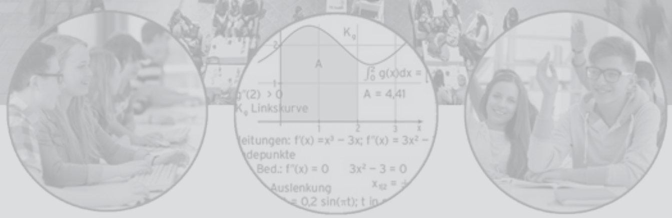
Bohner
Ott
Deusch

Mathematik im Berufskolleg
Gesamtband

Ausführliche Lösungen
zu im Buch gekennzeichneten Aufgaben

ab 3. Auflage 2016
ISBN 978-3-8120-0519-7



Merkur
Verlag Rinteln

Umschlag: © Adrian Schulz Foto: Mall of Berlin Bild Kreis links: © Christian Schwier – fotolia.com Bild Kreis rechts: © Kirill Kedrinski – fotolia.com

Lehrbuch Seite 21

3 a) Die Stelle 3 wird mit $x = 3$ bezeichnet.

Funktionswert ist ein y-Wert bzw. f(x)-Wert.

$f(3) = 12$

b) Der zugeordnete y-Wert ist -4, der Funktionswert f(x) ist -4.

$f(x) = -4$

c) $x = 2$, $y = 5$ Für y schreibt man f(x).

$f(2) = 5$

d) Funktionswert wird mit f(x) bezeichnet.

$f(x) = 4$

e) Funktionswert wird mit f(x) bezeichnet.

$f(x) > 7$ für alle $x \in \mathbb{R}$

f) Stelle ist ein x-Wert: $x = -17$ Der Funktionswert ist 9.

$f(-17) = 9$

g) Der y-Wert an der Stelle $x = 3$ ist null.

$f(3) = 0$

h) Funktionswert ist f(x).

$f(x) = 5$ für alle $x \in \mathbb{R}$

i) Koordinaten x und y stimmen überein: $y = x$

Für y schreibt man f(x).

$f(x) = x$

j) Schnittpunkt mit der y-Achse: $x = 0$

y-Wert ist -4

$f(0) = -4$

Lehrbuch Seite 29

X	Y1
1.8	0
1	-1.33
-2	-6.33
4	3.666

3 $f(x) = \frac{5}{3}x - 3;\ x \in \mathbb{R}$

a) Vergleich mit der Wertetabelle ergibt:

$P(\frac{9}{5} \mid 0)$ liegt auf dem Schaubild von f: $f(\frac{9}{5}) = 0$

$Q(1 \mid -\frac{13}{10})$ liegt oberhalb des Schaubildes von f: $f(1) = -\frac{4}{3} < -\frac{13}{10}$

$R(-2 \mid -\frac{20}{3})$ liegt unterhalb des Schaubildes von f: $f(-2) = -\frac{19}{3} > -\frac{20}{3}$

b) Ansatz: $f(x) = 2$ $\qquad \frac{5}{3}x - 3 = 2$

Umformung: $\qquad \frac{5}{3}x = 5$

$x = 3$

Interpretation: Der Punkt P(3 | 2) liegt auf dem Schaubild von f.

c) $f(-2) = -\frac{19}{3}$

Da der neue Funktionswert an dieser Stelle 1 sein soll, muss die Gerade um die Differenz $1 - (-\frac{19}{3}) = \frac{22}{3}$ verschoben werden.

Verschiebung um $\frac{22}{3}$ nach oben: $y = \frac{5}{3}x + \frac{13}{3}$

d) Ansatz: $f(2) = a$ $\qquad \frac{5}{3} \cdot 2 - 3 = a$

Wert für a: $\qquad a = \frac{1}{3}$

Der Punkt $P(2 \mid \frac{1}{3})$ liegt auf der Geraden.

Lehrbuch Seite 33

12 Ansatz: $\qquad G(x) = mx + b$; x in ME und G(x) in GE

Stückgewinn (Gewinn pro ME): $\qquad m = 275\ (\frac{GE}{ME})$

Bei 2 ME Gewinn 350 GE entspricht dem Kurvenpunkt P(2 | 350).

Gewinnfunktion: $\qquad G(x) = 275x + b$

Punktprobe mit P(2 | 350): $\qquad 350 = 275 \cdot 2 + b$

$b = -200$

Gewinnfunktion G mit $\qquad G(x) = 275x - 200$

Ansatz: $G(x) = 1075$ $\qquad 275x - 200 = 1075$

Produktionsmenge: $\qquad x = 4{,}64$

Bei einer Produktionsmenge von 4,64 ME ist der Gewinn 1075 GE.

Lehrbuch Seite 35

6 Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -1$

$S_y(0 \mid -1)$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $N(0{,}5 \mid 0)$

Begründung:

Die Nullstelle liegt rechts von x = 0 (VZW der y-Werte).

Vergrößert sich x um 1, so vergrößert sich y um 2. Vergrößert sich x um 0,5, so vergrößert sich y um 1, also ist x = 0,5 eine Nullstelle und damit $N(0{,}5 \mid 0)$.

Funktionsterm bestimmen:

Ansatz: $y = mx - 1$

Punktprobe mit z. B. $P(1 \mid 1)$: $1 = m \cdot 1 - 1$

$m = 2$

Funktionsterm: $f(x) = 2x - 1$

Varianten

Aus der Tabelle lässt sich ablesen: Vergrößert sich x um 1, so vergrößert sich y um 2, d.h. die Steigung der Geraden beträgt m = 2.

Der y-Achsenabschnitt ist $b = -1$.

Funktionsterm: $f(x) = 2x - 1$

oder

Steigung der Geraden: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-1)}{1 - 0} = 2$

y-Achsenabschnitt: $b = -1$

Funktionsterm: $f(x) = 2x - 1$

Lehrbuch Seite 38

3 a) Ansatz für G: $g(x) = 4x + b$

G schneidet die x-Achse in $x = 4$: $g(4) = 0$

$4 \cdot 4 + b = 0$

$b = -16$

Gleichung von G: $g(x) = 4x - 16$

b) H verläuft durch P(1 | 1) und schneidet die x-Achse in $x = -3$:

Ansatz: $y = mx + b$

Punktprobe mit P(1 | 1): $m + b = 1$ $\quad \cdot (-1)$

Punktprobe mit N(− 3 | 0): $-3m + b = 0$

$4m = 1$

$m = 0{,}25$

Einsetzen ergibt b: $0{,}25 + b = 1$

$b = 0{,}75$

Gleichung von H: $h(x) = 0{,}25x + 0{,}75$

Variante:

Bestimmung der Steigung aus

P(1 | 1) und N(− 3 | 0): $m = \frac{1-0}{1-(-3)} = \frac{1}{4}$

Punktprobe mit P(1 | 1)

in $y = \frac{1}{4}x + b$: $1 = \frac{1}{4} \cdot 1 + b$

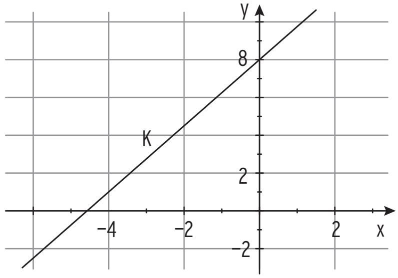
$b = \frac{3}{4}$

Gleichung von H: $h(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

Lehrbuch Seite 40

6 K: $f(x) = 1{,}75x + 8 = \frac{7}{4}x + 8$

a) Schaubild K von f



b) G schneidet die y-Achse in S(0 | 1,5)

G schneidet die Gerade K

senkrecht: $m_G = -\frac{4}{7}$

$k(x) = -\frac{4}{7}x + \frac{3}{2}$

Gleichsetzen: $\frac{7}{4}x + 8 = -\frac{4}{7}x + \frac{3}{2} \mid \cdot 28$

$49x + 224 = -16x + 42$

$65x = -182$

$x = -\frac{14}{5}$

Einsetzen ergibt: $y = f(-\frac{14}{5}) = \frac{7}{4}(-\frac{14}{5}) + 8 = \frac{31}{10}$

Schnittpunkt von G und K: $S(-\frac{14}{5} \mid \frac{31}{10})$

$S(-2{,}8 \mid 3{,}1)$

c) Ansatz für H: $h(x) = 1{,}75x + b$

P(0 | 8) wird auf P*(2 | 8) abgebildet.

Punktprobe mit P*(2 | 8) ergibt: $8 = 1{,}75 \cdot 2 + b$

$b = 4{,}5$

Geradengleichung von H $y = 1{,}75x + 4{,}5$

H schneidet die y-Achse in 4,5.

Variante:

Verschiebung von K um 2 nach rechts: $h(x) = f(x - 2) = 1{,}75(x - 2) + 8$

Ausmultiplizieren ergibt $h(x) = 1{,}75x + 4{,}5$

H schneidet die y-Achse in 4,5.

Lehrbuch Seite 42

3 a) Aus der Abbildung: G hat die Steigung $m = -\frac{3}{4}$ und geht durch (0 | 3).

(Steigungsdreieck mit den Eckpunkten (4 | 0), (0 | 0) und (0 | 3))

Gerade G: $g(x) = -\frac{3}{4}x + 3$

Aus der Abbildung: H verläuft durch (0 | − 4) und (4 | − 1).

H hat also die Steigung $m = \frac{3}{4}$ und geht durch (0 | − 4).

Gerade H: $h(x) = \frac{3}{4}x - 4$

Gleichsetzen: $-\frac{3}{4}x + 3 = \frac{3}{4}x - 4 \mid \cdot 4$

$-3x + 12 = 3x - 16$

$6x = 28$

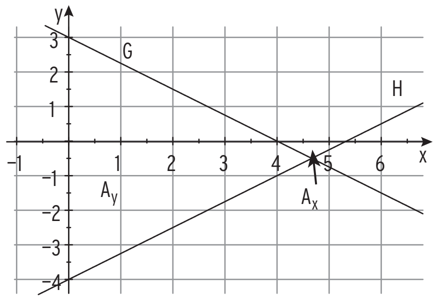
$x = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$

Einsetzen: $\frac{3}{4} \cdot \frac{14}{3} - 4 = -\frac{1}{2}$

Schnittpunkt von G und H: $S(\frac{14}{3} \mid -\frac{1}{2})$

b) G: $S_x(4 \mid 0)$; $S_y(0 \mid 3)$

H: $S_x(\frac{16}{3} \mid 0)$; $S_y(0 \mid -4)$



Fläche mit der x-Achse:

$A_x = \frac{1}{2} \cdot (\frac{16}{3} - 4) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

Fläche mit der y-Achse:

$A_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{3} \cdot 7 = \frac{49}{3}$

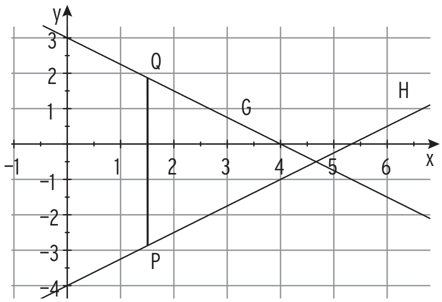
Die Behauptung stimmt.

c) $g(1{,}5) - h(1{,}5) = 1{,}875 - (-2{,}875) = 4{,}75$

Der Abstand der Punkte P und Q ist gleich der Länge der Strecke PQ.

$g(1{,}5) - h(1{,}5) > 0$:

G verläuft oberhalb von H in x = 1,5.



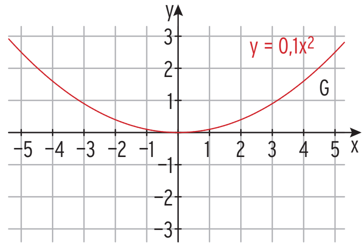
Lehrbuch Seite 55

5 $y = 0{,}1x^2$

a) $g(x) = -\,0{,}1x^2$

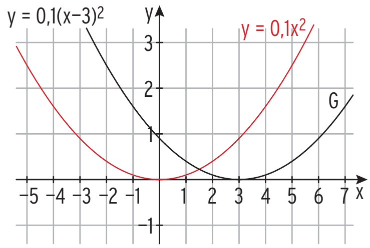
b) $g(x) = 0{,}1x^2 = f(x)$

Die gespiegelte Parabel G und die Ausgangsparabel sind gleich.

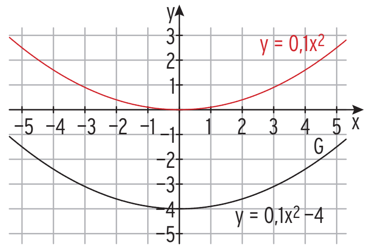


c) $g(x) = 0{,}1(x - 3)^2$

Ersetze x durch $(x - 3)$



d) $g(x) = 0{,}1x^2 - 4$



e) Streckung in y-Richtung mit Faktor 5:

$y = 5 \cdot 0{,}1x^2 = 0{,}5x^2$

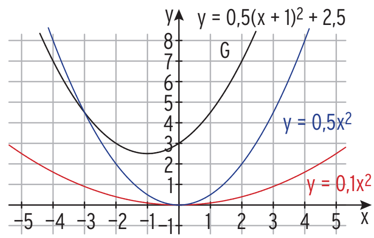
Verschiebung um 1 nach links:

$y = 0{,}5(x + 1)^2$

Verschiebung um 2,5 nach oben:

$y = 0{,}5(x + 1)^2 + 2{,}5$

$g(x) = 0{,}5(x + 1)^2 + 2{,}5$



Lehrbuch Seite 62

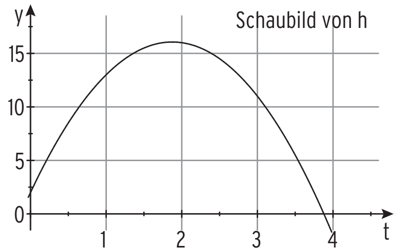
12 a) $h(t) = -4t^2 + 15t + 2;\ t \geq 0$

$h(t) = 0$ $\qquad$ $-4t^2 + 15t + 2 = 0$

Lösung der Gleichung: $\qquad$ $t_1 = -0{,}13 < 0;\ t_2 = 3{,}88$

Interpretation:

Nach 3,88 s kommt der Pfeil auf dem Boden (h = 0) an.



b) Abschusshöhe: $h(0) = 2$

$h(t) = 2$ $\qquad$ $-4t^2 + 15t + 2 = 2$

$-4t^2 + 15t = 0$

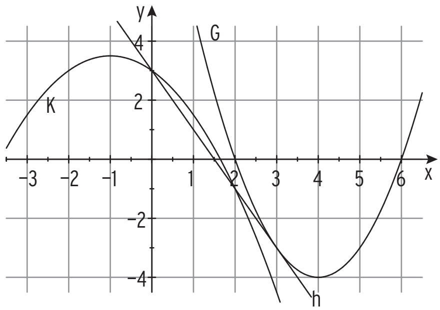
$t(-4t + 15) = 0$

Lösungen der Gleichung: $\qquad$ $t_1 = 0;\ t_2 = 3{,}75$

Nach 3,75 s hat der Pfeil wieder die Höhe von 2 m erreicht.

Hinweis: Die Lösung t = 0 bedeutet, dass die Abschusshöhe 2 m ist.

Lehrbuch Seite 67



6 K: $f(x) = -0{,}5x^2 - x + 3$
G: $g(x) = x^2 - 8x + 12$
K ist nach unten geöffnet,
verläuft durch $S_y(0 \mid 3)$

$S_y(0 \mid 3)$ legt die Achseneinteilung auf der y-Achse fest.
$S(-1 \mid 3{,}5)$ legt die Achseneinteilung auf der x-Achse fest.
G ist nach oben geöffnet; G hat Normalparabelform
G schneidet die x-Achse u. a. in $N(2 \mid 0)$

Gerade h verläuft durch $S_y(0 \mid 3)$ und $P(2 \mid -1)$.

(P ist gleichzeitig Schnittpunkt von h und K.)

h hat also die Steigung $m = -2$ und damit die Gleichung $y = -2x + 3$.

Schnittpunkte mit K durch Gleichsetzen:	$-0{,}5x^2 - x + 3 = -2x + 3$
Nullform:	$-0{,}5x^2 + x = 0$
Ausklammern:	$x(-0{,}5x + 1) = 0$
zwei einfache Lösungen:	$x_1 = 0;\ x_2 = 2$

h schneidet K in 0 und 2.

Schnittpunkte mit G durch Gleichsetzen:	$x^2 - 8x + 12 = -2x + 3$
Nullform:	$x^2 - 6x + 9 = 0$
Binomische Formel:	$(x - 3)^2 = 0$
doppelte Lösung = Berührstelle:	$x_{1\mid 2} = 3$

h berührt G in $B(3 \mid -3)$.

Lehrbuch Seite 73

1 a) Berühren bedeutet doppelte Lösung $x_1 = x_2 = -3$.

Ansatz mit Linearfaktoren:	$y = a(x+3)(x+3)$
Punktprobe mit $A(-5 \mid -7)$:	$-7 = a \cdot (-5+3)(-5+3)$
	$-7 = a \cdot (-2)(-2)$
	$a = -\frac{7}{4}$
Parabelgleichung:	$y = -\frac{7}{4}(x+3)^2$
	$y = -\frac{7}{4}(x^2+6x+9)$

b) Einfache Nullstellen: $x_1 = 2$; $x_2 = -1$

Ansatz mit Linearfaktoren:	$y = a(x-2)(x+1)$
Punktprobe mit $A(1 \mid -2)$:	$-2 = a(1-2)(1+1)$
	$-2 = a(-1) \cdot 2$
	$a = 1$
Parabelgleichung:	$y = (x-2)(x+1)$
	$y = x^2 - x - 2$

c) Verschobene Normalparabel: $a = 1$

Berührstelle $x = -2$ bedeutet doppelter Faktor $(x+2)$

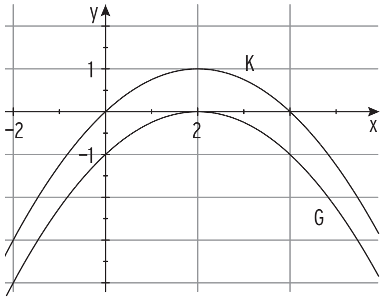
Ansatz mit Linearfaktoren:	$y = 1 \cdot (x+2)(x+2) = (x+2)^2$
Parabelgleichung:	$y = (x+2)^2$
	$y = x^2 + 4x + 4$

d) Ansatz wegen der

Symmetrie zur y-Achse:	$y = ax^2 + c$
Punktprobe mit $A(1 \mid 0{,}5)$:	$a + c = 0{,}5$ $\quad \cdot(-1)$
Punktprobe mit $A(-2 \mid -5{,}5)$:	$4a + c = -5{,}5$
Addition:	$3a = -6$
Lösung des Gleichungssystems:	$a = -2$; $c = 2{,}5$
Parabelgleichung:	$y = -2x^2 + 2{,}5$

Lehrbuch Seite 75

4 a) K schneidet die x-Achse in 0 und in 4.



$f(x) = 0$ $\quad - 0{,}25x^2 + x = 0$

Ausklammern: $x(-0{,}25x + 1) = 0$

einfache Nullstellen: $x_1 = 0;\ x_2 = 4$

Aus Symmetriegründen gilt $x_S = 2$

Einsetzen von x = 2 in f(x) ergibt: $f(2) = 1$

Scheitelpunkt: $S(2 \mid 1)$

b) Ursprungsgerade H durch P hat die Steigung $m = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$.

Gleichung von H: $y = -1{,}5x$

Gleichsetzen: $-0{,}25x^2 + x = -1{,}5x$

Nullform: $-0{,}25x^2 + 2{,}5x = 0$

Ausklammern: $x(-0{,}25x + 2{,}5) = 0$

einfache Lösungen: $x_1 = 0;\ x_2 = 10$

Einsetzen in die Geradengleichung

ergibt die Schnittpunkte: $S_1(0 \mid 0);\ S_2(10 \mid -15)$

c) Gleichung der Parallelen zu H: $y = -1{,}5x + b$

Gleichsetzen ergibt: $-0{,}25x^2 + x = -1{,}5x + b$

Nullform: $-0{,}25x^2 + 2{,}5x - b = 0$

Vereinfachung: $x^2 - 10x + 4b = 0$

Bedingung für Berühren: $D = 100 - 16b = 0$

$b = 6{,}25$

doppelte Lösung für b = 6,25: $x_{1|2} = \frac{10}{2} = 5$

Gleichung der Parallelen: $y = -1{,}5x + 6{,}25$ (Tangente an K)

Einsetzen in die Geradengleichung

ergibt den Berührpunkt: $B(5 \mid -1{,}25)$

d) Der Scheitelpunkt der Parabel G muss auf der x-Achse liegen, also

Verschiebung um 1 nach unten: $g(x) = -0{,}25x^2 + x - 1$

Lehrbuch Seite 76

8 $f(x) = x^2 + bx - 2$; $x, b \in \mathbb{R}$

Das Schaubild K von f ist eine verschobene Normalparabel (a = 1),

nach oben geöffnet. K verläuft duch den Punkt $S_y(0 \mid -2)$.

Schaubild K_3

ist eine nach unten geöffnete Parabel und somit kein Schaubild von f.

Schaubild K_2

ist keine verschobene Normalparabel. Vom Scheitelpunkt geht man 1 nach rechts und (etwa) 2 nach oben (a = 2).

K_2 ist kein Schaubild von f.

Schaubild K_1

ist eine verschobene Normalparabel, vom Scheitelpunkt geht man 1 nach rechts und 1 nach oben (a = 1).

K_1 verläuft durch den Punkt $S_y(0 \mid -2)$.

Punktprobe mit $P(3 \mid 1)$: $1 = 3^2 + b \cdot 3 - 2$

$b = -2$

Für $b = -2$ ist K_1 ein Schaubild von f.

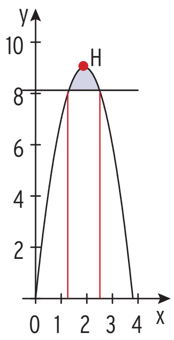
Lehrbuch Seite 79

4 a) Nullstellen von f: f(x) = 0 $\quad -\frac{5}{2}x^2 + \frac{19}{2}x = 0$

Ausklammern: $\quad x(-\frac{5}{2}x + \frac{19}{2}) = 0$

Einfache Nullstellen: $\quad x_1 = 0;\ x_2 = 3{,}8$

Die Dicke des Diskus beträgt 3,8 cm.



Scheitelkoordinaten:

$x_S = \frac{3{,}8}{2} = 1{,}9$

$y_S = f(1{,}9) = -\frac{5}{2}(1{,}9)^2 + \frac{19}{2}(1{,}9)$

$y_S = 9{,}025$

Scheitelpunkt der Parabel: $\quad H(1{,}9 \mid 9{,}025)$

Durchmesser: $\quad d = 2 \cdot 9{,}025 = 18{,}05$

Der Durchmesser beträgt 18,05 cm.

b) Schnittstellen von Gerade und Parabel: $\quad -\frac{5}{2}x^2 + \frac{19}{2}x = \frac{65}{8} \quad | \cdot 8$

Nullform und Vereinfachung: $\quad 20x^2 - 76x + 65 = 0$

Lösung mit Formel: $\quad x_{1|2} = \frac{76 \pm \sqrt{76^2 - 80 \cdot 65}}{40}$

$x_{1|2} = \frac{76 \pm 24}{40}$

einfache Lösungen: $\quad x_1 = 1{,}3;\ x_2 = 2{,}5$

Die Dicke des Diskus an der Stoffgrenze beträgt 2,5cm − 1,3 cm = 1,2 cm.

Lehrbuch Seite 87

7 $G(x) = x^3 - 4x - 2$

a) G ist nicht punktsymmetrisch zu O.

$f(1) = -5$; $f(-1) = 1 \neq 5$

Die Bedingung für Punktsymmetrie $f(-x) = -f(x)$ ist nicht erfüllt.

G verläuft vom III. in den I. Quadranten.

Verhalten für $x \to +\infty$: $f(x) \to +\infty$

für $x \to -\infty$: $f(x) \to -\infty$

b) H ist der höchste Punkt der Böschung.

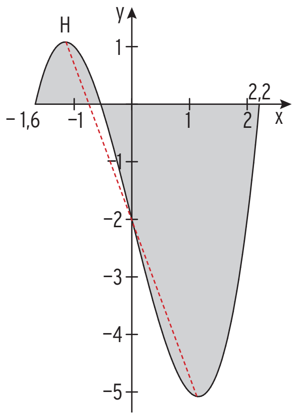
G ist symmetrisch zu $P(0 \mid -2)$.

Der tiefste Punkt (des Kanals) hat die

Koordinaten $x_T \approx 1{,}15$ und $y_T \approx -5{,}08$,

denn $1{,}08 + 2 = 3{,}08$ und $-2 - 3{,}08 = -5{,}08$

Die größte Tiefe des Kanals beträgt 5,08 m.



Lehrbuch Seite 92

7 A: Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades
keine Symmetrie d. h. keine Parabel, nach oben geöffnet

B: Schaubild einer Polynomfunktion 2. Grades, Symmetrie zur y-Achse
Parabelform

C: Schaubild einer Polynomfunktion 3. Grades, Symmetrie zu P(0 | 2)

D: Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades, Symmetrie zur y-Achse
Zwei „Tiefpunkte" und ein „Hochpunkt"
Schaubild hat nicht die Form einer Parabel, ist somit kein Schaubild einer Polynomfunktion 2. Grades.

Lehrbuch Seite 97

3 a) Gleichung: $2x + 5x^3 = 4x^3 \quad | - 4x^3$

Nullform: $2x + x^3 = 0$

Ausklammern: $x(2 + x^2) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x = 0$ oder $2 + x^2 = 0$

Mit $2 + x^2 \neq 0$ erhält man: $x = 0$

Lösung der Gleichung: $x = 0$

b) Gleichung: $-\frac{1}{5}(x^3 - 10x^2) = \frac{9}{5}x \quad | \cdot (-5)$

$x^3 - 10x^2 = -9x \quad | + 9x$

Nullform $x^3 - 10x^2 + 9x = 0$

Ausklammern: $x(x^2 - 10x + 9) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x = 0$ oder $x^2 - 10x + 9 = 0$

Lösungen: $x_1 = 0;\ x_2 = 9;\ x_3 = 1$

c) Gleichung: $\frac{1}{8}(x^3 - 10x) = 0 \quad | \cdot 8$

$x^3 - 10x = 0$

Ausklammern: $x(x^2 - 10) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x = 0$ oder $x^2 - 10 = 0$

Lösungen: $x_1 = 0;\ x_{2|3} = \pm\sqrt{10}$

d) Gleichung: $\frac{1}{4}x^3 = 2x^2 - 4x \quad | \cdot 4$

$x^3 = 8x^2 - 16x$

Nullform: $x^3 - 8x^2 + 16x = 0$

Ausklammern: $x(x^2 - 8x + 16) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x = 0$ oder $x^2 - 8x + 16 = 0$

Lösungen: $x_1 = 0;\ x_{2|3} = 4$

Lehrbuch Seite 97

3 e) Gleichung: $\frac{2}{9}x(x-2)(x+4) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x = 0$ oder $x - 2 = 0$ oder $x + 4 = 0$

Lösungen: $x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = -4$

f) Gleichung: $-\frac{x^2}{8}(3 - 4x) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x^2 = 0$ oder $3 - 4x = 0$

Lösungen: $x_{1|2} = 0;\ x_3 = \frac{3}{4}$

g) Gleichung: $x - 0{,}5x^4 = 0$

Ausklammern: $x(1 - 0{,}5x^3) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x = 0$ oder $1 - 0{,}5x^3 = 0$

$1 - 0{,}5x^3 = 0$

$x^3 = 2$

Lösungen: $x_1 = 0;\ x_2 = \sqrt[3]{2}$

h) Gleichung: $-\frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3 = 0 \quad | \cdot 3$

$-x^4 + 2x^3 = 0$

Ausklammern: $x^3(-x + 2) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x^3 = 0$ oder $-x + 2 = 0$

Lösungen: $x_{1|2|3} = 0;\ x_4 = 2$

i) Gleichung: $\frac{1}{12}(x^4 - 2x^3 - 48x^2) = 0 \quad | \cdot 12$

$x^4 - 2x^3 - 48x^2 = 0$

Ausklammern: $x^2(x^2 - 2x - 48) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x^2 = 0$ oder $x^2 - 2x - 48 = 0$

Lösungen: $x_{1|2} = 0;\ x_3 = 8;\ x_4 = -6$

Lehrbuch Seite 97

3 j) Gleichung: $\frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{2} + \frac{9x^2}{8} = 0 \quad | \cdot 16$

$x^4 - 8x^3 + 18x^2 = 0$

Ausklammern: $x^2(x^2 - 8x + 18) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x^2 = 0$ oder $x^2 - 8x + 18 = 0$

$x^2 - 8x + 18 \neq 0$, da $D = -8 < 0$

Lösung: $x_{1|2} = 0$

k) Gleichung: $0{,}4x^4 - x^2 = 0{,}8x^3 \quad | \cdot 5$

$2x^4 - 5x^2 = 4x^3 \quad | - 4x^3$

Nullform: $2x^4 - 4x^3 - 5x^2 = 0$

Ausklammern: $x^2(2x^2 - 4x - 5) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x^2 = 0$ oder $2x^2 - 4x - 5 = 0$

Lösungen: $x_{1|2} = 0$; $x_{3|4} = \frac{4 \pm \sqrt{56}}{4}$

l) Gleichung: $\frac{1}{2}x^4 = x^2 \quad | \cdot 2$

$x^4 = 2x^2 \quad | - 2x^2$

Nullform: $x^4 - 2x^2 = 0$

Ausklammern: $x^2(x^2 - 2) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x^2 = 0$ oder $x^2 - 2 = 0$

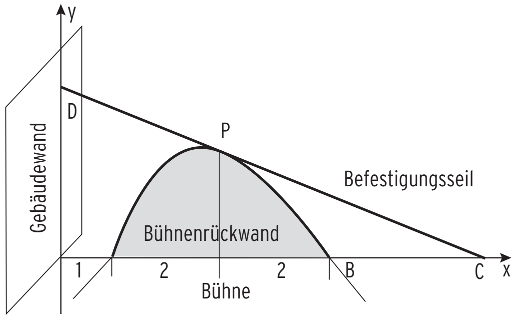
Lösungen: $x_{1|2} = 0$; $x_2 = \pm\sqrt{2}$

Lehrbuch Seite 108

15 Bogen: $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 14x^2 + 53x - 40)$

Probe: $f(1) = 0$; $f(5) = 0$

d.h. das Koordinatensystem kann wie abgebildet gezeichnet werden.



Mit $f(3) = 5$ ergibt sich $P(3 \mid 5)$.

Gerade durch $D(0 \mid 8)$ und P.

Die Gerade hat die Steigung $m = -1$.

Geradengleichung:	$y = -x + 8$
Schnittpunkt mit der x-Achse:	
Bedingung: $y = 0$	$0 = -x + 8$
	$x = 8$

Die Gerade schneidet die x-Achse in 8.

Befestigungspunkt:	$C(8 \mid 0)$

Der Abstand des Punktes C vom Punkt B beträgt 3 m.

Lehrbuch Seite 112

5 Alle drei Nullstellen – 1; 1 und – 10 sind bekannt.

Ansatz mit Produktform: $f(x) = a(x + 1)(x - 1)(x + 10)$

Für a < 0 verläuft der zugehörige Graph vom II. in das IV. Feld.
Z. B.: $a = -2$ $f(x) = -2(x + 1)(x - 1)(x + 10)$

Punktprobe mit P(2 | – 6): $-6 = a(2 + 1)(2 - 1)(2 + 10)$

$-6 = a \cdot 3 \cdot 1 \cdot 12$

$a = -\frac{1}{6}$

Funktionsterm: $f(x) = -\frac{1}{6}(x + 1)(x - 1)(x + 10)$

6 Gleichung der 1. Winkelhalbierenden: $y = x$

Punkte auf der 1. Winkelhalbierenden: A(– 1 | – 1) und B(2 | 2)

Ansatz: $f(x) = x^3 + bx^2 + 4x + d$

Punktprobe mit A(– 1 | – 1): $-1 + b - 4 + d = -1$

Punktprobe mit B(2 | 2): $8 + 4b + 8 + d = 2$

LGS:

$$\begin{aligned} b + d &= 4 \quad \cdot(-1) \\ 4b + d &= -14 \end{aligned}$$

Addition ergibt: $3b = -18$

$b = -6$

Einsetzen von $b = -6$ in

z. B: $b + d = 4$ ergibt: $-6 + d = 4$

$d = 10$

Ergebnis: $b = -6$ und $d = 10$

Funktionsterm: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x + 10$

Lehrbuch Seite 121

5 a) Der Wasserspiegel im Becken steigt in den ersten 6 s (Zuflussgeschwindigkeit positiv) und fällt von der 6. bis zur 9. Sekunde (Zuflussgeschwindigkeit negativ).

b) Die ersten 6 Sekunden fließt Wasser in das Becken, danach wird Wasser entnommen.
Nach 6 s befindet sich am meisten Wasser im Becken.

Lehrbuch Seite 130

4 a) $g(x) = f(x) + 3 = e^{-x} + 3$

Vergleich mit $g(x) = ae^{-x} + b$ ergibt: $a = 1;\ b = 3$

b) $g(x) = -f(x) = -e^{-x}$

Vergleich mit $g(x) = ae^{-x} + b$ ergibt: $a = -1;\ b = 0$

c) $g(x) = 0{,}5f(x) - 6 = 0{,}5e^{-x} - 6$

Vergleich mit $g(x) = ae^{-x} + b$ ergibt: $a = 0{,}5;\ b = -6$

d) $g(x) = e^{-(x-2)} = e^{-x+2} = e^2 \cdot e^{-x}$

Vergleich mit $g(x) = ae^{-x} + b$ ergibt: $a = e^2;\ b = 0$

Bemerkungen: Eine horizontale Verschiebung lässt sich durch eine Streckung in y-Richtung (Faktor e^2) ersetzen (vgl. Potenzgesetze).

Gemeinsame Eigenschaft: Alle Kurven haben eine waagrechte Asymptote.

Lehrbuchseite 135

3 K: $f(x) = 2 - e^{-x}$

K verläuft vom 3. in das 1. Feld.

Die Gerade mit $y = 2$ ist waagrechte Asymptote.

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0 \mid 1)$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $S_x(-0{,}7 \mid 0)$

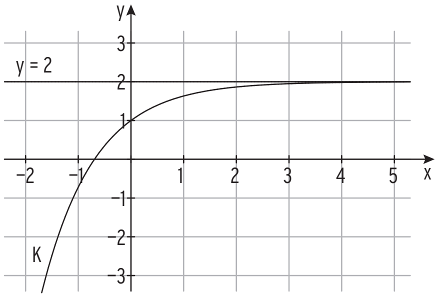
$f(-0{,}70) \approx -0{,}01 < 0$; $f(-0{,}69) = 0{,}006... > 0$

VZW von f(x) zwischen $-0{,}70$ und $-0{,}69$.

K entsteht aus dem Schaubild von g

durch Spiegelung an der x-Achse: $y = -e^{-x}$

und Verschiebung um 2 nach oben: $y = -e^{-x} + 2$



Lehrbuch Seite 141

5 a) Gleichung: $e - 2e^{0,5x} = 0$

Umformung: $2e^{0,5x} = e$

$e^{0,5x} = \frac{e}{2}$

Definition des Logarithmus: $0,5x = \ln(\frac{e}{2})$

$x = 2\ln(\frac{e}{2})$

b) Gleichung: $\frac{2}{3}e^{-x} - 2 = 0$

$\frac{2}{3}e^{-x} = 2 \quad | \cdot \frac{3}{2}$

$e^{-x} = 3$

$-x = \ln(3)$

$x = -\ln(3)$

c) Gleichung: $e^{2x}(1 - 5x) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $e^{2x} = 0 \vee 1 - 5x = 0$

wegen $e^{2x} \neq 0$: $1 - 5x = 0$

einzige Lösung: $x = \frac{1}{5}$

d) Gleichung: $e^{2-x} = 3$

$2 - x = \ln(3)$

$x = 2 - \ln(3)$

e) Gleichung: $e^{0,2x+1} - 1 = 0$

$e^{0,2x+1} = 1$

$0,2x + 1 = \ln(1)$

Mit $\ln(1) = 0$: $0,2x + 1 = 0$

$x = -5$

Lehrbuch Seite 141

5 f) Gleichung: $3 - 0{,}5e^{0{,}25x} = 0$

$0{,}5e^{0{,}25x} = 3$

$e^{0{,}25x} = 6$

$0{,}25x = \ln(6)$

$x = 4\ln(6)$

g) Gleichung: $(3 + 2x)e^{x-1} = 0$

Satz vom Nullprodukt: $3 + 2x = 0 \vee e^{x-1} = 0$

$3 + 2x = 0$

wegen $e^{x-1} \neq 0$: $x = -\frac{3}{2}$ (einzige Lösung)

h) Gleichung: $8 - e^x = 7e^{-x}$

$8 - e^x = 7e^{-x} \quad | \cdot e^x$

$8e^x - e^{2x} = 7 \quad | -7$

Nullform: $-e^{2x} + 8e^x - 7 = 0$

Substitution: $u = e^x$ $\quad -u^2 + 8u - 7 = 0$

Lösung mit Formel: $u_1 = 1;\ u_2 = 7$

Rücksubstitution: $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$e^x = 7 \Rightarrow x = \ln(7)$

Lösungen: $x_1 = 0;\ x_2 = \ln(7)$

i) Gleichung: $2e^{0{,}5x} = e^x$

$2e^{0{,}5x} - e^x = 0$

Ausklammern: $e^{0{,}5x}(2 - e^{0{,}5x}) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $e^{0{,}5x} = 0 \vee 2 - e^{0{,}5x} = 0$

$e^{0{,}5x} = 0 \vee e^{0{,}5x} = 2$

wegen $e^{0{,}5x} \neq 0$: $e^{0{,}5x} = 2$

$0{,}5x = \ln(2)$

einzige Lösung: $x = 2\ln(2)$

Lehrbuch Seite 144

3 b) Schnittpunkte von K und G

Bedingung: $f(x) = g(x)$	$e^{2x} + 6 = 5e^x \quad \vert - 5e^x$
Nullform:	$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$
Substitution: $u = e^x$	$u^2 - 5u + 6 = 0$
Lösung mit Formel:	$u_1 = 2;\ u_2 = 3$
Rücksubstitution:	$e^x = 2 \Rightarrow x = \ln(2)$
	$e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$
Lösungen der Gleichung:	$x_1 = \ln(2);\ x_2 = \ln(3)$
y-Werte der Schnittpunkte:	$y = g(\ln(2)) = 5\,e^{\ln(2)} = 5 \cdot 2 = 10$
	$y = g(\ln(3)) = 5\,e^{\ln(3)} = 5 \cdot 3 = 15$
Schnittpunkte:	$S_1(\ln(2) \mid 10);\ S_2(\ln(3) \mid 15)$

c) Schnittpunkte von K und G

Bedingung: $f(x) = g(x)$	$-e^{3x} + 2x = 2x - 5 \quad \vert - 2x$
	$-e^{3x} = -5 \quad \vert \cdot (-1)$
	$e^{3x} = 5$
Definition anwenden:	$3x = \ln(5) \quad \vert : 3$
	$x = \frac{\ln(5)}{3}$
y-Werte des Schnittpunktes:	$y = 2 \cdot \frac{\ln(5)}{3} - 5 = \frac{2}{3}\ln(5) - 5$
Schnittpunkt:	$S(\frac{\ln(5)}{3} \mid \frac{2}{3}\ln(5) - 5)$

Lehrbuchseite 151

2 **Reale Situation**

In einem See von der Größe 8 ha wachsen Seerosen.

Reales Modell

Die bedeckte Fläche nimmt wöchentlich um 30% zu. Anfangs sind 150 m^2 der Oberfläche bedeckt.

Annahme: Die Zunahme erfolgt exponentiell. Die bedeckte Fläche nach t Wochen (t = 0 entspricht dem Beginn der Messung) soll durch eine Funktion beschrieben werden.

Mathematisches Modell:

$B(0) = 150$; $B(t)$: bedeckte Fläche in m^2

Mit a = 1,30 ergibt sich: $B(t) = 150 \cdot 1{,}30^t$

Dieser Funktionsterm beschreibt die bedeckte Fläche in Abhängigkeit von der Zeit t.

Schreibweise mit e-Basis mit $1{,}30 = e^{\ln(1{,}30)} = e^{0{,}2624}$

Funktionsterm: $B(t) = 150 \cdot e^{0{,}2624t}$

Mathematische Lösung:

Ansatz: $B(t) = 80000$ $\quad 150 \cdot 1{,}30^t = 80000$

$1{,}30^t = 533{,}33$

Logarithmieren: $\ln(1{,}30) \cdot t = \ln(533{,}33)$

$t = 23{,}93$

oder mit der Basis e:

Ansatz: $B(t) = 80000$ $\quad 150 \cdot e^{0{,}2624t} = 80000$

$e^{0{,}2624t} = 533{,}33$

Logarithmieren: $0{,}2624 \cdot t = \ln(533{,}33)$

$t = \frac{\ln(533{,}33)}{0{,}2624} = 23{,}93$

Bewertung:

Die Wasserrose bedeckt die gesamte Fläche nach ca. 24 Wochen.

Exponentielles Wachstum ist also nur in den ersten 24 Wochen möglich.

Lehrbuchseite 152

8 a) Jahr 2009: $t = 0$ Jahr 2019: $t = 10$

Anzahl der Einwohner: $h(10) = 30851{,}5$

Zu Beginn des Jahres 2019 sind ca. 30850 Einwohner zu erwarten.

b) $\frac{h(1)}{h(0)} = \frac{27818{,}1}{27500{,}0} = 1{,}01157$ oder $e^{0{,}0115 \cdot 1} \approx 1{,}01157$

Die jährliche Zunahme beträgt 1,16%.

c) Verdoppelungszeit

Bedingung: $h(t) = 2 \cdot 27500$

$$e^{0{,}0115 \cdot t} = 2$$

$$0{,}0115 \cdot t = \ln(2)$$

$$t = \frac{\ln(2)}{0{,}0115} = 60{,}27$$

In etwa 60 Jahren kann man von einer Verdoppelung der Einwohnerzahl ausgehen.

Lehrbuch Seite 154

2 Ansatz: $g(t) = a - 10e^{-kt}$; $t \geq 0$; a, k > 0

a) t = 0: $g(0) = a - 10e^{-k \cdot 0} = a - 10$

t = 10: $g(10) = a - 10e^{-10k}$

Aus g(0) = 10 folgt: $a - 10 = 10$

$a = 20$

Aus g(10) = 16,321 folgt: $a - 10e^{-10k} = 16{,}321$

a = 20 eingesetzt: $20 - 10e^{-10k} = 16{,}321$

Auflösung nach k: $10e^{-10k} = 3{,}679$

$e^{-10k} = 0{,}3679$

$-10\,k = \ln(0{,}3679)$

$k = \frac{\ln(0{,}3679)}{-10} = 0{,}099994 \approx 0{,}1$

Funktionsterm: $g(t) = 20 - 10e^{-0{,}1t}$

b) Für $t \to \infty$: $g(t) \to 20$ wegen $e^{-0{,}1t} \to 0$

Das Schaubild von g hat die waagrechte Asymptote mit der Gleichung y = 20.

Die Biomasse strebt gegen $20 \cdot 10^2$ Tonnen.

c) 95 % von 20 = 19

Bedingung: g(t) = 19 $20 - 10e^{-0{,}1t} = 19$

$10e^{-0{,}1t} = 1$

$e^{-0{,}1t} = 0{,}1$

$-0{,}1t = \ln(0{,}1)$

$t = -10\ln(0{,}1) \approx 23{,}0$

Die Zeit bis zur Verwertung beträgt etwa 23 Jahre.

Lehrbuch Seite 175

1 d) $f(x) = 4\cos(\pi x) + 3$; $|a| = 4$; $p = \frac{2\pi}{\pi} = 2$; $y = 3$ (Mittellinie)

e) $f(x) = 3 - 6\sin(\frac{x}{2})$; $|a| = 6$; $p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$; $y = 3$

f) $f(x) = -2\cos(\frac{\pi}{2}x) - 3$; $|a| = 2$; $p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$; $y = -3$

Lehrbuch Seite 182

6 a) $3\sin(x) - 2 = 0$ $\sin(x) = \frac{2}{3}$ WTR: $x = 0{,}73$

Mit Hilfe der Sinus-Kurve: $x = \pi - 0{,}73 = 2{,}41$

Weitere Lösungen durch Addition der Periode $p = 2\pi$ liegen nicht im gegebenen Intervall.

Lösungen: $x = 0{,}73$; $2{,}41$

b) $\sin(x) = \frac{1}{3}$ WTR: $x = 0{,}34$

Mit Hilfe der Sinus-Kurve: $x = \pi - 0{,}34 = 2{,}80$

Weitere Lösungen durch Addition der Periode $p = 2\pi$ liegen nicht im gegebenen Intervall.

Lösungen: $x = 0{,}34$; $x = 2{,}80$

c) $\sin(2x) = -\frac{3}{5} = -0{,}6$ WTR: $2x = -0{,}64$

$z = -0{,}64$ $z_1 = -0{,}64$; $z_2 = \pi + 0{,}64 = 3{,}78$

Mit $z = 2x$: $x = -0{,}32$; $1{,}89$

Weitere Lösungen im gegebenen Intervall durch Addition der Periode $p = \pi$:

$x = -0{,}32 + \pi = 2{,}82$; $x = 1{,}89 + \pi = 5{,}03$; $x = -0{,}32 + 2\pi = 5{,}96$

Lehrbuch Seite 185

2 a) $\cos(x) = -0{,}5$ WTR: $x = \frac{2}{3}\pi$

Wegen Symmetrie zur y-Achse: $x = -\frac{2}{3}\pi$

Weitere Lösungen durch Addition der Periode $p = 2\pi$: $x = -\frac{2}{3}\pi + 2\pi = \frac{4}{3}\pi$

$x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi > 6{,}5$

Lösungen: $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{4}{3}\pi$

b) $\cos(x) = 1$ WTR: $x = 0$

Weitere Lösungen durch Addition der Periode $p = 2\pi$: $x = 2\pi$

Lösungen: $x = 0;\ 2\pi$

c) $\cos(x) = -\frac{1}{4}$ WTR: $x = 1{,}82$

Wegen Symmetrie zur y-Achse: $x = -1{,}82$

Weitere Lösungen durch Addition der Periode $p = 2\pi$: $x = -1{,}82 + 2\pi = 4{,}46$

$x = 1{,}82 + 2\pi > 6{,}5$

Lösungen: $x = 1{,}82;\ 4{,}46$

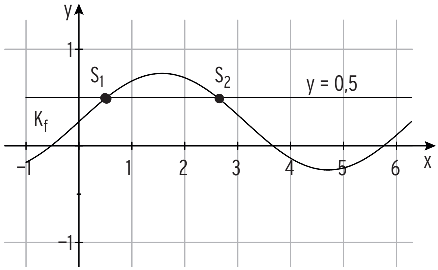
Lehrbuch Seite 190

4 a) $f(x) = 0{,}5\sin(x) + 0{,}25;\ \ x \in [-1; 2\pi]$

$f(x) = 0$

$\sin(x) = -\frac{1}{2}$

Nullstellen von f: $-\frac{\pi}{6}; \frac{7}{6}\pi; \frac{11}{6}\pi$



b) $f(x) = \frac{1}{2}$

$\sin(x) = \frac{1}{2}$

Schnittstellen: $x_1 = \frac{\pi}{6}; x_2 = \frac{5}{6}\pi$

Schnittpunkte: $S_1(\frac{\pi}{6} \mid 0{,}5); S_2(\frac{5}{6}\pi \mid 0{,}5)$

c) $f^*(x) = 0{,}5\sin(x + 2) + 0{,}25$

Um 2 nach links verschieben heißt x durch (x + 2) ersetzen.

Lehrbuch Seite 201

1 a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & -7 \\ 3 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \cdot(-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & 4 & 10 & 28 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 10 & 40 \end{array}\right)$

$x_3 = 4; x_2 = -3;\ x_1 = 2$; Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & 4 & 6 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right)$

$x_3 = 2{,}5; x_2 = -1;\ x_1 = 1$; Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 202

7 Es können x_1 ME an W_1, x_2 ME an W_2 und x_3 ME an W_3 hergestellt werden.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 448 \\ 0 & 4 & 1 & 442 \\ 1 & 0 & 3 & 330 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 448 \\ 0 & 4 & 1 & 442 \\ 0 & 1 & -7 & -542 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 448 \\ 0 & 4 & 1 & 442 \\ 0 & 0 & 29 & 2610 \end{array}\right)$$

$x_3 = 90$; $x_2 = 88$; $x_1 = 60$; Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 60 \\ 88 \\ 90 \end{pmatrix}$

Es können 60 ME an W_1, 88 ME an W_2 und 90 ME an W_3 hergestellt werden.

Lehrbuch Seite 208

2 c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -0{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & -8 & -16 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -0{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & -8 & -16 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$x_3 = r$; $-8x_2 - 16r = 2 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{4} - 2r$;

$2x_1 + 4(-\frac{1}{4} - 2r) + 6r = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} + r$;

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 + r \\ -0{,}25 - 2r \\ r \end{pmatrix}$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 25 \\ 1 & 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 25 \\ 0 & 5 & -15 & 5 \\ 0 & 2 & -6 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 25 \\ 0 & 5 & -15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$x_3 = r$; $5x_2 - 15r = 5 \Rightarrow x_2 = 1 + 3r$

$2x_1 + 5(1 + 3r) - r = 0 \Rightarrow x_1 = 10 - 7r$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 - 7r \\ 1 + 3r \\ r \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 209

9 $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$x_3 = r$; $x_2 + 3r = 2 \Rightarrow x_2 = 2 - 3r$

$2x_1 - (2 - 3r) + r = -2 \Rightarrow x_1 = -2r$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2r \\ 2-3r \\ r \end{pmatrix}$

Einsetzen von $\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ -22 \\ 8 \end{pmatrix}$ ergibt z. B. $-15 = -2r$ und $8 = r$

Es gibt also kein r, so dass $\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ -22 \\ 8 \end{pmatrix}$ ein Lösungsvektor ist.

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$: $-2r + 2 - 3r + r = 1 \Leftrightarrow r = 0{,}25$

spezielle Lösung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1{,}25 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 211

2 Es werden x_1, x_2, x_3 g der Präparate P1, P2, P3 genommen.

LGS:
$$0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}1x_3 = 2$$
$$10x_1 + 10x_2 + 20x_3 = 100$$
$$0{,}1x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}25x_3 = 1{,}2$$

LGS in Matrixform: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 20 \\ 10 & 10 & 20 & 100 \\ 1 & 1{,}5 & 2{,}5 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 20 \\ 0 & -5 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$

$x_3 = 1$; $-5x_2 + 15 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$

$2x_1 + 3 \cdot 3 + 1 = 20 \Rightarrow x_1 = 5$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Mischung enthält 5 g von P_1, 3 g von P_2 und 1 g von P_3.

Lehrbuch Seite 217

4 $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$

a) Mittlere Änderungsrate auf [2; 5]:

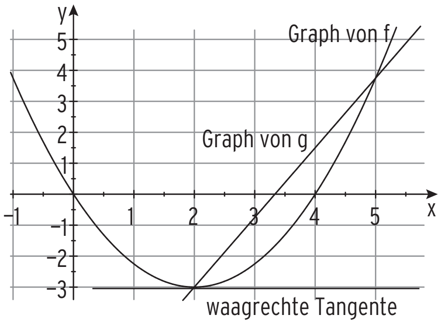
$\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = 2{,}25$

b) Sekante g durch P(2 | − 3) und

Q(5 | 3,75):

g: $y = 2{,}25x - 7{,}5$

Schaubilder von f und g:



c) Momentane Änderungsrate in x = 2:

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{\frac{3}{4}(2 + h)^2 - 3(2 + h) + 3}{h} =$$

$$= \frac{3 + 3h + \frac{3}{4}h^2 - 6 - 3h + 3}{h} = \frac{3}{4}h \to 0 \text{ für } h \to 0$$

Die Steigung des Graphen von f an der Stelle x = 2 ist null, waagrechte Tangente.

Lehrbuch Seite 235

4 $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x-3) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2$; $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$

a) Tangente in $W(1 \mid -\frac{1}{2})$: $f'(1) = -\frac{3}{4}$:

Einsetzen in $y = mx + b$: $-\frac{1}{2} = -\frac{3}{4} + b \Rightarrow b = \frac{1}{4}$

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

b) Stellen mit Steigung $\frac{9}{4}$

Bedingung: $f'(x) = \frac{9}{4}$ $\qquad \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{9}{4}$

Lösungen: $\qquad x_1 = 3$; $x_2 = -1$

Tangente in $x_1 = 3$: $\qquad y = \frac{9}{4}x - \frac{27}{4}$

Tangente in $x_2 = -1$: $\qquad y = \frac{9}{4}x + \frac{5}{4}$

c) Stellen mit Steigung $-\frac{2}{3}$ (negativer Kehrwert von 1,5)

Bedingung: $f'(x) = -\frac{2}{3}$

Stellen: $\qquad x_1 = \frac{4}{3}$; $x_2 = \frac{2}{3}$

Tangente in $x_1 = \frac{4}{3}$: $\qquad y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{27}$

Tangente in $x_2 = \frac{2}{3}$: $\qquad y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{27}$

d) Punkte mit waagrechter Tangente

Bedingung: $f'(x) = 0$

Stellen: $\qquad x_1 = 0$; $x_2 = 2$

Punkte: $\qquad O(0 \mid 0)$; $E(2 \mid -1)$

e) Stellen mit Steigung $-\frac{5}{12}$ (negativer Kehrwert von $2{,}4 = \frac{12}{5}$)

Bedingung: $f'(x) = -\frac{5}{12}$

Stellen: $\qquad x_1 = \frac{5}{3}$; $x_2 = \frac{1}{3}$

Kurvenpunkte: $\qquad P_1(\frac{5}{3} \mid -\frac{25}{27})$; $P_2(\frac{1}{3} \mid -\frac{2}{27})$

Lehrbuch Seite 236

16 $f(x) = 3x - \frac{1}{2}x^2$; $f'(x) = 3 - x$

Steigung in $x = 4$: $f'(4) = -1$

Steigung -1 entspricht einem Steigungswinkel von 135° (bzw. 45°).
Der Geländewagen kommt die Rampe wahrscheinlich nicht hoch.

Lehrbuch Seite 239

3 Gemeinsame Punkte aus der Zeichnung oder durch Berechnung.

$f(x) = g(x)$	$-\frac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 32) = x^2 - 4$
	$-\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2 = 0$
Ausklammern:	$-x^2\left(\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}\right) = 0$
Satz vom Nullprodukt:	$x_{1\|2} = 0$; $x_3 = -2$
Berührpunkt in S(0 | − 4):	$f(0) = g(0) = -4$ und $f'(0) = g'(0) = 0$
Schnittpunkt in S(− 2 | 0):	$f(-2) = g(-2) = 0$
	und $f'(-2) = -4{,}5 \neq g'(-2) = -4$

Lehrbuch Seite 242

5 K → C: K hat für $-2 < x < 2$ eine positive Steigung,
C verläuft für $-2 < x < 2$ oberhalb der x-Achse.
K ist der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades,
C eine Parabel.

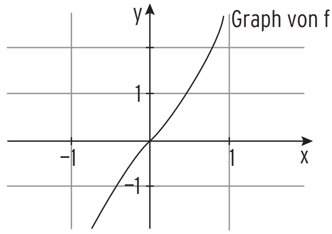
G → B: G ist steigend.
Die Ableitungsfunktion hat keine Nullstelle, sie nimmt nur positive Werte an.

H → A: H hat in $x \approx 1{,}7$ eine waagrechte Tangente.
Die Ableitungsfunktion hat in $x \approx 1{,}7$ eine Nullstelle.
Die Steigung von H in $x = 0$ ist ca. -2, dies entspricht dem y-Achsenabschnitt von A.

Lehrbuch Seite 248

6 a) $f'(x) > 1$

Die Steigung des Graphen von f ist größer als 1,
f ist streng monoton wachsend.
Z. B. $f(x) = x^3 + 2x$
oder z. B. $f(x) = 2x$

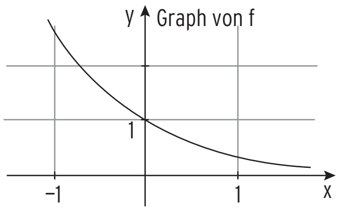


b) $f'(x) \leq 0$

f ist monoton fallend.

Z. B. $f(x) = e^{-x}$

der Graph von f kann z. B. auch eine Parallele zur x-Achse sein.



c) $f'(x) \in [0; 2]$

f ist (streng) monoton wachsend.

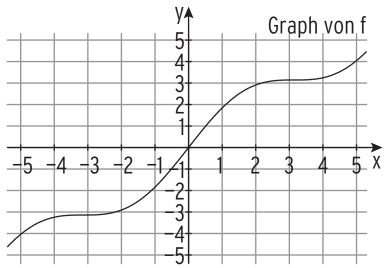
Steigungen zwischen 0 und 2

Z. B. $f(x) = x + \sin(x)$

Waagrechte Tangente in $x = \pm \pi$

oder

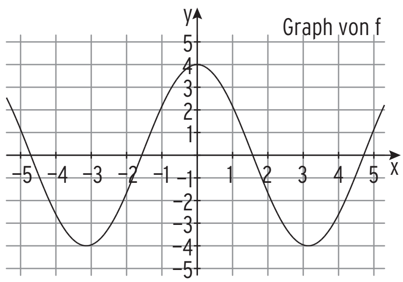
z. B. $f(x) = 1{,}5x$



d) $f(x) \in [-4; 4]$

Funktionswerte zwischen − 4 und 4

Z. B. $f(x) = 4 \cos(x)$



Lehrbuch Seite 254

1 a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 2$; $f'(x) = -\frac{1}{2}x + 1$; $f''(x) = -\frac{1}{2} < 0$

Bedingung: $f'(x) = 0$ $\quad -\frac{1}{2}x + 1 = 0$

$x_1 = 2$

$f''(2) < 0$ und $f(2) = -1$ ergibt $H(2 \mid -1)$.

b) $f(x) = x^3 - 3x$; $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$

Bedingung: $f'(x) = 0$ $\quad 3x^2 - 3 = 0$

$x_{1|2} = \pm 1$

Mit $f''(-1) = -6 < 0$ und $f(-1) = 2$ erhält man $H(-1 \mid 2)$

Mit $f''(1) = 6 > 0$ und $f(1) = -2$ erhält man $T(1 \mid -2)$

c) $f(x) = 2(e^x - x)$; $f'(x) = 2(e^x - 1)$; $f''(x) = 2e^x$

Bedingung: $f'(x) = 0$ $\quad 2(e^x - 1) = 0$

$x_1 = 0$

Mit $f''(0) > 0$ und $f(0) = 2$ erhält man $T(0 \mid 2)$.

d) $f(x) = 3\cos(x)$; $x \in\,]-1; 5[$; $f'(x) = -3\sin(x)$; $f''(x) = -3\cos(x)$

Bedingung: $f'(x) = 0$ $\quad -3\sin(x) = 0$

$x_1 = 0; \pi; 2\pi; \ldots$

Mit $f''(0) < 0$ und $f(0) = 3$ erhält man $H(0 \mid 3)$.

Mit $f''(\pi) > 0$ und $f(\pi) = -3$ erhält man $T(\pi \mid -3)$.

Hinweis:
Kosinuskurve: $H(0 \mid 1)$; $T(\pi \mid -1)$
Das Schaubild von f erhält man durch Streckung von G: $y = \cos(x)$
in y-Richtung mit Faktor 3:
$H(0 \mid 3)$; $T(\pi \mid -3)$

Lehrbuch Seite 262

4 a) $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{2}x$; $f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{3}{2}$; $f''(x) = \frac{9}{4}x$

$W(0 \mid 0)$; $f'(0) = -\frac{3}{2}$ Wendetangente: $y = -\frac{3}{2}x$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 5$; $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$; $f''(x) = 6x - 6$

$W(1 \mid 2)$; $f'(1) = -4$ Wendetangente: $y = -4x + 6$

c) $f(x) = 2\cos(2x)$; $0 < x < 3$; $f'(x) = -4\sin(2x)$; $f''(x) = -8\cos(2x)$

Wendepunkte: $W_1(\frac{\pi}{4} \mid 0)$; $W_2(\frac{3\pi}{4} \mid 0)$

Wendetangente: $y = -4x + \pi$ $y = 4x - 3\pi$

Lehrbuch Seite 263

19 $f'(x) = 0$ für $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$:

f hat zwei Stellen mit waagrechter Tangente;

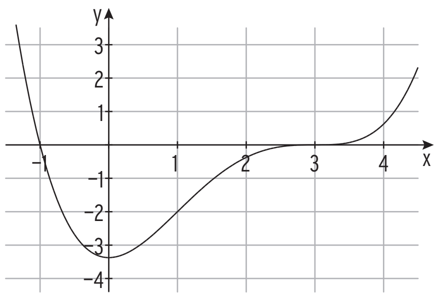
f′ ist eine Polynomfunktion 3. Grades

$f''(3) = 0$
$f''(2{,}9) < 0$;
$f''(3{,}1) > 0$
Die 3 Bedingungen bedeuten: Bei $x_2 = 3$ wechselt $f''(x)$ das Vorzeichen von minus nach plus, x_2 ist Wendestelle.
Bei $x_2 = 3$ liegt ein Krümmungswechsel von Rechtskurve zu Linkskurve vor.
$f'(-1) < 0$ und $f'(1) > 0$:

Zwischen − 1 und 1 liegt eine

Minimalstelle (VZW von $f'(x)$ von −/+)

Tiefpunkt $T(0|\ f(0))$



Lehrbuch Seite 276

4 Ansatz: $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$

Ableitung: $f'(x) = 3a\,x^2 + 2bx + c$

Bedingungen:

geht durch den Ursprung: $f(0) = 0 \quad d = 0$

durch $A\,(2\,|\,1)$: $f(2) = 1$: $\quad 8a + 4b + 2c + d = 1$

an der Stelle $x = 1$ eine waagrechte Tangente: $f'(1) = 0 \quad 3a + 2b + c = 0$

In $x = 3$ eine waagrechte Tangente: $f'(3) = 0 \quad 27a + 6b + c = 0$

LGS (d = 0 eingesetzt):

$$8a + 4b + 2c = 1$$
$$3a + 2b + c = 0$$
$$27a + 6b + c = 0$$

In Matrixform: $\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 27 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -46 & -8 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$a = \frac{1}{2}$; $b = -3$; $c = \frac{9}{2}$; $d = 0$ $\qquad$ Funktionsterm: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x$

A ist der Wendepunkt.

(Eine waagrechte Tangente in $x = 1$ bzw. $x = 3$ ergibt die Wendestelle $x_W = 2$.)

5 f mit $f(x) = a\sin(kx) + c$

Man liest ab:

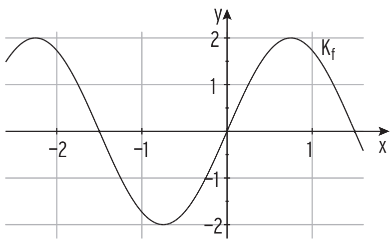
Amplitude $a = 2$

keine Verschiebung in y-Richtung: $c = 0$

Periode $p = \pi$ (Nullstellen bei 0 und $\pm\frac{\pi}{2}$)

also $k = 2$

$f(x) = 2\sin(2x)$



Lehrbuch Seite 277

14 $f(x) = a e^{-x} + bx$; $f'(x) = -a e^{-x} + b$

$h(x) = -x(x-3) = -x^2 + 3x$; $h'(x) = -2x + 3$

Bedingungen: $f(1) = a e^{-1} + b = h(1) = 2$

und $f'(1) = -a e^{-1} + b = h'(1) = 1$

Gleichungssystem: $a e^{-1} + b = 2$

$-a e^{-1} + b = 1$

Addition ergibt: $2b = 3 \Rightarrow b = 1{,}5$

Einsetzen: $a e^{-1} + 1{,}5 = 2$

$a e^{-1} = 0{,}5 \quad | \cdot e \qquad e^{-1} \cdot e = 1$

$a = 0{,}5e$

Ergebnis: $a = 0{,}5e$; $b = 1{,}5$ und $f(x) = 0{,}5e \cdot e^{-x} + 1{,}5x$

Lehrbuch Seite 283

4 Abstand: $d(x) = e^{-2x} + x + 1 - (-x + 1) = e^{-2x} + 2x$

$d'(x) = -2e^{-2x} + 2$; $d''(x) = 4e^{-2x} > 0$

$d'(x) = 0$ $\quad -2e^{-2x} + 2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$d''(0) = 4 > 0$

d wird minimal für $x = 0$.

Minimaler Abstand: $d(0) = 1$

Randwertuntersuchung: $d(-1) = 5{,}39$

$d(1) = 2{,}14$

Der minimale Abstand beträgt 1 m.

6 Abstand: $d(x) = 0{,}021x^2 - 1{,}072x + 25 - 0{,}2x$

$d(x) = 0{,}021x^2 - 1{,}272x + 25;\ 0 \leq x \leq 70$

Ableitungen: $d'(x) = 0{,}042\,x - 1{,}272$; $d''(x) = 0{,}042$

$d'(x) = 0$ $\quad 0{,}042\,x - 1{,}272 = 0 \Rightarrow x = 30{,}3$

Mit $d''(x) > 0$ gilt: d wird minimal für $x = 30{,}3$.

Minimaler Abstand: $d(30{,}3) = 5{,}7$

Randwertuntersuchung: $d(0) = 25$

$d(70) = 38{,}86$

Der minimale Abstand beträgt 5,7 m, die Vorschrift wird eingehalten.

Lehrbuch Seite 286

4 $h(t) = 184 - 184\,e^{-0{,}135t}$; $h'(t) = 24{,}84\,e^{-0{,}135t}$

Langfristig kann der Supermarkt mit 184 wöchentlich verkauften Tuben rechnen. Das Schaubild von h hat die Asymptote mit der Gleichung $y = 184$.

Momentane Änderungsrate in $t = 1$: $h'(1) = 21{,}7$;

in $t = 20$: $h'(20) = 1{,}7$

Zu Beginn nimmt die Verkaufszahl um 21,7 Tuben pro Woche zu, nach 20 Wochen ist die Zuwachsrate geringer, mit nur noch 1,7 Tuben pro Woche.

Lehrbuch Seite 289

3 a) Ansatz: $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$; $s'(t) = 3at^2 + 2bt + c$; $s''(t) = 6at + 2b$

Bedingungen:

In $t = 0$ sind Weg und Geschwindigkeit gleich null: $s(0) = 0$

$s'(0) = v(0) = 0$

der Sprinter beschleunigt mit $3\,m/s^2$: $s''(0) = 3$

Bei $t = 7{,}5$ ist die Beschleunigung null: $s''(7{,}5) = 0$

LGS: $d = 0$

$c = 0$

$2b = 3 \Rightarrow b = 1{,}5$

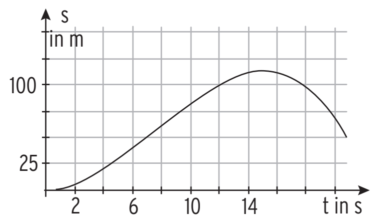
$45a + 2b = 0$

Mit $b = 1{,}5$ ergibt sich $a = -\frac{1}{15}$

$s(t) = -\frac{1}{15}t^3 + \frac{3}{2}t^2$; $v(t) = s'(t) = -\frac{1}{5}t^2 + 3t$

b) Für $t < 7{,}5$ nimmt die Geschwindigkeit zu:

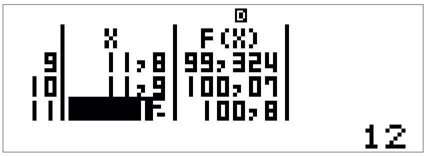
$s''(t) > 0$ (Wendestelle $t = 7{,}5$)



c) Laufzeit $s(t) = 100$ für $t = 11{,}89$ (s)

Z. B. mit einer

verfeinerten Wertetabelle im WTR.



d) Mittlere Geschwindigkeit: $v = \frac{100}{11{,}9} = 8{,}4$

Größte Geschwindigkeit:

$v'(t) = s''(t) = 0$ für $t = 7{,}5$; $v_{max} = v(7{,}5) = 11{,}25$

Die größte Geschwindigkeit nach 7,5 s ist $11{,}25\ \frac{m}{s}$.

Lehrbuch Seite 301

3 a) $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) + c$; $F(\pi) = 0$ ergibt $c = 0$

$F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x)$

b) $F(x) = x^3 - 3x^2 + c$; $F(0) = -1$ ergibt $c = -1$

$F(x) = x^3 - 3x^2 - 1$

c) $F(x) = -0{,}125\,e^{-2x} + \frac{1}{3}x^3 + 3x + c$;

$F(-1) = 2$ ergibt: $-0{,}125\,e^2 - \frac{1}{3} - 3 + c = 2 \Rightarrow c = 0{,}125\,e^2 + \frac{16}{3}$ (= 6,26)

$F(x) = -0{,}125\,e^{-2x} + \frac{1}{3}x^3 + 3x + 0{,}125\,e^2 + \frac{16}{3}$

d) $F(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + c$; $F(2) = \frac{2}{3}$ ergibt $c = 4$

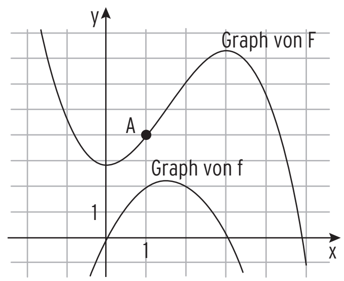
$F(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + 4$

e) $F(x) = 3x^2 + \frac{8}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + c$; $F(-1) = 0$ ergibt $c = -3$

$F(x) = 3x^2 + \frac{8}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 3$

Lehrbuch Seite 305

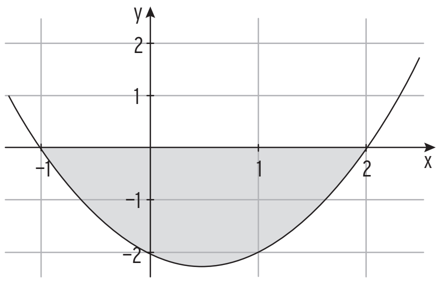
9 Nullstelle von f $\triangleq$ Extremstelle von F



Lehrbuch Seite 321

3 a) Nullstellen: -1; 2

Skizze:



$\int_{-1}^{2} (x-2)(x+1)dx$

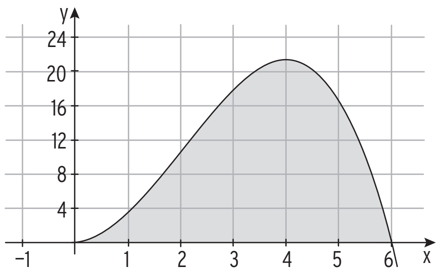
$= \int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)dx = -\frac{9}{2}$

$A = \frac{9}{2}$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$

b) Nullstellen: 0 ; 6

Skizze:

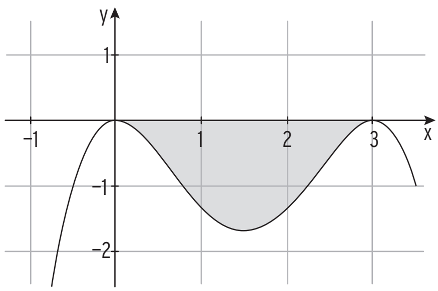


$\int_{0}^{6} (-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2)dx = 72$

$F(x) = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{4}{3}x^3$

c) Nullstellen: 0; 3

Skizze:



$\int_{0}^{3} (-\frac{1}{3}x^4 + 2x^3 - 3x^2)dx = -\frac{27}{10}$

$A = \frac{27}{10}$

$F(x) = -\frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - x^3$

Lehrbuch Seite 323

18 Giebelrand: $f(x) = \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4$

Probe: $f(4) = 0$; Symmetrie zur y-Achse

$2\int_0^4 f(x)dx = 2\left[\frac{1}{320}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + 4x\right]_0^4 = 17{,}07$

Fläche zum Streichen: 17,07 m^2

Farbverbrauch: $350\ cm^3 \cdot 17{,}07 = 5974{,}5\ cm^3$

$2 \cdot 5974{,}5\ cm^3 = 11{,}949$ Liter

Es müssen mindestens 3 Dosen Farbe geliefert werden. (2 Dosen zu je 5 Liter reichen nicht.)

Lehrbuch Seite 327

4 a) $f(x) = 0{,}5(x^2 - 1)$; $g(x) = -0{,}5x - 1$ kein Schnittpunkt

K verläuft oberhalb von G

$\int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,dx = 4{,}67$;

A = 4,67

b) K: $f(x) = x(x - 2)$; Normalparabelform

G: $g(x) = 2\sin(\frac{\pi}{2}x)$

Schnittstellen: x = 0 und x = 2

K verläuft unterhalb von G auf [0; 2]

$\int_{0}^{2} (f(x) - g(x))\,dx = -3{,}88$

A = 3,88

Lehrbuch Seite 330

1 a) $f(x) = x^2 + 1;\ g(x) = -x + 3$

Schnittstelle von f und g: $x_1 = 1$

$\int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = -\frac{7}{6}$;

$\int_1^2 (f(x) - g(x))\,dx = \frac{11}{6}$ $\qquad A = \frac{7}{6} + \frac{11}{6} = 3$

b) $f(x) = x^3 - x;\ g(x) = 3x$

Schnittstellen von f und g: $x_1 = 0;\ x_{2|3} = \pm 2$

$\int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx = -4$

Wegen der Symmetrie der beiden Kurven zum Ursprung: $A = 8$

c) $f(x) = 2\cos(x) + 1;\ g(x) = 1$

Schnittstellen von f und g: $x_{1|2} = \pm 0{,}5\pi$

$\int_0^{0{,}5\pi} (f(x) - g(x))\,dx = 2$

Beide Kurven sind symmetrisch zur y-Achse,

die Fläche besteht aus drei gleichgroßen Teilen: $A = 3 \cdot 2 = 6$

Lehrbuch Seite 337

1 $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$; $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x$; $f''(x) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$; $f'''(x) = \frac{3}{4}$

a) Wendepunkt: $f''(x) = 0$ für $x = 2$

$f'''(2) \neq 0$; $f(2) = 2$ ergibt den Wendepunkt $W(2 \mid 2)$;

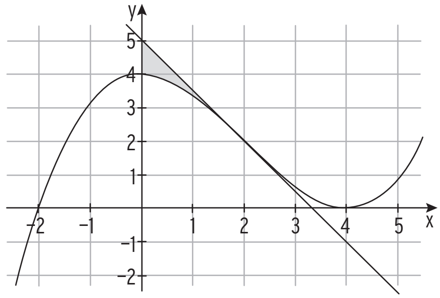
Mit $f'(2) = -\frac{3}{2}$ und Punktprobe mit W in $y = -\frac{3}{2}x + b$:

Wendetangente mit $y = -\frac{3}{2}x + 5$

Fläche zwischen Wendetangente und Kurve:

$\int_0^2 \left(-\frac{3}{2}x + 5 - f(x)\right) dx = \frac{1}{2}$;

$A = \frac{1}{2}$



b) $f(-2) = 0$; $f(6) = 4$ ergibt Steigung $m = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Punktprobe mit $(6 \mid 4)$ in $y = 0{,}5x + b$ ergibt $b = 1$.

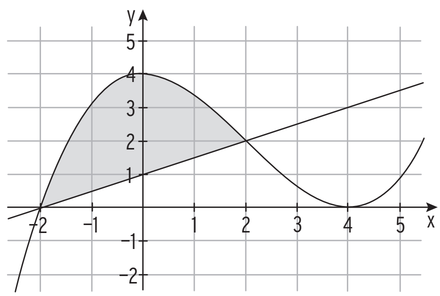
Gerade g mit $g(x) = 0{,}5x + 1$

Schnittstellen:

$x_1 = -2$; $x_2 = 2$; $x_3 = 6$

$\int_{-2}^2 \left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\right) dx = 8$

$A = 8$



c) Fläche setzt sich aus 2 Flächenstücken zusammen.

Dreiecksfläche: $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$

$\int_2^4 f(x)dx = 1{,}5$;

$A = 4 + 1{,}5 = 5{,}5$

Lehrbuch Seite 338

10 Steigung der Tangente $f'(0) = \pi$

Tangente t_1 mit Steigung π durch $(0 \mid 1)$: $t_1(x) = \pi x + 1$

Die Gerade mit $y = t_2(x) = -\pi x + 2\pi + 1$ ist Tangente an K_f an der Stelle

$x_2 = 2$, da $m = f'(2) = -\pi$ und $(2 \mid 1)$ liegt auf K_f und auf der Geraden:

$f(2) = t_2(2) = 1$

Die Fläche ist symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = 1$.

$\int_0^1 (t_1(x) - f(x))dx = \int_0^1 (\pi x + 1 - (2\sin(\frac{\pi}{2}x) + 1))dx = \int_0^1 (\pi x - 2\sin(\frac{\pi}{2}x))dx$

$= \left[\frac{\pi}{2}x^2 + \frac{4}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}x) \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}$

Flächeninhalt: $A = 2(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}) = \pi - \frac{8}{\pi}$

Lehrbuch Seite 342

1 a) $\int_{-4}^{4} (8 - f(x))dx = 34{,}13$; $A = 34{,}13$

Der Wasserquerschnitt ist etwa 34 dm^2 groß.

b) Höhe 3,5: Bedingung: $f(x) = 3{,}5$ $\qquad -\frac{1}{32}x^4 + x^2 = 3{,}5$

Durch Substitution erhält man: $\qquad x_{1|2} = \pm 2$ $(x_{3|4} = \pm 5{,}29)$

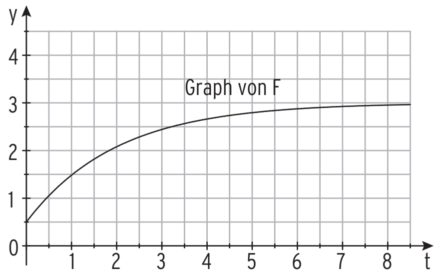
$\int_{-2}^{2} (3{,}5 - f(x))dx = 9{,}07$

Es fließen $\frac{9{,}07}{34{,}13} = 26{,}6$ % der maximalen Wassermenge.

Lehrbuch Seite 347

1 a) Schaubild einer Stammfunktion F von v mit F(0) = 0,5

$F(t) = -2{,}5e^{-0{,}5t} + 3$



b) $\int_0^1 v(t)\,dt$: Höhenzuwachs im 1. Jahr

$\int_1^4 v(t)\,dt$: Höhenzuwachs vom 1. bis zum 4. Jahr

$0{,}5 + \int_0^4 v(t)\,dt$: Höhe nach 4 Jahren

Lehrbuch Seite 348

7 Entnahmegeschwindigkeit in m^3 pro Stunde: $f(x) = 24x - x^2$; $0 \leq x \leq 24$

a) $\int_2^3 f(x)dx = 53{,}67$

Zwischen 2 Uhr und 3 Uhr werden dem Speicher 53,67 m^3 Wasser entnommen.

b) $800 - \int_0^5 f(x)dx = 541{,}67$

$\int_0^5 f(x)dx$ gibt die Entnahme in den ersten 5 Stunden an.

Zu Beginn sind 800 m^3 im Speicher.

Im Wasserspeicher sind nach 5 Stunden noch 541,67 m^3 Wasser.