

Bohner
Ott
Deutsch

Mathematik

*für das Berufskolleg –
Berufliches Gymnasium*

Jahrgangsstufen 12 und 13



Merkur 

Verlag Rinteln

Nordrhein-Westfalen

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Kurt Bohner

Lehrauftrag Mathematik am BS Wangen

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Ronald Deusch

Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Beratende Tätigkeit:

Norbert Lengersdorf

Lehrauftrag Mathematik am Berufskolleg für Wirtschaft und Verwaltung in Herzogenrath

Studium der Mathematik und Physik an der RWTH Aachen

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die in diesem Buch zitierten Internetseiten wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.

Stand: Juli 2017

Umschlag: Kreis oben: www.adpic.de

Kreis unten: Robert Kneschke – Fotolia.com

* *

1. Auflage 2018

© 2018 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de

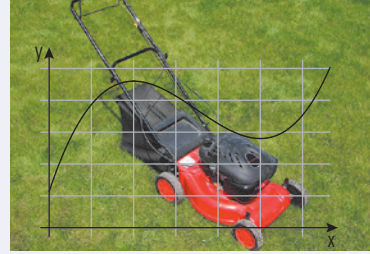
Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-0666-8

1.3 Extrempunkte

Beispiel 1

Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 10x + \frac{17}{3}$ beschreibt näherungsweise die wöchentlichen Verkaufszahlen von Rasenmähern. Dabei ist x die Zeit in Wochen nach Wiedereröffnung der Geschäftsräume. Untersuchen Sie die Entwicklung der Verkaufszahlen.



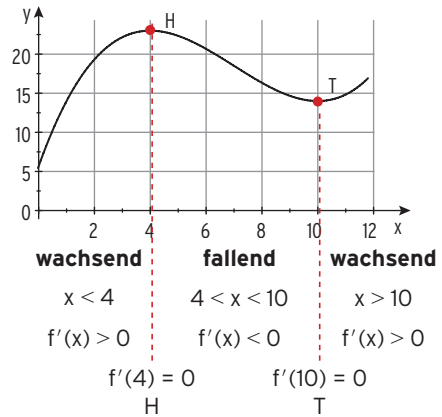
Lösung

Das Schaubild von f wird gezeichnet. Die Verkaufszahlen nehmen zu bis zur Woche 4 mit 23 Stück, danach nehmen sie ab bis zur Woche 10 mit 14 verkauften Rasenmähern, um danach wieder zuzunehmen.

Erläuterungen

Man liest ab:

f ist monoton
für



Im Übergang

von **wachsend zu fallend** liegt ein **Hochpunkt**,
von **fallend zu wachsend** liegt ein **Tiefpunkt**.

Beachten Sie

Ein Kurvenpunkt $P(x_1 | f(x_1))$ heißt **Hochpunkt** / **Tiefpunkt**, wenn $f(x_1)$ der **größte** / **kleinste**

Funktionswert für alle x aus einer Umgebung von x_1 ist.

Dieser **größte** / **kleinste** Funktionswert $f(x_1)$ heißt **relatives (lokales) Maximum** / **Minimum**.

Notwendige Bedingung für (lokale) Extremstellen: $f'(x_1) = 0$.

Dabei liegt x_1 im Innern des Definitionsbereichs.

Hochpunkte bzw. Tiefpunkte nennt man **Extrempunkte** des Schaubildes von f .

Der x -Wert des Extrempunktes heißt Extremstelle.

Nachweis für Extrempunkte (1. Möglichkeit):

Nachweis mit **Vorzeichenwechsel** (VZW von $f'(x)$):

VZW von $f'(x)$ an der Stelle

Hinweis: $f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + 10$

$f'(3) = 1,75 > 0$; $f'(4) = 0$; $f'(5) = -1,25 < 0$

$x = 4$

von

+ nach -

führt auf einen

Hochpunkt

mit $f(4) = 23$ und $f(10) = 14$

H(4|23)

$x = 10$

von

- nach +

führt auf einen

Tiefpunkt

mit $f(4) = 23$ und $f(10) = 14$

T(10|14)

Nachweis mithilfe der zweiten Ableitung von f (2. Möglichkeit):

Schaubild von f

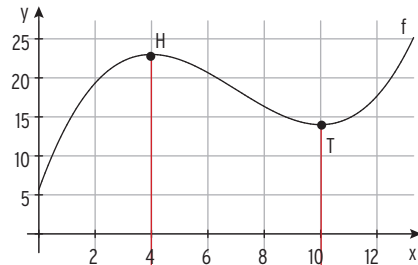
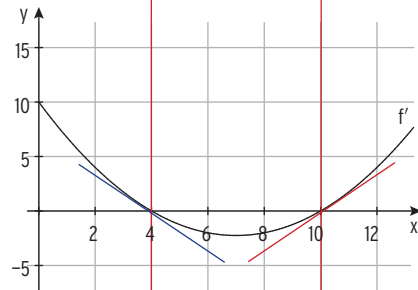


Schaubild von f'

$f''(x)$ ist die **Steigung** des Schaubildes von f' an der Stelle x .



Die **Steigung** des Graphen von f' an der Stelle

Das bedeutet:

Das Schaubild von f hat dort einen

$x = 4$
ist **negativ**
 $f''(4) < 0$
Hochpunkt

$x = 10$
ist **positiv**
 $f''(10) > 0$
Tiefpunkt

Hinweis: $x = 4$ ist **Maximalstelle**, $x = 10$ ist **Minimalstelle**.

Berechnung von $f''(4)$ und $f''(10)$

Zweite Ableitung von f : $f''(x) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

Einsetzen der x -Werte in $f''(x)$:

$$f''(4) = -\frac{3}{2} < 0 \quad f''(10) = \frac{3}{2} > 0$$

Bestimmung von Extrempunkten

Notwendige und hinreichende Bedingung für Extremstellen:

$$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$$

- **Notwendige Bedingung:** $f'(x) = 0$

liefert die Stellen $x_1, x_2, \dots$ mit waagrechter Tangente.

- **Nachweis für Hochpunkt bzw. Tiefpunkt**

durch **Einsetzen von x_1** in $f''(x)$

Ist $\begin{cases} f''(x_1) < 0 \\ f''(x_1) > 0 \end{cases}$, so hat der Graph von f einen $\begin{cases} \text{Hochpunkt } H(x_1 | f(x_1)) \\ \text{Tiefpunkt } T(x_1 | f(x_1)) \end{cases}$.

Beispiel 2

➡ Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$; $x \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f .

Lösung

Ableitungen: $f'(x) = -x^2 + 4x - 3$; $f''(x) = -2x + 4$

Hinreichende Bedingung für Extremstellen: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

Stellen mit waagrechter Tangente:

$$x_1 = 1; x_2 = 3$$

Nachweis durch Einsetzen der x -Werte in $f''(x)$

$$f''(1) = 2 > 0:$$

f hat in $x = 1$ ein (relatives) Minimum,

Der Graph von f hat einen Tiefpunkt an der Stelle $x_1 = 1$.

$$f''(3) = -2 < 0:$$

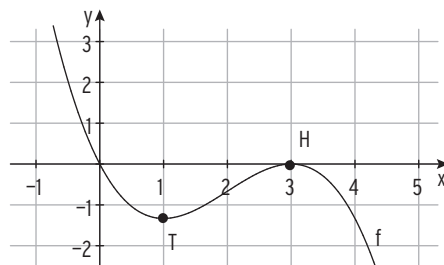
f hat in $x = 3$ ein (relatives) Maximum,

Der Graph von f hat einen Hochpunkt an der Stelle $x_2 = 3$.

Mit $f(1) = -\frac{4}{3}$ und $f(3) = 0$ erhält man:

Tiefpunkt $T\left(1 \mid -\frac{4}{3}\right)$; **Hochpunkt** $H(3 \mid 0)$

Schaubild von f :

**Aufgaben**

1 Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Hoch- und Tiefpunkte.

Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x -Achse.

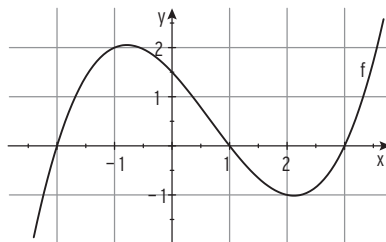
Skizzieren Sie den Graphen von f in ein Achsenkreuz.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 3$ b) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$ c) $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2$

2 Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f .

a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 2$ b) $f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 9x)$ c) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$

3 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f mit $f(x) = ax^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$. Bestimmen Sie a mithilfe der Zeichnung. Ermitteln Sie Hoch- und Tiefpunkt des Graphen von f .



Kosten, Erlös und Gewinn bei Angebotsmonopol

Beispiel 1

- ➡ Für die Preis-Absatz-Funktion p_N eines Monopolisten gilt: $p_N(x) = -3x + 90$.
 K mit $K(x) = \frac{1}{60}(x^3 - 30x^2 + 1860x + 1400)$ beschreibt für $x \geq 0$ die Gesamtkosten.
- Bestimmen Sie den maximalen ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich.
 - Bestimmen Sie die gewinnmaximale Absatzmenge und den zugehörigen Marktpreis.

Lösung

a) Ökonomisch sinnvoller Definitionsbereich:

Aus $p_N(x) = -3x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 30$ folgt $D_{ök} = [0; 30]$.

b) Aus $p_N(x) = -3x + 90$ und $E(x) = p_N(x) \cdot x$

erhält man die **Erlösfunktion E** mit:

$$E(x) = -3x^2 + 90x$$

Gewinnfunktion G mit $G(x) = E(x) - K(x)$:

$$G(x) = -\frac{1}{60}(x^3 + 150x^2 - 3540x + 1400)$$

Gewinnmaximale Ausbringungsmenge

Bedingung: $G'(x) = 0 \wedge G''(x) < 0$

$$G'(x) = 0 \quad -\frac{1}{60}(3x^2 + 300x - 3540) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 100x - 1180 = 0$$

Lösung mit pq-Formel oder mit GTR/CAS: $x_1 \approx 10,66$; $x_2 \approx -110,66 < 0$

$x_1 \approx 10,66$ ist die einzige sinnvolle Lösung.

Maximaler Gewinn:

$$G_{\max} = G(10,66) = 301,32$$

Gewinnmaximaler Preis

Der maximale Gewinn wird in $x_{\max} = 10,66$ erwirtschaftet.

Angebotspreis bei maximalem Gewinn:

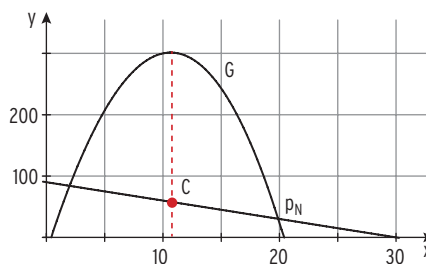
Einsetzen von $x_{\max}$ in $p_N(x) = -3x + 90$

ergibt: $p_N(10,66) = 58,02$

Gewinnmaximaler Preis: 58,02 GE/ME

Dieser Preis wird auch **Cournot'scher Preis** genannt. Der Punkt C(10,66 | 58,02) heißt

Cournot'scher Punkt. Legt der Monopolist seinen Verkaufspreis auf 58,02 GE pro ME fest, so erzielt er den größten Gewinn.



Beachten Sie

Die Gerade mit der Gleichung $x_{\max}$ schneidet das Schaubild der **Preis-Absatz-Funktion** im **Cournot'schen Punkt** C($x_{\max} | p_N(x_{\max})$).

Die x-Koordinate des Cournot'schen Punktes bezeichnet die Absatzmenge, bei der der **maximale Gesamtgewinn** erzielt wird, die y-Koordinate von C ist der zugehörige Preis pro ME.

Gewinnmaximale Absatzmenge:

$$x_{\max}$$

Gewinnmaximaler Preis:

$$p_N(x_{\max}) = \frac{E(x_{\max})}{x_{\max}}$$

Beispiel 2

➔ Für die Gesamtkostenfunktion K eines Monopolisten gilt: $K(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 96$.
 Er produziert mit der Preis-Absatzfunktion $p_N(x) = -10x + 120$.
 Ein Monopolist will den Preis so festsetzen, dass Gewinn erzielt wird.
 Bestimmen Sie das Preisintervall.

Lösung

Erlösfunktion E: $E(x) = p_N(x) \cdot x = -10x^2 + 120x$

Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x) = -10x^2 + 120x - (x^3 - 12x^2 + 60x + 96)$

$G(x) = 0$ führt auf die Lösungen: $(x_1 \approx -7,58 < 0); x_2 \approx 1,58; x_3 = 8$

Gewinnschwelle: $x_{GS} = 1,58$

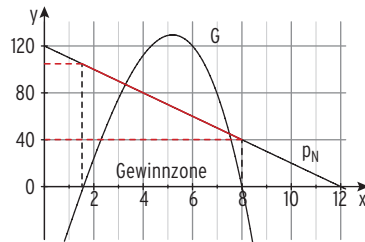
Gewinngrenze: $x_{GG} = 8$

Preisfestlegung: $p_N(1,58) = 104,2$;

$p_N(8) = 40$

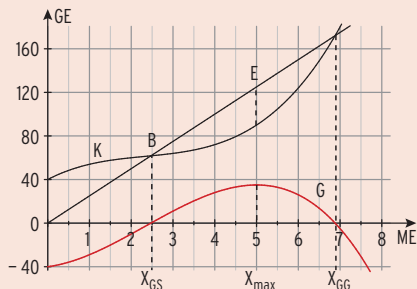
Der Preis muss zwischen 40 GE/ME und 104,2 GE/ME liegen.

Preisintervall: $(40; 104,2)$



Gesamtkosten, Erlös und Gewinn

bei vollständiger Konkurrenz



Kostenfunktion: $K(x) > 0$; K ist monoton wachsend.

Konstanter Stückpreis p

Erlösfunktion: $E(x) = p \cdot x$

Erlösgerade

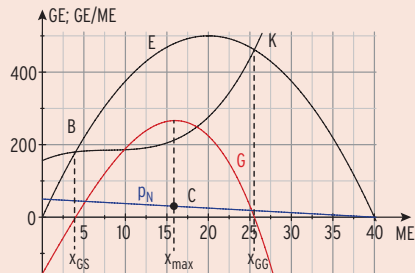
Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x)$

Gewinnzone: $G(x) = 0$ führt auf die Gewinnschwelle x_{GS} und die Gewinngrenze x_{GG} .

Break-Even-Punkt $B(x_{GS} | K(x_{GS}))$

Gewinnmaximum in x_{max}

bei Angebotsmonopol



Preis-Absatzfunktion: $p_N(x) = a x + b$

Erlösfunktion: $E(x) = p_N(x) \cdot x$

Erlösparabel

Gewinnmaximaler Preis: $p_N(x_{max})$

Cournot'scher Punkt $C(x_{max} | p_N(x_{max}))$

Aufgaben

- 1** Die Gesamtkosten eines Polypolisten in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge x in Mengeneinheiten (ME) werden beschrieben durch die Funktion K mit $K(x) = \frac{1}{4}x^3 - 6x^2 + 50x + 280$; $K(x)$ in Geldeinheiten (GE).
Die Kapazitätsgrenze liegt bei 24 ME.
Die produzierte Ware wird für 44 GE pro ME verkauft.
- Zeichnen Sie das Schaubild von K und der Erlösfunktion E in ein Koordinatensystem.
 - Die Gewinnschwelle liegt zwischen 9 ME und 10 ME. Bestimmen Sie die Gewinnschwelle auf eine Dezimale gerundet.
 - Ermitteln Sie die Menge, die das Unternehmen produzieren muss, um maximalen Gewinn zu erzielen. Geben Sie den maximalen Gewinn an.
 - Berechnen Sie die durchschnittliche Zunahme der Gesamtkosten je Stück, wenn die Produktion von 10 auf 15 Stück erhöht wird.
 - Bestimmen Sie die Ausbringungsmenge mit dem geringsten Kostenzuwachs und geben Sie diesen an. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.



- 2** Gesamtkostenfunktion und Erlösfunktion eines Monopolisten sind durch $K(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 98$ und $E(x) = -10x^2 + 120x$ gegeben.
Die Kapazitätsgrenze wird bei einer Produktion von 12 ME erreicht.
- Die Gewinnzone endet etwa bei 8 ME. Überprüfen Sie.
 - Bei 4 ME beträgt der Gewinn 110 GE. Ermitteln Sie die Produktionsmenge, bei der der Gewinn ebenfalls 110 GE beträgt.
 - Bestimmen Sie das Gewinnmaximum.
 - Geben Sie den Preis an, damit der maximale Gewinn erwirtschaftet wird. Bestimmen Sie die Koordinaten des Cournot'schen Punktes.
- 3** Die Firma Anton Thomalle in Soest baut Motoren. Die Gesamtkosten des Motors ES1A in € betragen $K(x) = 0,1x^3 - 7x^2 + 220x + 800$; der Erlös pro Stück liegt bei 250 €. Die Kapazitätsgrenze liegt bei 80 Stück.
- An der Kapazitätsgrenze wird ein Gewinn erzielt. Überprüfen Sie diese Behauptung.
 - Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.
 - Prüfen Sie, ob die Unternehmung bei Produktion und Verkauf von 8 ME einen positiven Deckungsbeitrag erzielt. Geben Sie diesen gegebenenfalls an.
- 4** Die Jäger GmbH beschreibt ihre Kosten mit folgender Funktion:
 $K(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 15x + 36$; dabei ist x in ME und $K(x)$ in GE angegeben.
Das Produkt wird zum Preis von 15 GE/ME am Markt verkauft.
Das Unternehmen will seinen maximalen Gewinn steigern, ist sich aber unschlüssig, welche Strategie es verfolgen soll.
Es stehen zwei alternative Varianten zur Auswahl:
Variante A: Die Fixkosten werden um 10 % gesenkt.
Variante B: Die variablen Kosten werden um 5 % gesenkt.
Begründen Sie, welche Variante für das Unternehmen günstiger ist.

Betriebsminimum und kurzfristige Preisuntergrenze

Beispiel

➔ Die Gesamtkostenfunktion K eines Unternehmens ist

$$K(x) = x^3 - 75x^2 + 2100x + 8000.$$

Das Unternehmen muss aus Konkurrenzgründen seinen Verkaufspreis senken und ist bereit, die fixen Kosten als Verlust in Kauf zu nehmen. Beurteilen Sie diese Situation.

Lösung

Der Verkaufspreis muss so gestaltet sein, dass die minimalen variablen Stückkosten gedeckt sind. In diesem Fall macht das Unternehmen einen Verlust in Höhe der Fixkosten.

Für die variablen Stückkosten (Kosten pro ME) gilt: $k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$

Aus

$$K(x) = x^3 - 75x^2 + 2100x + 8000$$

folgt mit $K_{\text{fix}} = 8000$

$$K_v(x) = x^3 - 75x^2 + 2100x$$

und daraus die **variablen Stückkosten** k_v :

$$k_v(x) = x^2 - 75x + 2100$$

Relatives Minimum von k_v : $k'_v(x) = 0$

$$2x - 75 = 0 \Leftrightarrow x = 37,5$$

Hinweis: Die k_v -Parabel ist nach oben geöffnet und nimmt in x_s ein Minimum an.

Minimum:

$$k_v(37,5) = 693,75$$

Für $x = 37,5$ nimmt $k_v(x)$ ein **(relatives und absolutes) Minimum** an.

Betriebsminimum $x_{\text{BM}} = 37,5$. Das **Minimum der variablen Stückkosten** beträgt

693,75 GE/ME. **Kurzfristige Preisuntergrenze (KPU):** KPU = 693,75 GE/ME

Ergebnis: 693,75 GE pro ME ist der **kleinstmögliche** Preis, zu dem das Unternehmen seine Ware verkaufen kann, wenn die fixen Kosten als Verlust in Kauf genommen werden.

Hinweis: Ein absolutes Minimum (Maximum) wird auch als globales Minimum (Maximum) bezeichnet.

Beachten Sie

Das **Betriebsminimum** x_{BM} ist die Ausbringung (x -Wert), bei der die **variablen Stückkosten minimal** sind.

Bedingung für x_{BM} : $k'_v(x_{\text{BM}}) = 0$

(Der Nachweis $k''_v(x_{\text{BM}}) > 0$ ist für K ertragsgesetzlich stets erfüllt.)

Das Minimum der variablen Stückkosten $k_v(x_{\text{BM}})$ stellt die **kurzfristige Preisuntergrenze (KPU)** dar, denn kurzfristig lässt sich der Verkaufspreis bis auf diese variablen Stückkosten senken, wenn das Unternehmen die fixen Kosten als Verlust in Kauf nimmt.

Die **Grenzkostenkurve** schneidet die **Kurve der variablen Stückkosten k_v** in deren Tiefpunkt (in x_{BM}) (falls dieser existiert).

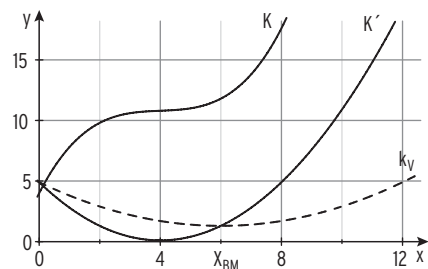
In x_{BM} sind **folgende Bedingungen erfüllt:**

$$k'_v(x) = 0 \text{ (waagrechte Tangente an die } k_v\text{-Kurve)}$$

$$K'(x) = k_v(x)$$

(Schnittpunkt von K' -Kurve und k_v -Kurve)

am Beispiel: $K(x) = 0,1x^3 - 1,2x^2 + 4,9x + 4$



Betriebsoptimum und langfristige Preisuntergrenze

Beispiel

➡ Die Gesamtkosten für ein Produkt eines Unternehmens werden bestimmt durch die Funktion K mit $K(x) = x^3 - 75x^2 + 2100x + 8000$, $x \in [0; 60]$.

Das Unternehmen muss aus Konkurrenzgründen seinen Verkaufspreis senken.

Bestimmen Sie den kleinsten Verkaufspreis für eine verlustfreie Produktion.

Lösung

Um langfristig bestehen zu können, muss der Verkaufspreis mindestens so hoch sein wie die Stückkosten. Bei diesem Preis wird kein Gewinn und kein Verlust gemacht.

Für die **Stückkosten** (Gesamtkosten pro ME) gilt: $k(x) = \frac{K(x)}{x}$

$$k(x) = x^2 - 75x + 2100 + \frac{8000}{x}$$

Bedingung für Minimum: $k'(x) = 0$ und $k''(x) > 0$

Ableitungen mit der **Potenzregel**:

$$k'(x) = 2x - 75 - \frac{8000}{x^2}; \quad k''(x) = 2 + \frac{16000}{x^3}$$

$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$$

Notwendige Bedingung: $k'(x) = 0$

$$2x - 75 - \frac{8000}{x^2} = 0 \quad | \cdot x^2$$

$$2x^3 - 75x^2 - 8000 = 0$$

$$x = 40$$

Sinnvolle Lösung:

Mit $k''(40) > 0$: **für $x = 40$ nimmt $k(x)$ ein (relatives und absolutes) Minimum an.**

Einsetzen in $k(x)$ ergibt:

$$k(40) = 900$$

Ergebnis: Für $x = 40$ nimmt $k(x)$ das Minimum

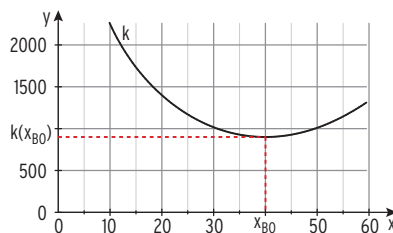
$$k(40) = 900 \text{ an.}$$

Für 40 ME betragen die Stückkosten 900 GE pro ME.

Schaubild der **Stückkostenfunktion k** :

Da die Stückkosten für kleine und für sehr große Produktionsmengen gegen unendlich streben, ist das **relative Minimum** von k stets auch das **absolute Minimum von k** .

Ergebnis: Das Produkt muss mindestens für 900 GE/ME verkauft werden, um langfristig am Markt bestehen zu können.



Erläuterungen:

Die Ausbringungsmenge, bei der die **Stückkosten minimal** sind, nennt man **Betriebsoptimum** $x_{BO} = 40$. Setzt man $x_{BO} = 40$ in $k(x)$ ein, so erhält man das **Minimum der Stückkosten**: $k(40) = 900$ (GE). Diesen Geldwert bezeichnet man als **langfristige Preisuntergrenze (LPU)**, denn 900 GE pro ME ist der **kleinstmögliche Verkaufspreis**, zu dem das Unternehmen seine Ware verkaufen kann, bei einer verlustfreien Produktion. Bei Produktion und Verkauf von 40 ME sind bei einem Stückerlös von 900 GE **alle Kosten gedeckt**, das Unternehmen macht keinen Verlust und keinen Gewinn.

Preiselastizität

Preiselastizität der Nachfrage

Bei einer Ware wird Angebot und Nachfrage über den Preis reguliert. Eine Preisänderung hat eine Mengenänderung zur Folge, welche durch die Nachfragefunktion bestimmt wird.

Die Stärke der Reaktion bei einem bestimmten Preis wird untersucht.

Die Reaktion der Nachfrage auf Veränderungen des Preises misst man mit dem

Elastizitätskoeffizienten e_N . Darunter versteht man die prozentuale (relative) Veränderung der Nachfrage bei prozentualen (relativen) Preisänderungen.

$$\text{Preiselastizität der Nachfrage } e_N = \frac{\text{relative Mengenänderung}}{\text{relative Preisänderung}} = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

Beispiele

1) Eine Preiserhöhung für ein Gut um 1 % hat einen Nachfragerückgang

a) um 5 % zur Folge. Der Elastizitätskoeffizient hat den Wert $e_N = \frac{-5\%}{1\%} = -5$.

Die Nachfrage heißt in diesem Fall **elastisch**, da $e_N < -1$.

b) um 0,5 % zur Folge. Der Elastizitätskoeffizient hat den Wert $e_N = \frac{-0,5\%}{1\%} = -0,5$.

Die Nachfrage reagiert **unelastisch**, da $e_N > -1$.

Steigt der Preis des Gutes um ein Prozent, wird die Nachfrage um weniger als ein Prozent zurückgehen.

c) um 1 % zur Folge. Der Elastizitätskoeffizient hat den Wert $e_N = \frac{-1\%}{1\%} = -1$.

Die Nachfrage reagiert **fließend**, da $e_N = -1$.

Eine Preiserhöhung um 1 % bewirkt einen Nachfragerückgang um 1 %.

2) Eine Marktuntersuchung hat ergeben, dass 400 Kunden eine Ware zu 450 € kaufen würden. Bei einem Preis von 300 € würden 1150 Käufer zugreifen.

Für die **Preiselastizität der Nachfrage** bei einem Preis von 450 € gilt dann für die

$$\text{Nachfragemenge } x = 450 \text{ und Preis } p: e_N = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\frac{400 - 1150}{400}}{\frac{450 - 300}{450}} = \frac{-\frac{750}{400}}{\frac{150}{450}} = -\frac{750}{150} \cdot \frac{450}{400} = -5,625$$

Interpretation: Die Nachfrage heißt (sehr) **elastisch**, eine 1% ige Preiserhöhung hat einen 5,6 %igen Nachfragerückgang zur Folge.

Beachten Sie

Bei der **Preiselastizität der Nachfrage** gilt:

$$e_N(x) = \frac{p_N(x)}{x} \cdot \frac{1}{p_N'(x)} \quad (\text{wegen } e_N(x) = \frac{p_N(x)}{x} \cdot \frac{1}{\frac{\Delta p_N}{\Delta x}} \text{ und } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta p_N}{\Delta x} = p_N'(x))$$

Die Funktion e_N heißt **Elastizitätsfunktion der Nachfrage**.

Die Nachfrage heißt in x_0

elastisch, wenn $e_N(x_0) < -1$, **unelastisch**, wenn $-1 < e_N(x_0) < 0$

und **fließend**, wenn $e_N(x_0) = -1$.

Bemerkung: Die Preiselastizität der Nachfrage gibt näherungsweise an, um wie viel % sich die Nachfrage bei einer Erhöhung des aktuellen Preises p_0 um 1 % ändert (verringert).

Da Nachfragefunktionen im Regelfall streng **monoton fallend** sind, ist die Preiselastizität der Nachfrage **negativ**.

Die **Nachfrage x** ist vom Preis abhängig.

Beispiel

➡ Gegeben ist eine Nachfragefunktion p_N durch $p_N(x) = -2x + 5300$; $x \in D_{ök}$.

a) Bestimmen Sie die Preiselastizität $e_N(x)$ in Abhängigkeit von der Menge x .

b) Ermitteln Sie die Stelle, für die die Nachfrage fließend ist.

Stellen Sie die Funktion e_N grafisch dar.

Geben Sie die Bereiche an, in denen die Nachfrage elastisch bzw. unelastisch ist.

Lösung

a) Ableitung: $p'_N(x) = -2$

Für die Preiselastizität $e_N(x)$ gilt:

$$e_N(x) = \frac{p_N(x)}{x} \cdot \frac{1}{p'_N(x)} = \frac{-2x + 5300}{x} \cdot \frac{1}{(-2)}$$

$$e_N(x) = \frac{-2x + 5300}{-2x}$$

b) Ökonomisch sinnvoller Definitionsbereich:

Bedingung: $p_N(x) = 0 \quad x = 2650$

$D_{ök} = [0; 2650]$

Die Nachfrage ist fließend, wenn $e_N(x) = -1$.

$$\frac{-2x + 5300}{-2x} = -1$$

Lösung der Gleichung: $x = 1325$.

Die Nachfrage ist fließend für $x = 1325$.

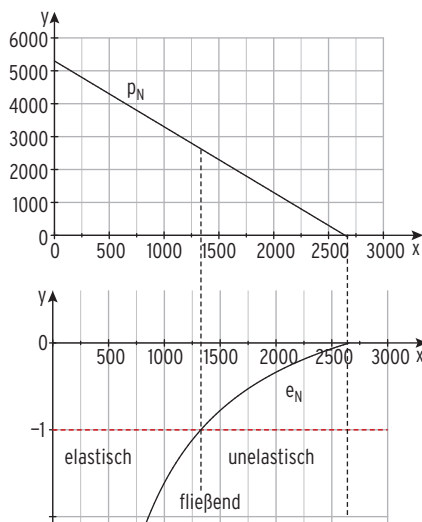
Grafische Darstellung von e_N :

Die Nachfrage ist elastisch, wenn $e_N(x) < -1$.

Mithilfe der Zeichnung: $0 < x < 1325$

Die Nachfrage ist unelastisch, wenn $-1 < e_N(x) < 0$.

Mithilfe der Zeichnung: $1325 < x < 2650$



Bemerkung: Die Nachfrage ist umso **elastischer**, je besser sich eine Ware durch eine andere Ware ersetzen lässt (Beispiel: Mineralwasser).

Die Nachfrage ist umso **unelastischer**, je unentbehrlicher und je schwerer ersetzbar die Ware ist (Beispiel: wirksames Medikament).

Produktionsentwicklung

Beispiel

- ➡ Die Firma Transi produziert einen neuen MP3-Player. Marktanalysen haben ergeben, dass die wöchentlichen Verkaufszahlen durch folgende Funktion f mit $f(t) = 1000te^{-0,1t}$; $t \in \mathbb{R}_+^*$ modellhaft beschrieben werden können. (t in Wochen nach Verkaufsbeginn; $f(t)$ in Stückzahl pro Woche.)
- Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion f .
 - Bestimmen Sie den Zeitpunkt der Markteinführung, so dass das Maximum der wöchentlichen Verkaufszahlen in die erste Dezemberwoche fällt. Bestimmen Sie, wie viele Geräte höchstens pro Woche verkauft werden.
 - Geben Sie die langfristige Entwicklung der Verkaufszahlen an.

Lösung

- a) Schaubild von f

- b) f mit $f(t) = 1000te^{-0,1t}$

Ableitungen mit der Produktregel und der Kettenregel:

$$f'(t) = 100(10 - t)e^{-0,1t}$$

$$f''(t) = 10(-20 + t)e^{-0,1t}$$

Maximum der Verkaufszahlen

$$\text{Bedingung: } f'(t) = 0$$

$$100(10 - t)e^{-0,1t} = 0$$

Satz vom Nullprodukt anwenden:

$$10 - t = 0$$

$$t = 10$$

Nachweis:

$$f''(10) = -100e^{-1} < 0$$

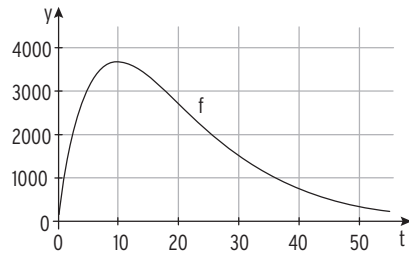
$t = 10$ ist eine Maximalstelle.

Maximalwert:

$$f(10) = 10^4 e^{-1} \approx 3678,8$$

Die Markteinführung sollte 10 Wochen vor der ersten Dezemberwoche stattfinden, also in der 3. Septemberwoche. Die maximale wöchentliche Verkaufszahl beträgt ca. 3678 Geräte.

- c) Mithilfe der Abbildung: Langfristig ($t \rightarrow \infty$) streben die Verkaufszahlen gegen null. Mögliche Gründe: Nach der Markteinführung wird die Neuigkeit stark nachgefragt. Ein anderes Gerät wird später zum Konkurrenzprodukt und verdrängt den MP3-Player vom Markt. Zusätzlich tritt nach einer gewissen Zeit eine Sättigung ein.

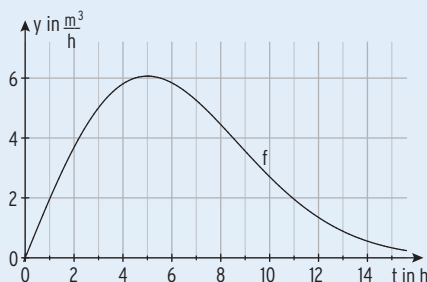


Beispiel

- ➔ Die Funktion f mit $f(t) = 2te^{-0,02t^2}$; $0 \leq t \leq 15$, beschreibt näherungsweise die Sauerstoffproduktion einer Pflanze in m^3 pro Stunde (m^3/h). Dabei ist t die Zeit in Stunden nach Sonnenaufgang,
- Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f im Sachzusammenhang.
 - Bestimmen Sie den Zeitpunkt, in dem die Sauerstoffproduktion am stärksten abnimmt.
 - Ermitteln Sie den Zeitraum, in dem mindestens 4 m^3 Sauerstoff pro Stunde produziert werden

Lösung

- a) Die Sauerstoffproduktion beginnt bei Sonnenaufgang ($t = 0$) und „endet“ bei $t = 15$ (z. B. Sonnenuntergang). Die größte Menge an Sauerstoff von etwa 6 m^3 pro Stunde wird nach 5 Stunden ($t = 5$) produziert, danach nimmt die Sauerstoffproduktion ab und strebt gegen Null.



- b) f mit $f(t) = 2te^{-0,02t^2}$

Ableitungen mit der Produktregel und der Kettenregel:

$$f'(t) = 2e^{-0,02t^2}(-0,04t^2 + 1); f''(t) = 2e^{-0,02t^2}(0,0016t^3 - 0,12t)$$

Die Sauerstoffproduktion nimmt **am stärksten ab in der Wendestelle**.

$$\text{Bedingung: } f''(t) = 0$$

$$0,0016t^3 - 0,12t = 0$$

$$t_1 = 0; t_2 \approx 8,66$$

In $t_1 = 0$ nimmt die Sauerstoffproduktion **am stärksten zu**: $f'(0) = 2 > 0$.

In $t_2 \approx 8,66$ nimmt die Sauerstoffproduktion **am stärksten ab**: $f'(8,66) = -0,89 < 0$.

Die **stärkste Abnahme** der momentanen Sauerstoffproduktion beträgt $0,89 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ pro h.

- c) Bedingung: $f(t) \geq 4$

Lösung der Gleichung $f(t) = 4$:

$$2te^{-0,02t^2} = 4$$

Mit GTR/CAS:

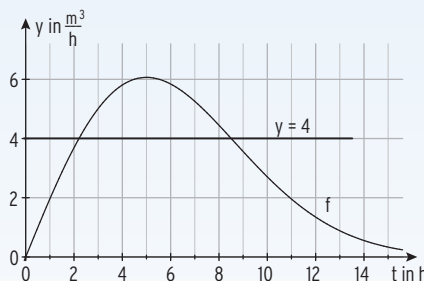
$$t_1 \approx 2,2; t_2 \approx 8,5$$

Im Zeitraum von etwa

2,2 Stunden bis 8,5 Stunden

nach Sonnenaufgang werden

mehr als 4 m^3 Sauerstoff pro Stunde produziert.



2 Stammfunktion und unbestimmtes Integral

Stammfunktion

Beispiel

➔ Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = x^2$. Bestimmen Sie den Funktionsterm einer Funktion F , für die gilt: $F'(x) = f(x)$.

Lösung

$F'(x) = f(x)$ entsteht durch **Ableiten** von F , F entsteht durch **Aufleiten** von f .

Aufleiten ergibt $F(x) = \frac{1}{3}x^3$

oder $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ oder $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5$

Für beliebig viele Funktionen F , die sich nur um eine additive Konstante unterscheiden, gilt: $F'(x) = x^2$.

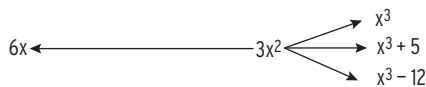
Festlegung: Eine ableitbare (differenzierbare) **Funktion F** heißt **Stammfunktion der Funktion f** , wenn gilt: $F'(x) = f(x)$

Bestimmung von Stammfunktionen

Beispiele

$f(x)$	$F(x)$	Probe durch Ableiten: $F'(x)$
x	$\frac{1}{2}x^2 - 3$	x
x^3	$\frac{1}{4}x^4 + 1$	x^3
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$x^n, n \neq -1$
$3x$	$3 \cdot \frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2}x^2$	$3x$
$a \cdot x^n$	$a \cdot \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$a \cdot x^n, n \neq -1$
$2x^2 - 5$	$\frac{2}{3}x^3 - 5x - 4$	$2x^2 - 5$
e^x	e^x	e^x
e^{3x}	$\frac{1}{3}e^{3x}$	e^{3x}
e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx}$	e^{kx}
e^{2x-4}	$\frac{1}{2}e^{2x-4}$	e^{2x-4}
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}, a \neq 0$	e^{ax+b}
$3e^{5x-2}$	$\frac{3}{5}e^{5x-2}$	$3e^{5x-2}$
$7e^{6x-3} + 4x - 5$	$\frac{7}{6}e^{6x-3} + 2x^2 - 5x$	$7e^{6x-3} + 4x - 5$

Bemerkung: Ist F eine Stammfunktion von f , so ist auch F^* mit $F^*(x) = F(x) + c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f .



eine Ableitung

viele Stammfunktionen

Stammfunktion bilden (aufleiten)



differenzieren (ableiten)

Aufgaben

1 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f . Machen Sie die Probe.

- | | | |
|---|----------------------------|---|
| a) $f(x) = 6$ | b) $f(x) = 7x + 8$ | c) $f(x) = 4 - 3x + \frac{5}{2}x^2$ |
| d) $f(x) = -2x^3 + 5x$ | e) $f(x) = 3x^4 - x^2 - 1$ | f) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$ |
| g) $f(x) = 1 - \frac{5}{2}x^2$ | h) $f(x) = -7(x - x^2)$ | i) $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3}$ |
| j) $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{3}{2}x^4$ | k) $f(x) = 4(x^4 - x)$ | l) $f(x) = -\frac{1}{18}x^3 - \frac{2}{7}x$ |

2 F ist eine Stammfunktion von f . Bestimmen Sie $F(x)$.

- | | | |
|---|--|---|
| a) $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{2}{5}x^2$ | b) $f(x) = \frac{1}{32}x^4 + \frac{4}{5}x^3 - 3$ | c) $f(x) = -7x^3 + \frac{3}{8}x^2$ |
| d) $f(x) = (x - 2)(x + 3)$ | e) $f(x) = x^2(4x - 3)$ | f) $f(x) = 1 - 4x + \frac{3}{2}x^2 + x^3$ |
| g) $f(x) = -\frac{2}{3}(x^4 + 6x^2 - 3)$ | h) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx$ | i) $f(x) = \frac{1}{2}(x^4 - 3x^2)$ |
| j) $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{3}{2}e^x$ | k) $f(x) = 5(e^x + 3)$ | l) $f(x) = e \cdot e^x + ex$ |

3 Ermitteln Sie $F(x)$.

- | | | |
|-------------------------------------|---|--|
| a) $f(x) = 4e^{2x} + 1$ | b) $f(x) = -2e^{4x} - 2$ | c) $f(x) = -\frac{1}{2}e^{-3x} - 1$ |
| d) $f(x) = -2e^{0,2x}$ | e) $f(x) = \frac{4}{5}e^{-5x}$ | f) $f(x) = \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{2}x}$ |
| g) $f(x) = -\frac{2}{3}e^{5-x} - x$ | h) $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{3}{2}e^{x-4}$ | i) $f(x) = 5(e^{2x-1} + 3)$ |
| j) $f(x) = e \cdot e^{4x} + e$ | k) $f(x) = e^x(e^x + 3)$ | l) $f(x) = 1 + e \cdot x - 2e^{1+x}$ |

4 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f_t .

- | | | |
|---|-----------------------------|--|
| a) $f_t(x) = te^x + 5$ | b) $f_t(x) = 7e^{x-t} - 3x$ | c) $f_t(x) = t(e^x - 1)$ |
| d) $f_t(x) = e^{tx+3} - x^3 + 8x; t \neq 0$ | e) $f_t(x) = (t+1)e^{4x}$ | f) $f_t(x) = (e^{tx} - 3)(e^{tx} - 1); t \neq 0$ |