + 2b + c = -2$

$f'(2) = \frac{1}{2}$ $4a + b = \frac{1}{2}$

Einsetzen von c = 1: $4a + 2b + 1 = -2$ $4a + 2b = -3$

$4a + b = \frac{1}{2}$ $| \cdot (-1)$

Addition ergibt: $b = -3{,}5$

Einsetzen in z. B. $4a + b = \frac{1}{2}$ ergibt $a = 1$

Möglicher Funktionsterm $f(x) = x^2 - 3{,}5x + 1$

Aufgabe 2

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 4$ besitzt einen Wendepunkt.

Ableitungen: $f'(x) = -3x^2 + 6x - 1$; $f''(x) = -6x + 6$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ $-6x + 6 = 0$ für $x = 1$

Mit $f'''(x) = -6 \neq 0$ ist $x = 1$ Wendestelle.

Ansatz für die Tangente: $y = mx + b$

Mit $f(1) = -3$ und $f'(1) = 2 = m$

erhält man $-3 = 1 \cdot 2 + b$ und damit $b = -5$

Tangente in $W(1 \mid -3)$: $y = 2x - 5$

Aufgabe 3

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen: $f(0) = 0$ $d = 0$

$f'(0) = 0$ $c = 0$ Ursprung ist Berührpunkt

$H(1 \mid 1)$ der Hochpunkt: $f(1) = 1$ $a + b + c + d = 1$

$f'(1) = 0$ $3a + 2b + c = 0$

c und d eingesetzt: $a + b = 1$ $|\cdot 3$
$3a + 2b = 0$ $|\cdot (-1)$

Additionsverfahren: $b = 3$

Einsetzen in $a + b = 1$ ergibt $a = -2$

Funktionsterm: $f(x) = -2x^3 + 3x^2$

Aufgabe 4 *Lösung der Aufgaben Seite 8*

$f(x) = e^{x-3} - 2$

Ableitung: $f'(x) = e^{x-3}$

Ansatz für die Tangente: $y = mx + c$

Mit $f(3) = -1$ ($e^0 = 1$) und $f'(3) = 1 = m$

erhält man $-1 = 1 \cdot 3 + c \Rightarrow b = -4$

Tangente in $P(3 \mid -1)$: $y = x - 4$

Schnitt von Tangente und der

Asymptote: $y = -2$ $\quad -2 = x - 4 \Rightarrow x = 2$

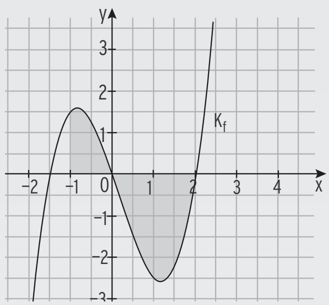
Koordinaten des Schnittpunktes: $S(2 \mid -2)$

Aufgabe 5

$$\int_{-1}^{2} (x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{2} = -2{,}25$$

Hinweis: f hat eine einfache Nullstelle ($x_1 = 0$) zwischen den Integralgrenzen − 1 und 2, also handelt es sich um eine Fläche oberhalb und eine unterhalb der x-Achse (Flächenbilanz).

Das Flächenstück zwischen dem Graphen von f und der x-Achse oberhalb der x-Achse ist um 2,25 kleiner als das Flächenstück zwischen dem Graphen von f und der x-Achse unterhalb der x-Achse.



Aufgabe 6

Schnittstellen von f und g durch

Gleichsetzen: $f(x) = g(x)$ $\quad -x^2 + 3 = 2x$

Nullform: $\quad x^2 + 2x - 3 = 0$

Lösung mit $x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ $\quad x_{1|2} = -1 \pm \sqrt{1 + 3}$

Schnittstellen = Integrationsgrenzen: $\quad x_1 = -3;\ x_2 = 1$

Integration von − 3 bis 1 über f(x) − g(x): $\quad \int_{-3}^{1} (f(x) - g(x))dx$

$$= \int_{-3}^{1} (-x^2 + 3 - 2x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x - x^2\right]_{-3}^{1}$$

obere Grenze − untere Grenze $\quad = -\frac{1}{3} + 3 - 1 - \left(-\frac{1}{3}(-3)^3 + 3(-3) - (-3)^2\right)$

$$= \frac{32}{3}$$

Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche beträgt $\frac{32}{3}$.

Aufgabe 7 *Lösung der Aufgaben Seite 9*

$f(x) = 4e^{2x} - 2$

Stammfunktion: $F(x) = 2e^{2x} - 2x + c;\ c \in \mathbb{R}$

Bedingung für c: $F(0{,}5) = -1$: $F(0{,}5) = 2e^{1} - 1 + c = -1 \Leftrightarrow c = -2e$

Gesuchte Stammfunktion: $F(x) = 2e^{2x} - 2x - 2e$

Aufgabe 8

Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:

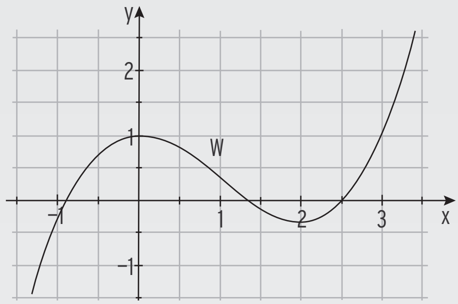
(1) $f(0) = 1$ — Der Graph von f verläuft durch (0 | 1)

(2) $f'(0) = 0$ — Der Graph von f hat in x = 0 eine waagrechte Tangente

(3) $f''(1) = 0$ und $f'''(1) \neq 0$ — Der Graph von f hat in x = 1 eine Wendestelle.

(4) $f'(1) = -1$ — Die Steigung im WP ist negativ, (0| 1) ist ein Hochpunkt.

Möglicher Verlauf des Graphen:



Aufgabe 9

Ableitung von f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$ mit der Produktregel

Mit $u(x) = 2x^2 + 5 \Rightarrow u'(x) = 4x$

und $v(x) = e^{-2x} \Rightarrow v'(x) = -2e^{-2x}$

folgt durch Einsetzen in $f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$:

$f'(x) = (2x^2 + 5) \cdot (-2e^{-2x}) + e^{-2x} \cdot 4x$

Zusammenfassen durch Ausklammern: $f'(x) = e^{-2x}\left((2x^2 + 5) \cdot (-2) + 4x\right)$

Erste Ableitung von f: $f'(x) = e^{-2x}\left(-4x^2 - 10 + 4x\right)$

$f'(x) = e^{-2x}\left(-4x^2 + 4x - 10\right)$

Aufgabe 10

1. $f'(-2) = 0$
   falsch; $f'(x)$ wechselt bei $x = -2$ das Vorzeichen nicht.
2. wahr: Das Schaubild von f' hat für $-3 \leq x \leq 6$ genau zwei Extrempunkte.
3. erste Winkelhalbierende mit Steigung $m = 1$
   wahr: $f'(0) = 4 > 1$
4. falsch: $f'(x) > 0$ für $-2 < x < 5$, also ist f wachsend

Übungsaufgaben zur Aufgabenstellung 1 **Analytische Geometrie**

Aufgabe 1 **Lösungen Seite 69**

1 Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

Stellen Sie die Gerade g in einem räumlichen Koordinatensystem dar.

Beschreiben Sie die Lage von g im Raum.

2 Untersuchen Sie die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems

$x_1 + 4x_2 + x_3 = 2$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$

$x_1 + x_2 + x_3 = 2$

Aufgabe 2

1 Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie, ob es einen Punkt auf g gibt, dessen drei Koordinaten identisch sind.

b) Die Gerade h verläuft orthogonal zu g und durch Q(8 | 5 | 10).

Bestimmen Sie eine Gleichung von h.

2 Gegeben ist die Ebene E: $4x + 4y + 7z = 28$.

Es gibt zwei zu E parallele Ebenen F und G, die vom Ursprung den Abstand 2 haben.

Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung von F und G.

Aufgabe 3 **Lösungen Seite 70**

1 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(1 | 2 | 5), B(2 | 7 | 8) und C(− 3 | 2 | 4) gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass A, B und C Eckpunkte eines Dreiecks sind.

b) Für jede reelle Zahl a ist ein Punkt $D(a \mid 2 + a\sqrt{2} \mid 5 + \sqrt{2})$ gegeben. Bestimmen Sie alle Werte von a, für die die Strecke von A nach D die Länge 2 hat.

2 Gegeben sind die Ebene E: $2x + y - z - 4 = 0$ sowie der Punkt P(− 3 | 0 | 2).

a) Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht in der Ebene E liegt.

b) Spiegelt man den Punkt P an der Ebene E, so erhält man den Punkt P*.

Ermitteln Sie die Koordinaten von P*.

Aufgabe 4 **Lösungen Seite 71**

1 Gegeben ist die Ebene E durch E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $u, v \in \mathbb{R}$

Geben Sie jeweils eine Gleichung einer Geraden an,

(A) die in der Ebene E liegt,

(B) die keine gemeinsamen Punkte mit E hat.

2 Zeichnen Sie einen Würfel mit der Kantenlänge 3 LE in ein räumliches Koordinatensystem. Markieren Sie eine Kante und geben Sie eine Gleichung der Geraden an, auf der diese Kante liegt.

Aufgabe 5

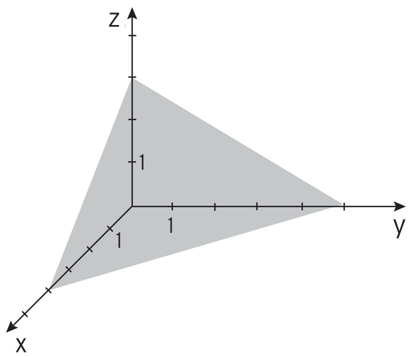
1 Gegeben ist die Gerade g mit g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

Geben Sie jeweils eine Gleichung einer Geraden an, die

a) parallel zu g durch P (0| 1| -2) verläuft,

b) g rechtwinklig schneidet.

2 Ermitteln Sie eine Gleichung der dargestellten Ebene.
Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung des Abstands vom Ursprung zur Ebene.



Aufgabe 6 **Lösungen Seite 72**

Gegeben sind die Punkte A(3| 1| 1) und B(−2| 2| 4) sowie die Geraden

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

1 Bestätigen Sie, dass g durch A und B geht.

2 Die Geraden g und h haben genau einen Schnittpunkt. Bestimmen Sie diesen Schnittpunkt.

3 Geben Sie einen weiteren Punkt auf g an, der von A den gleichen Abstand hat wie B.

Aufgabe 7 **Lösungen Seite 73**

Gegeben ist die Ebene E_1: $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$.

1 Zeigen Sie, dass alle Punkte der Ebene E_1 die folgende Gleichung erfüllen:

$7x + y - 5z = 0$

2 Geben Sie für die Ebene E_2: $\vec{x} = p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + q \cdot \vec{v}$; $p, q \in \mathbb{R}$.

einen Vektor $\vec{v}$ so an, dass die Ebene E_2 nicht identisch mit der Ebene E_1 ist.

Begründen Sie, dass der von Ihnen angegebene Vektor $\vec{v}$ die Bedingung erfüllt.

Aufgabe 8

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1 Zeigen Sie, dass $\vec{a}$ orthogonal zu $\vec{b}$ und nicht orthogonal zu $\vec{c}$ ist.

2 Gegeben ist ein weiterer Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ d \end{pmatrix}$ mit $d \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass bei geeigneter Wahl von d der Vektor $\vec{d}$ orthogonal zu $\vec{a}$ und auch orthogonal zu $\vec{b}$ sein kann, aber nicht zu beiden Vektoren gleichzeitig.

Aufgabe 9 **Lösungen Seite 74**

1 Gegeben ist das Viereck ABCD mit den Eckpunkten $A(0|\,0|0)$, $B(-3|\,1|4)$, $C(2|-4|4)$ und $D(5\,|-5|\,0)$.

Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist.

2 In einem kartesischen Koordinatensystem ist die senkrechte Pyramide ABCDS gegeben. Die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche ist 5, die Höhe der Pyramide ist 7.

a) Geben Sie mögliche Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide an.

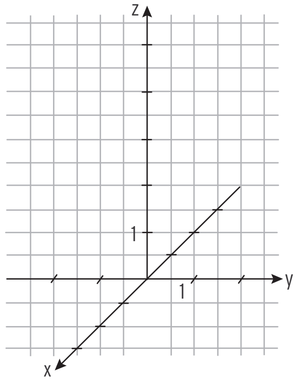
b) Mindestens einer der Eckpunkte soll so verschoben werden, dass sich das Volumen der Pyramide vervierfacht. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten.

Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten jeweils die Koordinaten der verschobenen Eckpunkte an und begründen Sie Ihre Angabe.

Aufgabe 10 **Lösungen Seite 74/75**

Gegeben sind die Punkte A(2 | − 2 | 1) , B(− 2| 2| 1) und C(− 2| − 2| 5).

a) Zeichnen Sie die Punkte A, B und C in das nebenstehende Koordinatensystem ein.



b) Die Verbindungsvektoren der drei Punkte sind die Vektoren

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CA}$.

Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC ein gleichseitiges Dreieck ist.

Aufgabe 11

Im Raum sind eine Gerade g und ein Punkt A, der nicht auf der Geraden g liegt, gegeben. Beschreiben Sie einen Weg zur Ermittlung der Koordinaten zweier Punkte B und C der Geraden g ,die zusammen mit A ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck bilden.

Aufgabe 12

Gegeben ist das eindeutig lösbare Gleichungssystem LGS 1:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 6 \\ 4x_2 - 8x_3 &= -12. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie den Lösungsvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ von LGS 1.

b) Begründen Sie, warum alle Lösungen des gegebenen Gleichungssystems LGS1 auch Lösungen des nachfolgenden Gleichungssystems LGS2 sind.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 6 \\ 12x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= -12. \end{aligned}$$

Aufgabe 13

Gegeben sind die Ebenen E: $3x + 2y - 3z = 6$ und F: $2x + 2y - 3z = 0$

Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden von E und F.

Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat diese Gerade?

II Aufgabensätze zur Abiturprüfung 2023

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2016 Grundkurs

angepasst für die Abiturprüfung 2023

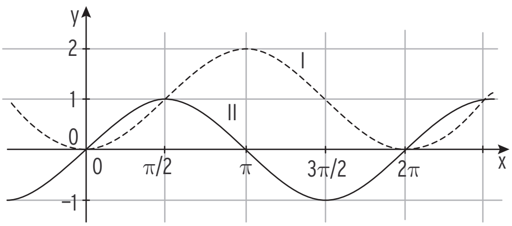
Mathematik Kurs auf grundlegendem Anforderungsniveau — Grundkurs

Aufgabenstellung 1

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

Teil 1 - Analysis

a) Die Abbildung zeigt die Graphen einer Funktion und deren erster Ableitungsfunktion.



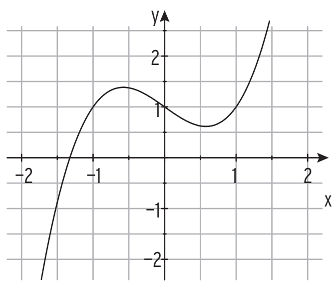
Geben Sie an, welcher der beiden Graphen I und II die Ableitungsfunktion darstellt, und begründen Sie Ihre Angabe.

b) Der Graph einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades hat im Ursprung einen Hochpunkt und an der Stelle $x = 2$ eine Tangente mit der Gleichung $y = 4x - 12$. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f.

c) Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f, g und h durch

$f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 - x + 1$ und $h(x) = x^4 + x^2 + 1$.

c1) Die Abbildung zeigt den Graphen einer der drei Funktionen. Geben Sie an, um welche Funktion es sich handelt. Begründen Sie, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt.



c2) Die erste Ableitungsfunktion von h ist h′.

Bestimmen Sie den Wert von $\int_0^1 h'(x)dx$.

Aufgabenstellung 1

Teil 2 - Analytische Geometrie

Gegeben ist das Quadrat ABCD mit $A(3|3|4)$, $B(6|7|4)$, $C(2|10|4)$ und $D(-1|6|4)$.

Das Quadrat liegt in der Ebene mit der Gleichung $z = 4$.

a) Weisen Sie nach, dass das Quadrat den Flächeninhalt 25 besitzt.

b) Es gibt Punkte S, für die die Pyramide ABCDS das Volumen 50 hat.
Bestimmen Sie die z-Koordinate eines dieser Punkte.

Teil 3 - Stochastik

Für ein zweistufiges Zufallsexperiment werden eine Münze und zwei Würfel verwendet.
Beide Würfel sind auf allen sechs Seiten mit jeweils einer Zahl beschriftet,
Würfel A mit 1, 2, 3, 4 ,5 und 6, Würfel B mit 1, 1, 2, 2, 3 und 3.
Zunächst wird die Münze geworfen.
Zeigt die Münze „Kopf", so wird anschließend Würfel A einmal geworfen, zeigt sie „Zahl", so wird Würfel B einmal geworfen. Die geworfene Zahl wird notiert.

a) Stellen Sie das Zufallsexperiment in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gewürfelte Zahl gerade ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben									
Teilgebiet	Analysis				Geometrie		Stochastik		
Teilaufgabe	a)	b)	c1)	c2)	a)	b)	a)	b)	Summe
BE	2	4	2	2	2	3	3	2	20

Hinweis für das Abitur 2023:

Die Abiturientinnen und Abiturienten erhalten aus Aufgabenstellung 1 (hilfsmittelfreier Teil) die Aufgaben aus Analysis und **nur** die Aufgaben aus Stochastik oder aus Analytischer Geometrie.
Die Auswahl trifft die Lehrkraft.
Um allen Prüflingen die Möglichkeit zum Üben zu geben, haben die Autoren den Umfang belassen.

Aufgabenstellung 2 Analysis

Aufgabe 2.1: Medikament

Nach der Einnahme eines Medikaments geht der Wirkstoff des Medikaments in das Blut über, wobei sich die Konzentration des Wirkstoffs im Blut mit der Zeit verändert.
Die Konzentration wird für $0 \leq t \leq 6$ durch die Funktion f mit $f(t) = \frac{1}{4}t^3 - 3t^2 + 9t$ beschrieben (Graph siehe Anlage). Dabei ist t die Zeit in Stunden seit Beginn der Einnahme und f(t) die Konzentration in µg pro Liter.

a) Geben Sie anhand des Graphen die Zeitintervalle an, in denen die Konzentration des Wirkstoffs im Blut zunimmt und in denen sie abnimmt.
Das Medikament ist nur wirksam, wenn die Konzentration des Wirkstoffs im Blut mindestens 3,7 µg pro Liter beträgt. Geben Sie ein Zeitintervall an, in dem das Medikament wirksam ist.
Berechnen Sie die Nullstellen von f .

b) Geben Sie anhand des dargestellten Graphen die Koordinaten des Hochpunktes an.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Konzentration des Wirkstoffs nach 6 Stunden ein Minimum erreicht.

c) Bestimmen Sie für den Zeitpunkt t = 4h die momentane Änderungsrate der Konzentration des Wirkstoffs im Blut.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, in dem die Konzentration des Wirkstoffs im Blut am stärksten abnimmt.

d) Ein Pharmakonzern hat ein anderes Medikament entwickelt, bei dem die Konzentration des Wirkstoffs im Blut im Intervall [0; 5] durch die Funktion k mit $k(t) = at^3 + bt^2 + 5t$ bestimmt werden kann.
Bekannt ist, dass bei der vorgesehenen Einnahme
- die Konzentration nach 5 Stunden wieder den Wert null erreicht,
- bei t = 5 sich die Konzentration nicht ändert, d. h. die Änderungsrate auf null sinkt.

Ermitteln Sie aus diesen Angaben die Parameter der Funktion k.
[Zur Kontrolle: a = 0,2; b = − 2]

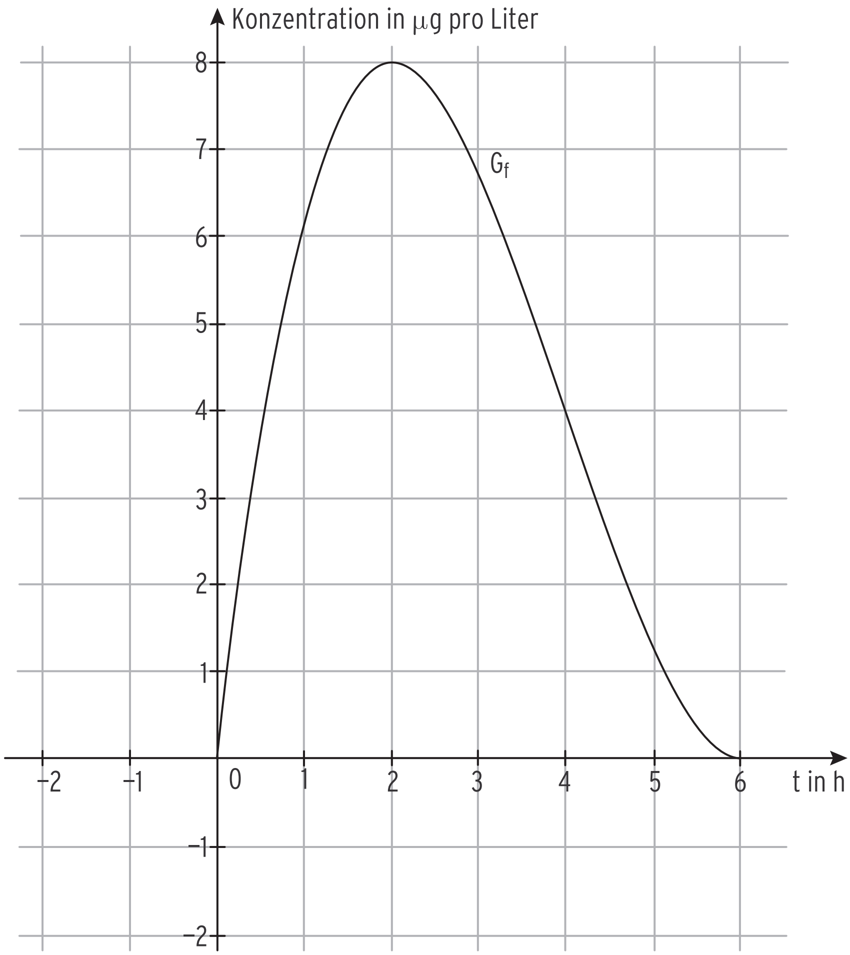
e) Die Änderungsraten der beiden Konzentrationen lassen sich anhand der Ableitungsfunktionen f′ bzw. k′ beschreiben.
Untersuchen Sie, ob es im Intervall [0; 5] einen Zeitpunkt gibt, in dem die Änderungsraten der beiden Konzentrationen gleich sind.

f) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion k in das gegebene Koordinatensystem. Beschreiben Sie anhand der Graphen von f und k drei Unterschiede in der zeitlichen Entwicklung der Konzentration der Medikamente.
Der Pharmakonzern behauptet: „Vom Medikament f wird etwa doppelt so viel Wirkstoff aufgenommen wie vom Medikament k.“
Erläutern Sie, wie diese Behauptung überprüft werden könnte.

	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	6	5	6	8	5	10	40

Aufgabenstellung 2

Anlage zu Aufgabe 2.1: Medikament



Aufgabenstellung 2 Analysis

Aufgabe 2.2: Weidezelt

Weidezelte werden in der Landwirtschaft vielfältig genutzt. Sie bestehen aus einem Gerüst aus Stahlrohren, welches mit einer Plane bespannt ist, siehe Abbildung 1.

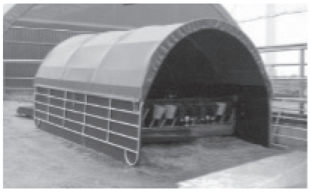


Abbildung 1

a) Hersteller A nutzt für die Konstruktion der bogenförmigen Rohre als Modell den Graphen G_f der Funktion $f(x) = -e^{0,3x^2} + 5;\ x \in \mathbb{R}$. Dabei liegt die x-Achse in der Höhe des Erdbodens, die y-Achse verläuft durch den höchsten Punkt von G_f, siehe Abbildung 2.
Zeigen Sie, dass $x_{1;2} \approx \pm 2{,}3$ die Nullstellen von f sind und bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von G_f mit der y-Achse.
Geben Sie die Höhe und die Breite des Weidezeltes an, 1 LE = 1 m.

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph G_f der Funktion f genau einen Extrempunkt besitzt und dieser ein Hochpunkt ist. Geben Sie die Koordinaten des Hochpunktes an.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass es keine Wendepunkte gibt.
[Zur Kontrolle:) $f''(x) = e^{0,3x^2}(-0{,}6 - 0{,}36x^2)$]

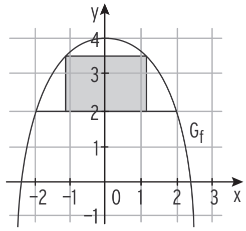


Abbildung 2

c) Für die Tierhaltung nutzt man häufig für die Frontflächen Planen mit eingearbeiteten, lichtdurchlässigen Windschutznetzen.
In der Abbildung 2 ist ein solches rechteckiges Netz dargestellt.
Seine untere Begrenzung befindet sich in 2 m Höhe.
Der Flächeninhalt des Netzes soll möglichst groß sein.
Stellen Sie eine Zielfunktion, also eine Funktion für den Flächeninhalt des Rechtecks, auf.

Zeigen Sie, dass bei einer Breite des Rechtecks von rund 2,46 m der Flächeninhalt extremal ist. Hinweis: Auf die Überprüfung mithilfe der 2. Ableitung wird verzichtet.

d) Hersteller B stellt das Gerüst der Frontfläche aus drei Stahlrohren her, siehe Abbildung 3.
Das Teilstück III wird mit dem Graphen G_p der Funktion p mit $p(x) = ax^2 + b$ modelliert. Entnehmen Sie der Abbildung die Koordinaten geeigneter Punkte und bestimmen Sie die Werte für a und b. [Zur Kontrolle: a = 0,5 ; b = 4]

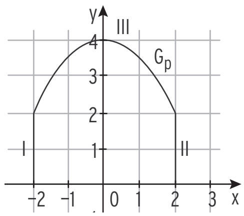


Abbildung 3

e) Weidezelte, die für Lagerzwecke genutzt werden, werden häufig mit Planen für die Frontflächen versehen. Ermitteln Sie die Größe der Frontfläche für das Zelt von Hersteller B.
Ein Bauer möchte im Weidezelt 10 t Heu lagern. 1 m^3 Heu hat eine Masse von 100 kg.
Berechnen Sie, wie lang das Weidezelt dafür sein müsste.

	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben					
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	8	14	4	4	10	40

Aufgabenstellung 3

Aufgabe 3.1: Ikarus

Ein Ballon mit Forschern schwebt in der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$.

Der fliegende Ikarus wird von ihnen um 12:00 Uhr in einer Höhe von 2 km im Punkt A(10|6|2) gesichtet. Eine Minute später erreicht Ikarus bei seinem geradlinigen Flug den Punkt B(10,6| 6,36| 2,02). Es gilt: 1 LE = 1 km.

a) Bestimmen Sie den Vektor $\overrightarrow{AB}$ und geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, auf der die Flugbahn von Ikarus liegt.
Berechnen Sie die Länge des Weges, den Ikarus in einer Minute zurücklegt.
Ermitteln Sie die Geschwindigkeit von Ikarus in der Einheit $\frac{km}{h}$.

b) Ikarus ist in der x-y-Ebene gestartet.
Berechnen Sie die Koordinaten des Startpunktes.
Geben Sie an, um welche Uhrzeit Ikarus gestartet ist. Begründen Sie Ihre Aussage.

c) Bestimmen Sie für die Ebene E, in der der Ballon mit den Forschern schwebt, eine Gleichung in Normalenform.
[Ein Kontrollergebnis: Ein Normalenvektor für E ist z. B. $r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$]

d) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem Ikarus die Ebene E des Ballons der Forscher erreicht.
Ikarus trifft in einem sehr kleinen Winkel auf die Ebene E.
Bestimmen Sie die Größe dieses Winkels.

e) Die Forscher schweben mit ihrem Ballon in ihrer Ebene E längs einer Geraden.
Der Ballon erreicht die Flugbahn des Ikarus in einem Punkt P.
Geben Sie mit einer Begründung die Koordinaten von P an.
Ermitteln Sie, wie viele Minuten Ikarus nicht weiter als 100 m von der Ebene des Forscherballons entfernt ist.

	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben					
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	6	5	5	10	4	30

Hinweisfür das Abitur 2022:

Die Abiturientinnen und Abiturienten erhalten aus Aufgabenstellung 3 bzw. Aufgabenstellung 4 nur **eine** Aufgabe. Die Auswahl trifft die Lehrkraft.

Um allen Prüflingen die Möglichkeit zum Üben zu geben, haben die Autoren den Umfang belassen.

III Zentrale schriftliche Abiturprüfungen gA

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Mathematik Kurs auf grundlegendem Anforderungsniveau – Grundkurs

Aufgabenvorschlag Teil 1

Hilfsmittel: Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache

Aufgabenstellung 1

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis 1

Eine Funktion f ist gegeben durch $f(x) = -5x^4 - 3x^2 + x;\ x \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion f'. Geben Sie die Gleichung einer Stammfunktion F von f an.

b) Der Graph von f hat ein Maximum an der Stelle x_{Max}.
Geben Sie ein Intervall der Länge 1 an, in dem die Stelle x_{Max} liegen muss.
Begründen Sie Ihre Angabe.

1.2 Analysis 2

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen g mit $g(x) = x^2 - 3$ und
h mit $h(x) = -x^2 + 2x + 1$.

a) Zeigen Sie, dass sich die Graphen von g und h nur für $x = -1$ und $x = 2$ schneiden.

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die die Graphen von g und h einschließen.

1.3 Geometrie

Gegeben ist eine Gerade g durch die Gleichung g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$.

a)
- Geben Sie eine Gleichung einer Geraden p an, die echt parallel zu g verläuft.
- Geben Sie eine Gleichung einer Geraden s an, die g senkrecht schneidet.

b) Entscheiden Sie begründet, ob jede mögliche Gerade s auch die Gerade p schneidet.

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil (Fortsetzung)

1.4 Stochastik

Ein Chor besteht aus zwölf Frauen und neun Männern; eine der Frauen leitet den Chor. An einer Preisverleihung dürfen zwei Mitglieder des Chors teilnehmen.

a) Zunächst geht man davon aus, dass die Leiterin des Chors an der Preisverleihung teilnimmt und das zweite Mitglied zufällig ausgewählt wird.
Geben Sie für diesen Fall die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das zweite Mitglied eine Frau ist.

Da die Leiterin an der Preisverleihung nicht teilnehmen kann, werden zwei der anderen Mitglieder zufällig ausgewählt.

b) Begründen Sie ohne zu rechnen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Frauen ausgewählt werden, größer ist als die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Männer ausgewählt werden.

c) Geben Sie einen Term an für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau und ein Mann ausgewählt werden.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben										
Teilgebiet	1.1 Analysis 1		1.2 Analysis 2		1.3 Geometrie		1.4 Stochastik			
Teilaufgabe	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)	c)	Summe
BE	2	3	2	3	3	2	1	1	3	20

Hinweis für das Abitur 2023:
Die Abiturientinnen und Abiturienten erhalten aus Aufgabenstellung 1 (hilfsmittelfreier Teil) die Aufgaben aus Analysis und **entweder** die Aufgaben aus Stochastik oder aus Analytischer Geometrie.
Die Abiturientinnen und Abiturienten erhalten aus Aufgabenstellung 3 bzw. Aufgabenstellung 4 nur **eine** Aufgabe.
Die Auswahl trifft jeweils die Lehrkraft.
Um allen Prüflingen die Möglichkeit zum Üben zu geben, haben die Autoren den Umfang belassen.

Aufgabenvorschlag Teil 2

Aufgabenstellung 2

Aufgabe 2.1 Kiri-Bäume

Die Kiri-Bäume wachsen außergewöhnlich schnell. Die Holzmasse eines Kiri-Baums nimmt ca. 10-mal so schnell zu wie die einer Eiche. Ursprünglich kommt der Kiri-Baum aus Südost-Asien, aber er wird auch in Europa zur Holzproduktion gepflanzt. Zurzeit wird untersucht, unter welchen Bedingungen Kiri-Bäume besonders gut wachsen.

Das Wachstum eines Baums A kann für $t \geq 0$ bis zum Erreichen der maximalen Höhe näherungsweise durch die Funktion h mit $h(t) = -0{,}1 \cdot t^4 + 20 \cdot t^2$ beschrieben werden. Dabei gibt t die Zeit in Jahren und h(t) die Höhe in cm an.

a) Bestimmen Sie die Höhe des Baums A nach 2 Jahren und nach 8 Jahren.
Berechnen Sie die maximale Höhe des Baums A.
Geben Sie an, wie viele Jahre der Baum A wächst.

b) Berechnen Sie die höchste Wachstumsgeschwindigkeit des Baums A in cm/Jahr.
Es genügt die Bearbeitung mit dem notwendigen Kriterium.

Das Wachstum eines anderen Baums B kann für $t \geq 0$ bis zum Erreichen der maximalen Höhe näherungsweise durch die Funktion g mit $g(t) = at^3 + bt^2$ beschrieben werden. Dabei gibt t die Zeit in Jahren und g(t) die Höhe in cm an.

c) Der Baum B ist nach 5 Jahren 500 cm hoch und seine Wachstumsgeschwindigkeit beträgt zu diesem Zeitpunkt 150 cm/Jahr.
Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Funktion g.
[Kontrollergebnis: $g(t) = -2t^3 + 30t^2$]

d) Die Bäume A und B beginnen gleichzeitig mit ihrem Wachstum (bei $t = 0$).
Geben Sie die Höhe der Bäume A und B zum Beobachtungsbeginn an.
Berechnen Sie, zu welchen Zeiten der Baum A und der Baum B die gleichen Wachstumsgeschwindigkeiten besitzen.

e) Untersuchen Sie, zu welchen Zeiten die Wachstumsgeschwindigkeiten der Bäume A und B am stärksten voneinander abweichen.
Die Anwendung einer hinreichenden Bedingung wird nicht gefordert.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabenstellung 2

Aufgabe 2.1 Kiri-Bäume (Fortsetzung)

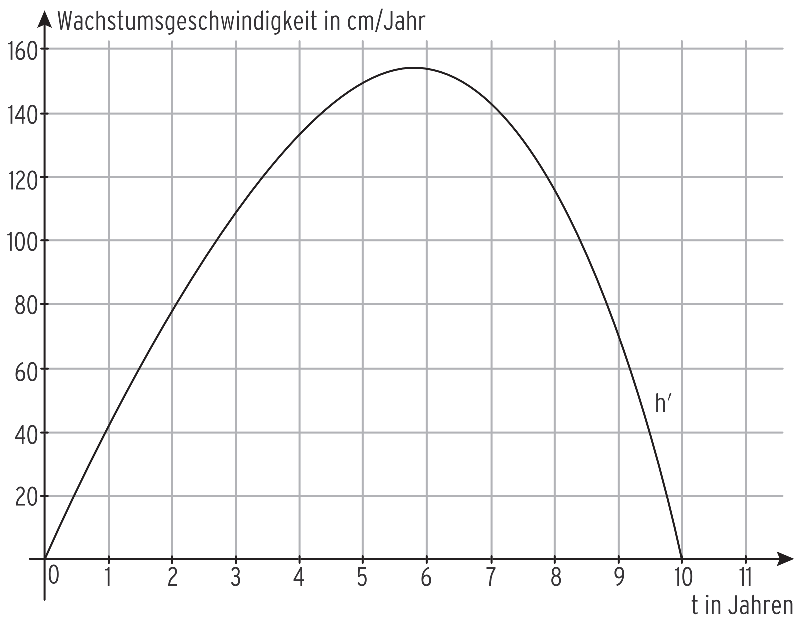
f) In dem Koordinatensystem in der Anlage ist der Graph der Funktion h' bereits eingezeichnet. Ergänzen Sie die Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen von g' für $0 \leq t \leq 10$ in dem Koordinatensystem in der Anlage ein.

t	0	2	4	5	6	8	10
g′(t)		96		150		96	

g) Die Graphen von g' und h' schließen im I. Quadranten zwei Teilflächen vollständig ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Teilfläche, die im Intervall $I = [0; 5]$ liegt. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang unter Einbeziehung von Lösungen aus den Aufgabenteilen d) und f).

	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	Summe
BE	10	4	5	7	4	4	6	40

Anlage zu Aufgabe 2.1: Kiri-Bäume



Aufgabenstellung 2

Aufgabe 2.2 Hormonpflaster

Mit einem Pflaster können einer Person durch die Haut Medikamente zugeführt werden, z. B. Hormone. Diese Pflaster geben über einen langen Zeitraum hinweg Hormone ab.

Eine Arzneimittelfirma hat solche Pflaster an Personen getestet, deren körpereigene Hormonproduktion lediglich 50 % des Sollwertes beträgt. Der Sollwert liegt bei 100 %.

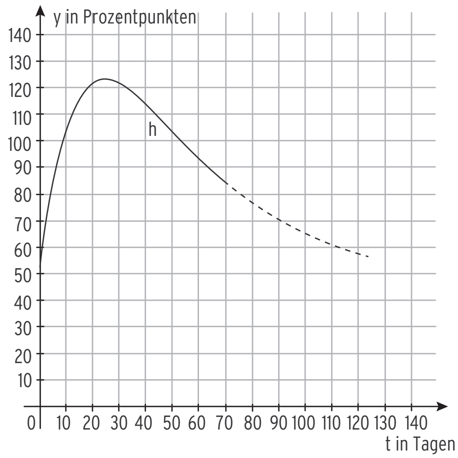
Bei der Messung der Hormonwerte zeigt sich, dass die Messergebnisse durch folgende Funktion h beschrieben werden können:

$h(t) = 8t \cdot e^{-0{,}04t} + 50;\ t \geq 0.$

Dabei ist t die Zeit in Tagen ab Beginn der Behandlung.

Die Funktionswerte von h werden als Hormonspiegel bezeichnet.

Der Hormonspiegel gibt in Abhängigkeit von t den Anteil bezüglich des Sollwerts in Prozent an.



Funktionswerte größer als 100 sind möglich, wenn der Hormonwert über dem Sollwert liegt.

Nebenstehend sehen Sie eine Abbildung des Graphen von h für $t \geq 0$.

a) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von h für $t \to +\infty$.

b) Ermitteln Sie, wann der maximale Wert des Hormonspiegels erreicht wird und berechnen Sie diesen Wert. Es genügt die Verwendung der notwendigen Bedingung.

[Kontrollergebnis: $h'(t) = (8 - 0{,}32t) \cdot e^{-0{,}04t}$]

c) Wenn der Hormonspiegel stark abfällt, werden vermehrt Nebenwirkungen beobachtet.

Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem der Hormonspiegel am stärksten fällt. (Es genügt die Verwendung der notwendigen Bedingung).

Berechnen Sie für diesen Zeitpunkt den Wert des Hormonspiegels.

Geben Sie für diesen Zeitpunkt die lokale Änderungsrate in % pro Tag an.

Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden: $h''(t) = (-0{,}64 + 0{,}0128t) \cdot e^{-0{,}04t}$.

d) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate des Hormonspiegels in den ersten sieben Tagen nach Beginn der Behandlung.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabenstellung 2

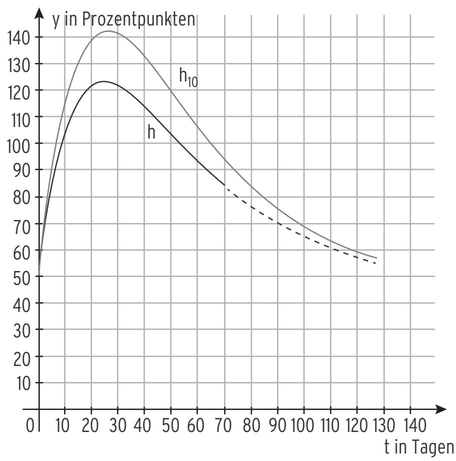
Aufgabe 2.2 Hormonpflaster (Fortsetzung)

e) Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden, dass durch $H(t) = -(200t + 5000) \cdot e^{-0{,}04t} + 50t$ eine Stammfunktion H von h gegeben ist.
Weisen Sie nach, dass $\frac{1}{70} \cdot \int_0^{70} h(t)dt > 100$ gilt.

f) Bei einem Patienten wird das Pflaster nach 70 Tagen entfernt. Der Hormonspiegel kann danach durch eine Gerade g beschrieben werden, die im Punkt $P(70|h(70))$ tangential zum Graphen von h verläuft. Ermitteln Sie eine Gleichung für g.
[Kontrollergebnis: $g(t) \approx -0{,}88t + 145{,}7$]
Ermitteln Sie rechnerisch, ab welchem Zeitpunkt $g(t) \leq 50$ gilt.

g) Der Hersteller möchte die Wirkstoffmenge in den Pflastern erhöhen und geht davon aus, dass der Hormonspiegel dann durch eine Funktion h_k mit folgender Gleichung beschrieben werden kann: $h_k(t) = k \cdot t \cdot e^{-0{,}04t} + 50$, $t \geq 0$ und $k \geq 0$.
Ermitteln Sie, ab welchem Wert von k der Hormonspiegel am 70. Tag noch mindestens den Wert 100 erreicht.

h) Vergleichen Sie den Verlauf des Graphen von $h(t) = 8 \cdot t \cdot e^{-0{,}04t} + 50$ mit einem Graphen von $h_k(t) = k \cdot t \cdot e^{-0{,}04t} + 50$, $k > 8$, indem Sie mindestens drei Gemeinsamkeiten oder Unterschiede angeben.
Die Abbildung rechts zeigt zusätzlich zum Graphen h exemplarisch den Graphen von h_k für $k = 10$.



	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	Summe
BE	3	7	5	3	4	6	6	6	40

Aufgabenstellung 3

Aufgabe 3.1 Tunnel

Ein Berg wird von seiner Südseite zu seiner Nordseite durch einen Autotunnel unterquert. Der Verlauf des Autotunnels kann als Teil einer Geraden modelliert werden.
Die x-y-Ebene befindet sich auf der Höhe des Meeresspiegels. (1 LE = 100 m)
Auf der Südseite beginnt der Tunnel im Punkt $S(0|40|6)$ und endet auf der Nordseite im Punkt $N(30|65|7)$.

a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, mit deren Hilfe man den Verlauf des Autotunnels modellieren kann. Berechnen Sie die Länge des Autotunnels.
Ermitteln Sie den Winkel, in dem die Gerade zur x-y-Ebene ansteigt.

b) Im Autotunnel befindet sich eine Nothaltebucht, die durch den Punkt L mit den Koordinaten $L(15|52{,}5|6{,}5)$ beschrieben werden kann. Von der Nothaltebucht führt ein Lüftungsrohr senkrecht zum Meeresspiegel nach oben. Das Lüftungsrohr ragt 2 m aus der Oberfläche des Berges hinaus. Die Oberfläche des Berges kann in diesem Bereich durch eine Ebene F beschrieben werden mit $F: 10x + 5y + 7z = 475{,}5$.
Ermitteln Sie die Länge des Lüftungsrohrs.

Durch den Berg verläuft ein zweigleisiger Bahntunnel. Dieser Bahntunnel kann durch die Gerade zwischen den Punkten $A(20|60|6{,}5)$ und $B(60|65|6)$ beschrieben werden.

c) Untersuchen Sie, ob der Bahntunnel parallel zum Autotunnel verläuft.
Bestimmen Sie den Punkt P des Bahntunnels, der sich in 640 m Höhe über dem Meeresspiegel befindet.

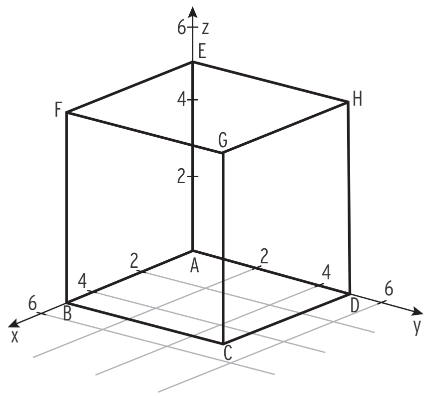
d) Ein Güterzug und ein Personenzug fahren gleichzeitig in die verschiedenen Eingänge A und B des Bahntunnels hinein. Der Güterzug bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 80 km/h. Der Personenzug durchfährt den Tunnel mit einer konstanten Geschwindigkeit von 100 km/h.
Ermitteln Sie den Weg, den der Personenzug im Tunnel zurückgelegt hat, wenn die Loks der beiden Züge gerade aneinander vorbeifahren.

	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben				
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	5	5	5	5	20

Aufgabenstellung 3

Aufgabe 3.2 Würfel

Die Abbildung zeigt den Würfel ABCDEFGH mit G(5|5|5) und H(0|5|5) in einem kartesischen Koordinatensystem.
Die Punkte I(5|0|1), J(2|5|0), K(0|5|2) und L(1|0|5) liegen jeweils auf einer Kante des Würfels.



a) Zeichnen Sie das Viereck IJKL in die Abbildung ein.

b) Begründen Sie, dass das Viereck IJKL ein Trapez ist, in dem zwei Seiten gleich lang sind.
Weisen Sie nach, dass die Seite $\overline{IL}$ des Trapezes doppelt so lang ist wie die Seite $\overline{JK}$.

c) Berechnen Sie die Größe eines Innenwinkels des Trapezes IJKL.

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes IJKL.

e) Gegeben ist die Ebene S: $5x + 4y + 5z = 0$.
Der Punkt K liegt in einer Ebene T, die parallel zu S ist.
Untersuchen Sie, ob auch der Punkt L in T liegt.

f) Für einen Wert von r schneidet die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4-r \\ 0 \\ r^2+1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $u \in \mathbb{R}$ die Kante $\overline{GH}$ des Würfels.
Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem der Schnittpunkt die Kante teilt.

	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	2	4	2	4	3	6	20

Aufgabenstellung 4

Aufgabe 4.1 Führerschein

In einem Land, in dem 80 % der Erwachsenen einen Führerschein besitzen, werden 100 Erwachsene zufällig ausgewählt. Es soll angenommen werden, dass dabei die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen, die einen Führerschein besitzen, binomialverteilt ist.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
   E_1: „Von den 100 ausgewählten Personen haben genau 80 Personen einen Führerschein."
   E_2: „Von den 100 ausgewählten Personen haben höchstens 75 Personen einen Führerschein."

b) Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit, dass darunter mindestens eine Person ohne Führerschein ist, mindestens 99 % beträgt.

In einer bestimmten Region des betrachteten Landes werden alle Fahrprüfungen eines Jahres auf einen möglichen Zusammenhang zwischen dem Alter eines Prüflings und dem Bestehen der Prüfung hin untersucht. Von insgesamt 13879 Prüflingen waren 2482 zum Zeitpunkt der Prüfung mindestens 30 Jahre alt. Insgesamt haben 11104 Prüflinge die Prüfung bestanden; davon waren 8870 zum Zeitpunkt der Prüfung jünger als 30 Jahre.

Ein Prüfling wird zufällig ausgewählt. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:
   A: „Der Prüfling war zum Zeitpunkt der Prüfung mindestens 30 Jahre alt."
   B: „Der Prüfling hat die Prüfung bestanden."

c) Bestimmen Sie die Anzahl der Prüflinge, die zum Zeitpunkt der Prüfung jünger als 30 Jahre waren und die Prüfung nicht bestanden haben.

d) Untersuchen Sie, ob die Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ und $P(B)$ übereinstimmen.
   Geben Sie an, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind, und interpretieren Sie Ihre Angabe im Sachzusammenhang.

e) Besteht ein Prüfling die Prüfung bei der ersten Teilnahme nicht, nimmt er ein zweites Mal teil. Der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung schon bei der ersten Teilnahme bestanden haben, ist q. Unter denjenigen, die zum zweiten Mal an der Prüfung teilnahmen, ist der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung bestanden haben, nur halb so groß. Der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung spätestens bei der zweiten Teilnahme bestanden haben, beträgt 90%. Berechnen Sie den Wert von q.

	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben					
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	4	4	2	5	5	20

Anlage zu Aufgabe 4.1 Führerschein

Summierte Binomialverteilungen

Gerundet auf vier Nachkommastellen, weggelassen ist „0,“,
alle freien Plätze links unten enthalten 1,0000, rechts oben 0,0000.
Wird die Tabelle „von unten“ gelesen ($p > 0{,}5$), ist der richtige Wert 1 – (abgelesener Wert).

n	k \ p	0,02	0,05	0,10	$\frac{1}{6}$	0,20	0,25	0,30	$\frac{1}{3}$	k
	0	1326	0059							99
	1	4033	0371	0003						98
	2	6767	1183	0019						97
	3	8590	2578	0078						96
	4	9492	4360	0237	0001					95
	5	9845	6160	0576	0004					94
	6	9959	7660	1172	0013	0001				93
	7	9991	8720	2061	0038	0003				92
	8	9998	9369	3209	0095	0009				91
	9	9999	9718	4513	0231	0023				90
	10		9885	5832	0427	0057	0001			89
	11		9957	7030	0777	0126	0004			88
	12		9985	8018	1297	0253	0010			87
	13		9995	8761	2000	0469	0025	0001		86
	14		9999	9274	2874	0804	0054	0002		85
	15			9601	3877	1285	0111	0004		84
	16			9794	4942	1923	0211	0010	0001	83
	17			9900	5994	2712	0376	0022	0002	82
	18			9954	6965	3621	0630	0045	0005	81
	19			9980	7803	4602	0995	0089	0011	80
	20			9992	8481	5595	1488	0165	0024	79
	21			9997	8998	6540	2114	0288	0048	78
	22			9999	9370	7389	2864	0479	0091	77
	23				9621	8109	3711	0755	0164	76
	24				9783	8686	4617	1136	0281	75
	25				9881	9125	5535	1631	0458	74
	26				9938	9442	6417	2244	0715	73
100	27				9969	9658	7224	2964	1066	72
	28				9985	9800	7925	3768	1524	71
	29				9993	9888	8505	4623	2093	70
	30				9997	9939	8962	5491	2766	69
	31				9999	9969	9307	6331	3525	68
	32					9985	9554	7107	4344	67
	33					9993	9723	7793	5188	66
	34					9997	9836	8371	6019	65
	35					9999	9906	8839	6803	64
	36					9999	9948	9201	7511	63
	37						9973	9470	8123	62
	38						9986	9660	8630	61
	39						9993	9790	9034	60
	40						9997	9875	9341	59
	41						9999	9928	9566	58
	42						9999	9960	9724	57
	43							9979	9831	56
	44							9989	9900	55
	45							9995	9943	54
	46							9997	9969	53
	47							9999	9983	52
	48							9999	9991	51
	49								9996	50
	50								9998	49
	51								9999	48
	52									47
n	k		0,95	0,90	$\frac{5}{6}$	0,80	0,75	0,70	$\frac{2}{3}$	p \ k

Aufgabenstellung 4

Aufgabe 4.2 Würfelspiel

Sven und Tom würfeln täglich mit einem fairen Würfel darum, wer den Müll nach unten bringt. Es wird folgende Regel vereinbart: Zuerst würfelt Sven, danach würfelt Tom. Wenn die Augenzahl von Sven kleiner ist als die von Tom, muss Sven den Müll nach unten bringen. In allen anderen Fällen muss Tom den Müll nach unten bringen.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sven eine 4 gewürfelt hat und den Müll nach unten bringen muss.

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Sven bringt den Müll nach unten" $p = \frac{5}{12}$ beträgt. Fertigen Sie eine tabellarische Übersicht aller Ergebnisse an, bei denen Sven den Müll nach unten bringen muss.

Sven und Tom werden im nächsten Monat 30-mal würfeln.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert dafür, wie oft Sven im nächsten Monat den Müll nach unten bringt.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
A: „Sven trägt genau 12-mal den Müll nach unten."
Geben Sie einen Term an, mit dem man die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
B: „Tom trägt mindestens einmal den Müll hinunter." berechnen kann.

e) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang die Bedeutung des Terms

$$\binom{30}{10} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^{10} \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^{20} + \binom{30}{11} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^{11} \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^{19} + \binom{30}{12} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^{12} \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^{18}$$

f) Tom schlägt eine Veränderung des Spiels vor. Diese besteht darin, dass zunächst vor Beginn der neuen Woche ermittelt wird, wie oft jeder der beiden in der Woche den Müll hinunter tragen muss. Dazu werden in einem Stoffbeutel 5 schwarze und 5 weiße Kugeln gleicher Größe gelegt. Einer der beiden zieht mit einem Griff genau 7 Kugeln aus dem Beutel. Die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln entspricht nun der Anzahl der Tage, an denen Tom in der Woche den Müll nach unten tragen muss.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Tom in der folgenden Woche weniger als 4-mal an der Reihe ist.
Begründen Sie Ihren Ansatz.

	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	2	5	2	4	2	5	20

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019 Grundkurs Lösungen

Aufgabenstellung 1 Lösungen

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis 1

$f(x) = -5x^4 - 3x^2 + x;\ x \in \mathbb{R}$

a) Ableitungsfunktion f′: $f'(x) = -20x^3 - 6x + 1$

Stammfunktion F von f: $F(x) = -x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2$ (Kontrolle durch Ableiten: $F'(x) = f(x)$)

b) Es ist z. B. $f'(0) = 1$ und $f'(1) = -25$. Die Werte fallen von + nach −.

Daher liegt die Maximalstelle zwischen 0 und 1, also z. B. im Intervall [0; 1].

1.2 Analysis 2

g: $g(x) = x^2 - 3$; h: $h(x) = -x^2 + 2x + 1$.

a) $g(x) = h(x)$ $\quad x^2 - 3 = -x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$

Eine quadratische Gleichung hat höchstens zwei Lösungen.

$g(-1) = h(-1) = -2;\ g(2) = h(2) = 1$

b) Grenzen: − 1; 2

$$\int_{-1}^{2}(g(x) - h(x))dx = \int_{-1}^{2}(2x^2 - 2x - 4)dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x\right]_{-1}^{2} = \frac{16}{3} - 4 - 8 - \left(-\frac{2}{3} - 1 + 4\right) = -9$$

Inhalt der Fläche, die die Graphen von g und h einschließen: A = 9 FE

Hinweis: $\int_{-1}^{2}(h(x) - g(x))dx = 9$

1.3 Geometrie

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$

a) • Angabe einer Geradengleichung mit einem Richtungsvektor, der kollinear zum Richtungsvektor der Geraden g liegt und einem Stützvektor, dessen Endpunkt nicht auf der Geraden g liegt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\quad (4 \mid 3 \mid 6) \notin g$

• Angabe einer Geradengleichung mit einem Richtungsvektor, der orthogonal zum Richtungsvektor der Geraden g verläuft und z.B. mit dem Stützvektor der Geraden g.

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

b) Die Geraden p und g legen eine Ebene fest. Man kann die Gerade s so wählen, dass s nicht in dieser Ebene liegt (und trotzdem die Gerade g im rechten Winkel schneidet). Dann hat sie keinen Schnittpunkt mit der Geraden p. Also schneidet nicht jede mögliche Gerade s auch die Gerade p.

Aufgabenstellung 1 Lösungen

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.4 – Stochastik

Chor aus zwölf Frauen inclusive Chorleiterin und neun Männern

a) Chorleiterin nimmt teil: 11 Frauen aus 20 Mitgliedern

Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das zweite Mitglied eine Frau ist: $p = \frac{11}{20}$

b) Die Anzahl der Frauen unter den anderen Mitgliedern ist größer als die der Männer.

(11 Frauen zu 9 Männer)

c) Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau und ein Mann ausgewählt werden

(Ziehen ohne Zurücklegen): $p = \frac{\binom{11}{1}\cdot\binom{9}{1}}{\binom{20}{2}}$ oder $p = 2 \cdot \frac{11}{20} \cdot \frac{9}{19}$

Aufgabenstellung 2 Lösungen

Aufgabe 2.1 Kiri-Bäume

Wachstum eines Baums A: $h(t) = -0{,}1 \cdot t^4 + 20 \cdot t^2$; $t \geq 0$

a) Höhe des Baums A nach 2 Jahren: $h(2) = 78{,}4h$; nach 8 Jahren: $h(8) = 870{,}4$

Nach 2 Jahren ist der Baum A ca. 78 cm hoch und nach 8 Jahren ca. 870 cm hoch.

Maximale Höhe des Baums A:

Ansatz: $h'(t) = 0$ und $h''(t) < 0$

$h'(t) = -0{,}4 \cdot t^3 + 40 \cdot t$, $h''(t) = -1{,}2 \cdot t^2 + 40$

$h'(t) = 0$ $\quad t(-0{,}4 \cdot t^2 + 40) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee -0{,}4 \cdot t^2 + 40 = 0$

Nullstellen von h': $\quad t_1 = 0$; $t_2 = 10$; $t_3 = -10$ (< 0 entfällt)

$h''(0) = 40 > 0$: lokales Minimum in $t_1 = 0$

$h''(10) = -80 < 0$: lokales Maximum in $t_2 = 10$

$h(10) = 1000$: Der Baum A wird maximal 1000 cm hoch.

Die Wachstumsphase des Baums A beträgt 10 Jahre (von t = 0 bis t = 10).

b) Höchste Wachstumsgeschwindigkeit des Baums A in cm/Jahr (Maximum von h')

Ansatz: $h''(t) = 0$ $\quad -1{,}2 \cdot t^2 + 40 = 0 \Leftrightarrow t^2 = \frac{100}{3} \Leftrightarrow t_1 \approx 5{,}8$; $t_2 = -5{,}8 < 0$

$h'(5{,}8) \approx 154$ oder auch $h'\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right) \approx 154$

höchste Wachstumsgeschwindigkeit: 154 cm/Jahr.

Wachstum eines anderen Baums B: $g(t) = at^3 + bt^2$; $t \geq 0$

c) B ist nach 5 Jahren 500 cm hoch: $g(5) = 500$ $\quad$ (I) $125a + 25b = 500$

Wachstumsgeschwindigkeit 150 cm/Jahr: $g'(5) = 150$ $\quad$ (II) $75a + 10b = 150$

Lösung des LGS: $a = -2$; $b = 30$

Funktionsgleichung der Funktion g: $g(t) = -2t^3 + 30t^2$

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2022

Mathematik Kurs auf grundlegendem Anforderungsniveau – Grundkurs

Aufgabenvorschlag Teil 1

Hilfsmittel: Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache

Aufgabenstellung 1

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis

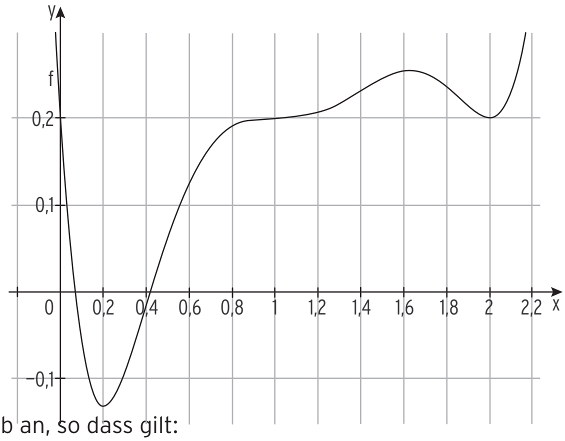
Eine Funktion f ist durch ihre Gleichung $f(x) = x^3 - 8x^2 + 12x$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f. 2

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P(1 \mid f(1))$. 3

1.2 Analysis

Abgebildet ist der Graph einer Funktion f.



a) Geben Sie je einen Wert für a und b an, so dass gilt:

I $f'(0{,}2) = a$

II $f''(b) = 0$. 2

b) Markieren Sie einen Punkt $P(x_P \mid y_P)$ auf dem Funktionsgraphen von f, für den gilt: 3

$f''(x_P) = 0$ und $f'(x_P) < 0$.

Begründen Sie, warum der von Ihnen gewählte Punkt P die beiden Bedingungen erfüllt.

1.3 Analysis

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x^2$. 5

Bestimmen Sie diejenige reelle Zahl m mit $m < 0$, für die der Graph von f und die Gerade mit der Gleichung $y = mx$ eine Fläche mit dem Inhalt 36 einschließen.

Mathematatik Kurs auf grundlegendem Anforderungsniveau — Grundkurs

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil (Fortsetzung)

Schüler/in bearbeitet entweder die Analytische Geometrie oder die Stochastik.

1.4 Analytische Geometrie

Gegeben ist die Ebene $E: 3x - 2y = 0$.

a) Prüfen Sie, ob der Punkt $(1 \mid 1{,}5 \mid 7)$ in E liegt. 1

b) Beschreiben Sie die Lage von E im Koordinatensystem. 2

c) Bestimmen Sie diejenige reelle Zahl s, für die die Ebene $F: 2x + sy + z = 4$ senkrecht zu E steht. 2

1.5 Analytische Geometrie

Gegeben ist die Punkt $A(0|0|0)$, $B(8|6|0)$ und $C(4|3|z)$, wobei z eine positive reelle Zahl ist.

a) Zeigen Sie, dass es sich beim Dreieck ABC um ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{AB}$ handelt. 2

b) Das Dreieck ABC hat den Flächeninhalt 35. Bestimmen Sie den Wert von z. 3

25

1.4 Stochastik

In einer Urne liegen vier rote und zwei grüne Kugeln.

a) Aus der Urne werden nacheinander drei Kugeln zufällig gezogen, ohne dass die gezogenen Kugeln zurückgelegt werden. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine der gezogenen Kugeln grün ist. 2

Aus der Urne wird eine Kugel entfernt, sie enthält also nur noch fünf Kugeln. 3

b) Nun beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass beim zufälligen Ziehen von zwei Kugeln ohne Zurücklegen zwei Kugeln mit verschiedenen Farben gezogen werden, 60 %. Entscheiden Sie, ob die entfernte Kugel rot oder grün ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

1.5 Stochastik

60% der Kunden eines Reiseunternehmens reisen gerne in die Region A, 30% in die Region B, 20% reisen in jede der beiden Regionen gerne.

a) Unter denjenigen Kunden, die gerne in die Region A reisen, wird eine Person zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person auch gerne in die Region B reist. 2

b) Berechnen Sie den Anteil der Kunden, die entweder in die Region A oder in die Region B gerne reisen. 3

25

Mathematatik Kurs auf grundlegendem Anforderungsniveau – Grundkurs

Aufgabenvorschlag Teil 2

Aufgabenstellung 2

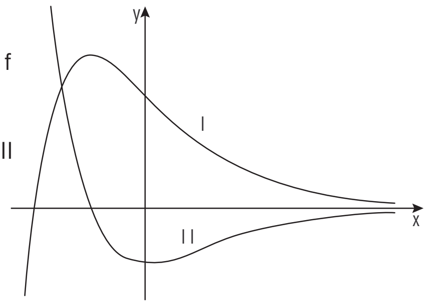
Aufgabe 2.1: Tauchroboter — BE

1 Gegeben ist die in ℝ definierte Funktion f mit $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.
Für die erste Ableitungsfunktion von f gilt $f'(x) = -(x + 1)e^{-x}$.

a) Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen an. Begründen Sie, dass der Graph von f einen Hochpunkt hat, und geben Sie die Koordinaten dieses Hochpunkts an. — 5

b) Geben Sie den Grenzwert von f für $x \to +\infty$ an und beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f für $x \to +\infty$. — 2

c) Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktion f und der zugehörigen Ableitungsfunktion f′. Entscheiden Sie, welcher der Graphen I und II die Ableitungsfunktion f′ darstellt. Begründen Sie Ihre Entscheidung. — 2



d) Weisen Sie nach, dass der Schnittpunkt der Graphen von f und f′ bei $x = -1{,}5$ liegt. — 2

e) Ermitteln Sie den Winkel, unter dem sich die Graphen von f und f′ schneiden. — 4

f) Begründen Sie ohne Rechnung, dass gilt $\int_{-3}^{-2} f'(x)dx > \int_{-1}^{0} f'(x)dx$. — 3

g) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(0|f(0))$ schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Berechnen Sie den Umfang dieses Dreiecks und geben Sie die Koordinaten des Punkts an, der von allen Eckpunkten des Dreiecks den gleichen Abstand hat. — 5

h) Der Koordinatenursprung und ein auf dem Graphen von f liegender Punkt $P(u|v)$ mit $u > 0$ sind gegenüberliegende Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks. Für genau einen Wert u hat das Rechteck eine maximale Fläche. Ermitteln Sie für diesen Fall die Koordinaten des Punkts P. (zur Kontrolle: $A'(u) = (2 - u^2)e^{-u}$) — 5

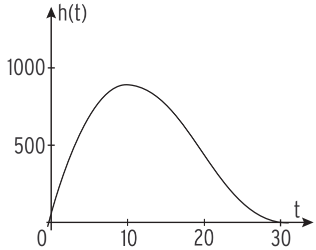
i) Im 4. Quadranten schließen der Graph von f′, die beiden Koordinatenachsen und die Gerade $x = b$ eine Fläche A_b ein. Begründen Sie, dass es einen Wert für b gibt, so dass der Flächeninhalt der Fläche A_b genau 1 FE beträgt. — 4

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Mathematik Kurs auf grundlegendem Anforderungsniveau – Grundkurs

Aufgabenstellung 2

Aufgabe 2.1 Tauchroboter (Fortsetzung)



2 Ein Tauchroboter bewegt sich in vertikaler Richtung. Diese Bewegung lässt sich für $0 \leq t \leq 30$ modellhaft mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h(t) = \frac{9}{40}t^3 - \frac{27}{2}t^2 + \frac{405}{2}t$ beschreiben.
Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Minuten und h(t) der Abstand des Roboters von der Wasseroberfläche in Metern.
Die Abbildung stellt die Bewegung des Roboters dar.

a)	Weisen Sie nach, dass der Roboter zum Zeitpunkt 10 Minuten nach Beobachtungsbeginn den größten Abstand zur Wasseroberfläche hat und dass dieser Abstand 900 Meter beträgt.	3
b)	Berechnen Sie, wie viele Meter der Roboter innerhalb der ersten 15 Minuten nach Beobachtungsbeginn zurücklegt.	3
c)	Beschreiben Sie die Bedeutung des Wendepunkts des Graphen von h im Hinblick auf die Bewegung des Roboters.	2
d)	Betrachtet wird die Phase, in der der Roboter seinen Abstand zur Wasseroberfläche vergrößert. Berechnen Sie den Zeitraum innerhalb dieser Phase, in dem die Geschwindigkeit des Roboters mindestens 29,7 Meter pro Minute ist.	5
		45

Hinweis: *Schüler/in bearbeitet in Aufgabenstellung 2 entweder die Aufgabe 2.1 oder 2.2. SuS wählt in der Prüfung nur eine Aufgabe aus.*

Mathematik Kurs auf grundlegendem Anforderungsniveau – Grundkurs

Aufgabenstellung 2

Aufgabe 2.2 Hochwasserschutz

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Geben Sie an, wie sich die Funktionswerte von f für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ verhalten. 2

b) Ermitteln Sie die Lage und die Art aller Extrempunkte des Graphen von f. 6

c) Zeigen Sie: Es gibt mindestens ein $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass die Gleichung $f'(x_0) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$ erfüllt wird. Erläutern Sie, welche geometrische Bedeutung diese Gleichung hat. 5

d) Weisen Sie nach, dass $F(x) = -\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3$; $x \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist. 4

Es gilt:

I $x = 0$ und $x = 3$ sind die einzigen Nullstellen von f.

II $F(4) = 0$.

Begründen Sie mit Hilfe dieser beiden Eigenschaften die Gültigkeit folgender Aussage:

Durch den Graphen von f, die x-Achse und die Gerade x = 4 werden zwei Flächen begrenzt, deren Flächeninhalt gleich groß ist.

e) Der Punkt $W(1|\frac{1}{3})$ ist der Wendepunkt des Graphen von f. 4

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt W ist die Gerade t.

Ermitteln Sie die Größe des Winkels, in dem die Tangente t die x-Achse schneidet.

Geben Sie an, bei welchem y-Wert die Tangente t die y-Achse schneidet.

f) Damit die Tangente an den Graphen von f an einer Stelle x_T in einem Winkel steigt, der größer oder gleich 21,8° ist, muss x_T in einem Bereich $a \leq x_T \leq b$ liegen. 4

Ermitteln Sie a und b.

[Hinweis: Das Ergebnis kann gerundet angegeben werden.]

Zum Schutz vor Hochwasserschäden sollen die Ufer eines Flusses durch vorgefertigte Betonteile verstärkt werden. Der obere Rand der Betonteile soll links und rechts ohne Knick an das Gelände anschließen.

Die Abbildung 1 zeigt den Querschnitt eines solchen Betonteils.

Der Maßstab ist 1 LE = 1m .

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Mathematik Kurs auf grundlegendem Anforderungsniveau – Grundkurs

Aufgabenstellung 2

Aufgabe 2.2 Hochwasserschutz (Fortsetzung)

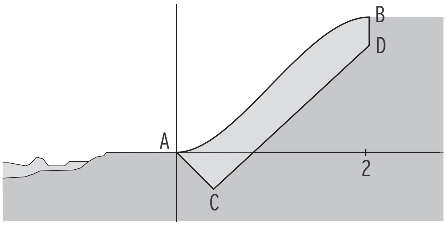


Abb. 1

Der obere Rand der Betonteile zwischen den Punkten A und B wird beschrieben durch den Graphen der Funktion h mit $h(x) = 2{,}25 \cdot f(x)$ für $0 \leq x \leq 2$.

Der untere Rand der Betonteile wird begrenzt durch die Gerade g, die durch die Punkte $C(0{,}4|-0{,}4)$ und $D(2|1{,}2)$ verläuft. An den Seiten werden die Betonteile durch die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ begrenzt.

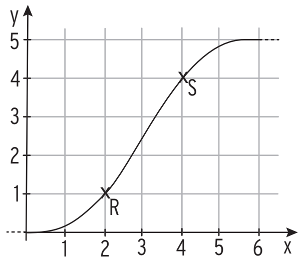
g) Weisen Sie nach, dass $g(x) = x - 0{,}8$ die Funktionsgleichung der Geraden g ist. 2

h) Ermitteln Sie die Größe der Querschnittsfläche eines Betonteils. 5
(zur Kontrolle: $A = 0{,}94\ m^2$)

i) Eine Mitarbeiterin der Herstellerfirma schlägt vor, für die obere Begrenzung der Betonteile nicht den Graphen der Funktion h zu verwenden, sondern einfach die Gerade durch die Punkte A und B. 4
Untersuchen Sie, ob durch diese Änderung die Größe der Querschnittsfläche größer, kleiner oder unverändert sein würde.

j) Zur Befestigung im Erdreich erhalten die Betonteile geradlinige Bohrungen, die sowohl den Graphen von h als auch die Gerade g im rechten Winkel schneiden sollen. 4
Erläutern Sie, wie die Lage dieser Bohrungen ermittelt werden kann.

k) Die Herstellerfirma möchte ähnliche Bauteile entwickeln, die eine größere Höhe und Breite aufweisen. Im mittleren Bereich zwischen den Punkten $R(2|1)$ und $S(4|4)$ soll der obere Rand der Betonteile eine gerade Strecke sein. Links und rechts davon sollen Kurven anschließen, die so gewählt werden, dass an den Übergängen bei $(0|0)$ und R bzw. bei S und $(5|5)$ keine Knicke entstehen.



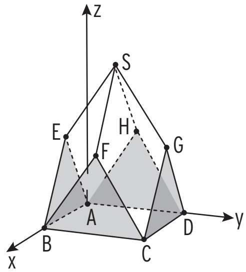
Weisen Sie nach, dass für das Kurvenstück zwischen dem Koordinatenursprung und dem Punkt R der Graph einer Funktion k mit $k(x) = ax^4 + bx^2$ verwendet werden kann.
Bestimmen Sie die Werte für a und b.

45

Mathematik Kurs auf grundlegendem Anforderungsniveau – Grundkurs

Aufgabenstellung 3

Aufgabe 3: Kirchturm



Die Abbildung zeigt modellhaft das Dach eines Kirchturms. Die Eckpunkte der dreieckigen Giebelflächen (grau markiert) und der viereckigen Dachflächen werden durch die Punkte A, B(8|0|0), C(8|8|0), D, E(4|0|6), F(8|4|6), G(4|8|6), H und S(4|4|12) dargestellt. Die vier Dachflächen haben die gleiche Form und die gleiche Größe. Im verwendeten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit einem Meter in der Realität.

Die Materialstärken der Bauteile des Dachs sollen im Folgenden vernachlässigt werden.

a) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Quadrats ABCD doppelt so groß ist wie der Flächeninhalt des Quadrats EFGH. 3

b) Die Ebene L enthält die Punkte C, G und F. Geben Sie eine Gleichung von L in Parameterform an und zeigen Sie, dass auch S in L liegt. 3

c) Die Ebene N verläuft parallel zur Ebene L und geht durch den Punkt B. Weisen Sie nach, dass $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von N ist und bestimmen Sie eine Gleichung von N in Koordinatenform. 3

d) Weisen Sie nach, dass das Viereck CGSF eine Raute ist. 2

e) Gegeben sind drei Ebenen mit den folgenden Gleichungen: 2

$M_1: x = 8$ $\qquad$ $M_2: x - y = 0$ $\qquad$ $M_3: z = 6$

Eine dieser Ebenen stellt eine Symmetrieebene des Kirchendachs dar.
Geben Sie diese Ebene an und beschreiben Sie ihre Lage.

f) Berechnen Sie die Größe des Innenwinkels des Vierecks CGSF im Punkt S sowie den gesamten Flächeninhalt der Dachflächen. 6

g) Die Gerade q_1 verläuft durch S und F, die Gerade q_2 durch S und G. Die beiden Geraden schneiden die xy-Ebene in den Punkten Q_1 bzw. Q_2. Geben Sie das Verhältnis des Abstands von Q_1 und Q_2 zum Abstand von F und G an. Begründen Sie Ihre Angabe. 3

h) Begründen Sie, dass das Gesamtvolumen des Kirchendachs mithilfe des Terms $\frac{1}{3} \cdot 128\ \text{m}^2 \cdot 12\text{m} - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 16\ \text{m}^2 \cdot 6\text{m}$ berechnet werden kann.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Mathematik Kurs auf grundlegendem Anforderungsniveau — Grundkurs

Aufgabenstellung 3

Aufgabe 3: Kirchturm (Fortsetzung)

i) Zur Stabilisierung wird zwischen den durch E und G dargestellten Giebelspitzen ein gerader Stahlträger montiert. Vom Mittelpunkt dieses Stahlträgers aus soll eine möglichst kurze Stütze zum durch $\overline{SF}$ dargestellten Balken verlaufen. Der Punkt, in dem die Stütze auf den Balken trifft, wird im Modell mit R bezeichnet, R stimmt weder mit F noch mit S überein. 4
Beschreiben Sie, wie man die Koordinaten von R ermitteln könnte.

30

Hinweis: *Schüler/in bearbeitet in Aufgabenstellung 3 entweder die Aufgabe zur Analytischen Geometrie oder die Aufgabe zur Stochastik.*
SuS erhält in der Prüfung nur eine Aufgabe. SuS hat keine Wahlmöglichkeit.

Mathematik Kurs auf grundlegendem Anforderungsniveau – Grundkurs

Aufgabenstellung 3

Aufgabe 3: Pakete

In einem Paketzentrum werden pro Jahr viele Millionen Pakete angeliefert. Die Pakete werden automatisch nach ihrem Bestimmungsort sortiert. 10% der Pakete haben das Ziel A, 7% das Ziel B. Die übrigen Pakete haben andere Ziele.

a) Für 100 zufällig ausgewählte Pakete wird untersucht, ob sie das Ziel B haben. 2
Begründen Sie, dass die Binomialverteilung verwendet werden kann, um Aussagen über die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ergebnisse der Untersuchung zu treffen.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 100 zufällig ausgewählten 3
Paketen
- genau neun das Ziel B haben.
- weniger als neun das Ziel B haben.

c) Unter 100 zufällig ausgewählten Paketen haben genau neun das Ziel B. Berechnen Sie 3
die prozentuale Abweichung dieser Anzahl vom Erwartungswert für die Anzahl von Paketen mit dem Ziel B unter 100 zufällig ausgewählten Paketen.

d) Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl ausgewählter Pakete mindestens sein muss, damit 4
mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens ein Paket das Ziel B hat.

Im Paketzentrum werden 20 Pakete zufällig ausgewählt.

e) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 20 ausgewählten Paketen keines das 3
Ziel C hat, beträgt etwa 54%. Ermitteln Sie den Anteil der Pakete mit dem Ziel C unter allen Paketen, die pro Jahr im Paketzentrum angeliefert werden.

f) Zwei Paketboten erhalten jeweils 10 zufällig ausgewählte Pakete. 4
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einer der beiden Paketboten kein Paket mit dem Ziel A erhält.

Alle im Paketzentrum angelieferten Pakete werden im Rahmen der Sortierung gewogen. 5% der Pakete haben eine Masse von mehr als 10kg und gelten damit als schwer. Von den Paketen mit dem Ziel A sind 8% schwer.

Ein Paket wird zufällig ausgewählt. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

S: „Das ausgewählte Paket ist schwer.“

Z: „Das ausgewählte Paket hat das Ziel A.“

g) Mit den Termen $P_Z(S)$ und $P(S \cap Z)$ werden zwei Wahrscheinlichkeiten bezeichnet. 2
Geben Sie für jeden der beiden Terme die Bedeutung im Sachzusammenhang an.

h) Stellen Sie den Sachzusammenhang in einer vollständig ausgefüllten Vierfelder- 3
tafel dar.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Mathematik Kurs auf grundlegendem Anforderungsniveau – Grundkurs

Aufgabe 3: Pakete (Fortsetzung)

i) Untersuchen Sie, ob der Anteil der Pakete mit dem Ziel A unter den schweren Paketen ebenso groß ist wie unter den Paketen, die nicht schwer sind. 3

j) Von den Paketen, die das Ziel B haben, sind 2% schwer. 3
Untersuchen Sie, ob der Anteil der schweren Pakete unter denjenigen, die weder das Ziel A noch das Ziel B haben, kleiner als 5%, gleich 5% oder größer als 5% ist.

30

Summierte Binomialverteilung für n = 100

Gerundet auf vier Nachkommastellen, weggelassen ist „0,“,
alle freien Plätze und alle nicht dargestellten Zeilen enthalten 1,0000.
Wird die Tabelle „von unten“ gelesen (p > 0,5), ist der richtige Wert 1 – (abgelesener Wert)

n	k	p: 0,07	0,10	$\frac{1}{6}$	0,20	0,25	0,30	$\frac{1}{3}$	0,40	0,45	0,50	k	n
	0	0007	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	99	
	1	0060	0003	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	98	
	2	0258	0019	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	97	
	3	0744	0078	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	96	
	4	1632	0237	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	95	
	5	2914	0576	0004	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	94	
	6	4443	1172	0013	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	93	
	7	5988	2061	0038	0003	0000	0000	0000	0000	0000	0000	92	
	8	7340	3209	0095	0009	0000	0000	0000	0000	0000	0000	91	
	9	8380	4513	0213	0023	0000	0000	0000	0000	0000	0000	90	
	10	9092	5832	0427	0057	0001	0000	0000	0000	0000	0000	89	
	11	9531	7030	0777	0126	0004	0000	0000	0000	0000	0000	88	
	12	9776	8018	1297	0253	0010	0000	0000	0000	0000	0000	87	
	13	9901	8761	2000	0469	0025	0001	0000	0000	0000	0000	86	
	14	9959	9274	2874	0804	0054	0002	0000	0000	0000	0000	85	
	15	9984	9601	3877	1285	0111	0004	0000	0000	0000	0000	84	
	16	9994	9794	4942	1923	0211	0010	0001	0000	0000	0000	83	
	17	9998	9900	5994	2712	0376	0022	0002	0000	0000	0000	82	
	18	9999	9954	6965	3621	0630	0045	0005	0000	0000	0000	81	
	19		9980	7803	4602	0995	0089	0011	0000	0000	0000	80	
	20		9992	8481	5595	1488	0165	0024	0000	0000	0000	79	
	21		9997	8998	654	2114	0288	0048	0000	0000	0000	78	
	22		9999	9369	7389	2864	0479	0091	0001	0000	0000	77	
	23			9621	8109	3711	0755	0164	0003	0000	0000	76	
	24			9783	8686	4617	1136	0281	0006	0000	0000	75	
	25			9881	9125	5535	1631	0458	0012	0000	0000	74	
	26			9938	9442	6417	2244	0715	0024	0001	0000	73	
	27			9969	9658	7224	2964	1066	0046	0002	0000	72	
	28			9985	9800	7925	3768	1524	0084	0004	0000	71	
	29			9993	9888	8505	4623	2093	0148	0008	0000	70	
	30			9997	9939	8962	5491	2766	0248	0015	0000	69	
	31			9999	9969	9307	6331	3525	0398	0030	0001	68	
	32				9984	9554	7107	4344	0615	0055	0002	67	
	33				9993	9724	7793	5188	0913	0098	0004	66	
100	34				9997	9836	8371	6019	1303	0166	0009	65	100
	35				9999	9906	8839	6803	1795	0272	0018	64	
	36				9999	9948	9201	7511	2386	0429	0033	63	
	37					9973	9470	8123	3068	0651	0060	62	
	38					9986	9660	8630	3822	0951	0105	61	
	39					9993	9790	9034	4621	1343	0176	60	
	40					9997	9875	9341	5433	1831	0284	59	
	41					9999	9928	9566	6225	2415	0443	58	
	42					9999	9960	9724	6967	3087	0666	57	
	43						9979	9831	7635	3828	0967	56	
	44						9989	9900	8211	4613	1356	55	
	45						9995	9943	8689	5413	1841	54	
	46						9997	9969	9070	6196	2421	53	
	47						9999	9983	9362	6931	3086	52	
	48						9999	9991	9577	7596	3822	51	
	49							9996	9729	8173	4602	50	
	50							9998	9832	8654	5398	49	
	51							9999	9900	9040	6178	48	
	52								9942	9338	6914	47	
	53								9968	9559	7579	46	
	54								9983	9716	8159	45	
	55								9991	9824	8644	44	
	56								9996	9894	9033	43	
	57								9998	9939	9334	42	
	58								9999	9966	9557	41	
	59									9982	9716	40	
	60									9991	9824	39	
	61									9995	9895	38	
	62									9998	9940	37	
	63									9999	9967	36	
	64										9982	35	
	65										9991	34	
	66										9996	33	
	67										9998	32	
	68										9999	31	
n	k	0,93	0,90	$\frac{5}{6}$	0,80	0,75	0,70	$\frac{2}{3}$	0,60	0,55	0,50	k	n

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2022 Grundkurs (gA)

Lösungen

Aufgabenstellung 1 Lösungen

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1 f mit $f(x) = x^3 - 8x^2 + 12x;\ x \in \mathbb{R}$

a) Nullstellen: $f(x) = 0 \qquad x(x^2 - 8x + 12) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = 6$

b) Ansatz für die Tangente: $t(x) = mx + n$ mit $m = f'(1)$; $f'(x) = 3x^2 - 16x + 12$, also $f'(1) = -1$;

$t(x) = -x + n$; Punktprobe mit $P(1 \mid f(1)) = P(1 \mid 5)$: $5 = -1 + n \Rightarrow n = 6$

Tangentengleichung: $t(x) = -x + 6$

1.2 Analysis

a) $f'(0{,}2) = 0$, also $a = 0$

$f''(b) = 0$, z. B für $b = 1$ (Wendestelle)

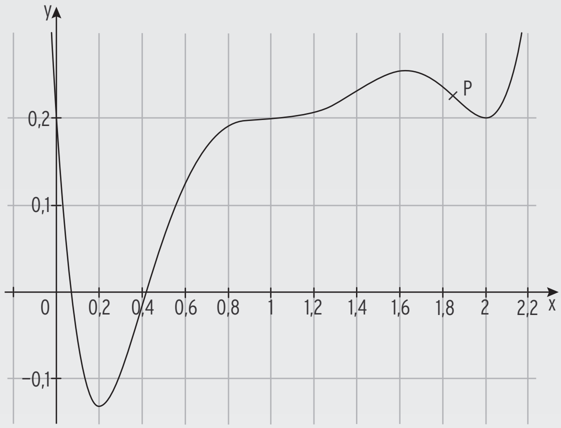
b) $f''(x_P) = 0$:

Es könnte ein Wendepunkt sein.

$f'(x_P) < 0$:

Der Graph muss im Punkt P eine negative Steigung haben.

P ist ein Wendepunkt mit negativer Steigung.



1.3 Analysis

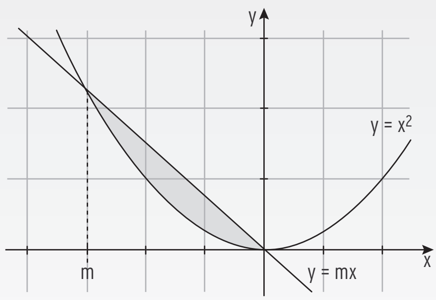
$f(x) = x^2;\ x \in \mathbb{R}$

Schnittstelle: $x^2 = mx \Leftrightarrow x(x - m) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0;\ x_2 = m \quad (m < 0)$

Inhalt der Fläche zwischen Graph von f und Gerade

$$\int_m^0 (mx - x^2)dx = \left[\frac{1}{2}mx^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_m^0 = 0 - \left(\frac{1}{2}m^3 - \frac{1}{3}m^3\right) = -\frac{1}{6}m^3$$

$-\frac{1}{6}m^3 = 36 \Leftrightarrow m = -6 \qquad (36 = 6^2)$



Aufgabenstellung 1 Lösungen

Schüler/in bearbeitet entweder die Analytische Geometrie oder die Stochastik

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.4 Analytische Geometrie

E: $3x - 2y = 0$

a) Einsetzen von P in E: $3 \cdot 1 - 2 \cdot 1{,}5 = 0$ d. h. P liegt in E

b) E enthält die z-Achse.

c) Normalenvektoren stehen senkrecht aufeinander.
$\begin{pmatrix} 2 \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 - 2s = 0$ für $s = 3$

1.5 Analytische Geometrie

a) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ z \end{pmatrix}$ und $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{25 + z^2}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ z \end{pmatrix}$ und $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{25 + z^2}$;

b) Mittelpunkt von $\overline{AB}$: M(4 | 3|0) ; $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ und $\left|\overrightarrow{MC}\right| = z$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{100} = 10$

Flächeninhalt: $\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MC}\right| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot z = 5z = 35$ für $z = 7$

1.4 Stochastik

a) Durch die Betrachtung des Gegenereignisses „Alle drei gezogenen Kugeln sind rot“ erhält man: $P = 1 - \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{5}$

b) Fall: Es sind drei rote und zwei grüne Kugeln in der Urne

P(rg oder gr) = $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{20} =$ 60%

Es wurde eine rote Kugel entfernt.

1.5 Stochastik

a) $\frac{20\,\%}{60\,\%} = \frac{1}{3}$

b) $60\,\% + 30\,\% - 2 \cdot 20\,\% = 50\,\%$

Aufgabenstellung 2 Analysis Lösungen

Aufgabe 2.1 Tauchroboter

1 $f(x) = (x+2)e^{-x}$; $f'(x) = -(x+1)e^{-x}$

a) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$, also $N(-2|0)$,

$f(0) = 2$, also $S_y(0|2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, $f'(x) > 0$ für $x < -1$ und $f'(x) < 0$ für $x > -1$

Hochpunkt: $H(-1|e)$

oder aber mithilfe von $f''(x) = x\,e^{-x}$: $f''(-1) = -e < 0$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ wegen $e^{-x} \to 0$

Der Graph von f nähert sich der x-Achse asymptotisch.

c) Graph II

Begründung: Der Graph II schneidet die x-Achse im Punkt $(x_N|0)$. Der Extrempunkt des Graphen I hat die Koordinaten $(x_E|y_E)$. Da gilt $x_N = x_E$, somit stellt Graph II die Ableitungsfunktion dar.

d) $f(-1{,}5) = 0{,}5e^{1,5}$ $f'(-1{,}5) = -(-0{,}5)e^{1,5} = 0{,}5e^{1,5}$ $f(-1{,}5) = f'(-1{,}5)$

e) Schnittstelle $x = -1{,}5$

$f''(-1{,}5) = -1{,}5e^{1,5}$ Steigung von f′: $\beta \approx -81{,}54°$ (Winkel gegen die Waagrechte)

$f'(-1{,}5) = 0{,}5e^{1,5}$ Steigung von f: $\alpha \approx 65{,}95°$ (Winkel gegen die Waagrechte)

Schnittwinkel: $\alpha = 180° - (65{,}95° + 81{,}54) = 32{,}51°$

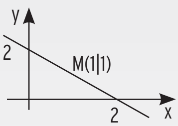
f) Die Funktion f ist im Intervall $[-3; -2]$ monoton steigend, d. h. $f'(x) > 0$. $(x_H = -1)$

Also ist $\int_{-3}^{-2} f'(x)dx > 0$. Der Graph der ersten Ableitungsfunktion f′ verläuft im Intervall $[-1; 0]$ unterhalb der x-Achse, da die Funktion f in diesem Intervall monoton fallend ist.

Es gilt $\int_{-1}^{0} f'(x)dx < 0$. Damit gilt $\int_{-3}^{-2} f'(x)dx > \int_{-1}^{0} f'(x)dx$.

g) $f'(0) = -1$, d. h. die Tangente schneidet die x-Achse im Punkt $(2|0)$. Damit beträgt der gesuchte Umfang $2 + 2 + \sqrt{2^2 + 2^2} = 4 + \sqrt{8}$.

Gesuchter Punkt: $(1|1)$



h) $A(u) = u(u+2)e^{-u} = (u^2 + 2u)e^{-u}$; $u > 0$

$A'(u) = (2u+2)e^{-u} - (u^2+2u)e^{-u} = (2-u^2)e^{-u}$;

$A'(u) = 0 \Rightarrow u = \sqrt{2}$ (wegen $u > 0$)

$v = f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2}+2)e^{-\sqrt{2}}$ und damit Eckpunkt $P(\sqrt{2} \mid (\sqrt{2}+2)e^{-\sqrt{2}}) = P(\sqrt{2} \mid \frac{\sqrt{2}+2}{e^{\sqrt{2}}})$

i) $A_b = -\int_0^b f'(x)dx = -(f(b) - f(0)) = 2 - f(b)$

$A_b = 1$: b muss so gewählt werden, dass $f(b) = 1$. Wegen $f(0) = 2$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ hat diese Gleichung eine Lösung.