

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner

Lehrauftrag Mathematik am BSW Wangen

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch

Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Umschlag: © frhuynh - Fotolia.com, kleines Bild oben: © Picture-Factory - Fotolia.com,
kleines Bild unten: Africa Studio - Fotolia.com

Download-Icon: Stoyan Haytov - Fotolia.com

* * * * *

1. Auflage 2016

© 2016 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung:

MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de

lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-0639-2

Vorwort

Vorbemerkungen

Der vorliegende Band ist ein Arbeitsbuch für das Wahlgebiet „Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen“ in allen beruflichen Gymnasien nichttechnischer Richtung. Es erfüllt den neuen Bildungsplan von 2014 für das berufliche Gymnasien in Baden-Württemberg vollständig.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam sowohl die im Lehrplan geforderten inhalts- als auch die prozessbezogenen Kompetenzen (modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).

Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die im Bildungsplan aufgeführten Kompetenzen und Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Eine sinnvolle Ergänzung ist das Buch „Mathematik für berufliche Gymnasien - Abitur“ (ISBN 978-3-810-450-3) mit Aufgaben für das Abitur in neuer Form. Das Buch wird jährlich aktualisiert.

Begleitend wird ein Arbeitsheft (ISBN 978-3-810-1639-1) angeboten. Es soll Schüler und Lehrer durch Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung unterstützen.

Die Verfasser

Der Aufbau dieses Buches

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.

3 Produktions- und Verbrauchsvektoren

Beispiel

Ein Unternehmen stellt aus drei Rohstoffen R_1 , R_2 und R_3 Zwischenprodukte und daraus die Endprodukte E_1 , E_2 und E_3 her. Die nebenstehende Stückliste gibt den Bedarf an Rohstoffen für je 1 ME der Endprodukte an.

	E_1	E_2	E_3
R_1	3	1	2
R_2	2	1	4
R_3	1	2	5

a) Wie viele Rohstoffe werden benötigt, um 2 ME von E_1 , 5 ME von E_2 und 3 ME von E_3 herzustellen?
 b) Wie viele Endprodukte können aus 27 ME von R_1 , 35 ME von R_2 und 40 ME von R_3 hergestellt werden?

Lösung

Für die Produktion von **je einer ME** E_1 braucht man 3 ME R_1 ,
je einer ME E_2 braucht man 1 ME R_1 ,
je einer ME E_3 braucht man 2 ME R_1 .

a) Für die Produktion von 2 ME von E_1 , 5 ME von E_2 und 3 ME von E_3

- braucht man $(2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3)$ ME R_1 , also **17 ME** R_1 .
- braucht man $(2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 3)$ ME R_2 , also **21 ME** R_2 .
- braucht man $(1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 3)$ ME R_3 , also **27 ME** R_3 .

Ergebnis: Für die Herstellung von 2 ME von E_1 , 5 ME von E_2 und 3 ME von E_3 werden 17 ME von R_1 , 21 ME von R_2 und 27 ME von R_3 benötigt.

In Matrixschreibweise: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 21 \\ 27 \end{pmatrix}$

b) Aus den Rohstoffen werden x_1 ME von E_1 , x_2 ME von E_2 und x_3 ME von E_3 produziert. Dann gilt für 27 ME R_1 : $3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 27$.
 für 35 ME R_2 : $2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 35$
 und für 40 ME R_3 : $1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = 40$

Jede Lerneinheit schließt mit einer ausreichenden Anzahl von **Aufgaben** ab. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Kompetenzorientierte Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Aufgaben aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her.

Die Aufgaben „Modellierung einer Situation“ und „Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse“ werden im Anhang ausführlich gelöst.

Für **Aufgaben mit dem Download-Logo** stehen **ausführliche Lösungen zum Download** bereit. Sie finden diese in der Mediathek zum Buch auf unserer Website <http://www.merkur-verlag.de>.

Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.

Aufgaben

1 Ein Betrieb fertigt drei verschiedene Endprodukte E_1 , E_2 und E_3 unter Verwendung von drei verschiedenen Rohstoffen R_1 , R_2 und R_3 . Die nebenstehende Tabelle gibt an, wie viele Mengeneinheiten (ME) Rohstoffe für die Produktion von jeweils 1 ME Endprodukten benötigt werden.

	E_1	E_2	E_3
R_1	2	1	2
R_2	1	1	2
R_3	3	1	1

Die Verkaufspreise für die drei Endprodukte in € je ME sind gegeben durch $\vec{p} = (30 \ 50 \ 25)$.

a) Für einen Auftrag sind je 100 ME von E_1 , 60 ME von E_2 und 40 ME von E_3 zu liefern. Berechnen Sie den Gesamterlös in € und die benötigten Rohstoffmengen in ME.

b) Für einen weiteren Auftrag werden von R_1 250 ME, von R_2 200 ME und von R_3 250 ME verarbeitet. Wieviele ME von E_1 , E_2 und E_3 werden damit gefertigt?

III Ein- und zweistufige Produktionsprozesse

Modellierung einer Situation

Die Weber Metallbau GmbH produziert aus den Bauteilen R_1 und R_2 die Baugruppen Z_1 , Z_2 und Z_3 . Aus diesen werden die Fassadenelemente E_1 , E_2 und E_3 hergestellt.

Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist den Tabellen zu entnehmen.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	1	4
R_2	0	1	2

	E_1	E_2	E_3
Z_1	1	1	4
Z_2	3	2	3
Z_3	1	2	2

	E_1	E_2	E_3
R_1	12	10	16
R_2	10	12	14

Eine ME von R_1 kostet 1 Geldeinheit (GE), eine ME von R_2 kostet 3 GE. Die Fertigungskosten für eine ME von Z_1 betragen 3 GE, für eine ME von Z_2 4 GE und für eine ME Z_3 2 GE. Die Fertigungskosten für eine ME von E_1 betragen 4 GE, für eine ME von E_2 2 GE und für eine ME von E_3 3 GE.

Das Unternehmen erhält einen Auftrag über 35 ME von E_1 , 27 ME von E_2 und 34 ME von E_3 . Der Auftraggeber bietet 7200 € für diesen Auftrag. Ein Lieferant bietet 150 ME von Z_1 , 200 ME von Z_2 und 100 ME von Z_3 für insgesamt 4800 € an.

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

1 Berechnen Sie:

a) $(0.5 \ 2 \ 4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3$

2 Berechnen Sie: $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. Vergleichen Sie mit dem Produkt zweier Zahlen.

3 Multiplizieren Sie aus und berechnen Sie x_0 , x_1 und x_2 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 5 & 12 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 39 \end{pmatrix}$$

4 Berechnen Sie die Inverse von A.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgaben

1 Liegt eine stochastische Matrix vor? Begründen Sie Ihre Wahl.

a) $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.7 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$

2 Eine Teilchenart TA kann drei Energiezustände I, II und III annehmen. Das Diagramm beschreibt, wie die Teilchen innerhalb eines festen Zeitschritts ihre Energiezustände ändern. Interpretieren Sie das Diagramm.

Beachten Sie:

Gilt für eine stochastische Matrix A , $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = G$, so besteht die Matrix G aus lauter gleichen Spalten:

$$G = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ x_2 & x_2 & \dots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

G heißt **Grenzmatrix**. Der Spaltenvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ist ein **Stabilitätsvektor**.

Die stochastischen Eigenwerte und die Eigenwerte des stochastischen Operators.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
---------------	---

I Lineare Gleichungssysteme

1 Einführung	10
2 Umformung und Lösung eines linearen Gleichungssystems	12
2.1 Das LGS ist eindeutig lösbar	12
2.2 Das LGS ist unlösbar	16
2.3 Das LGS ist mehrdeutig lösbar	17
2.4 Anwendungen	23

II Rechenoperationen mit Matrizen

1 Rechnen mit Matrizen	28
1.1 Einführung	29
1.2 Addition und skalare Multiplikation	31
1.3 Multiplikation von Matrizen	35
2 Inverse Matrix	42
2.1 Einführung	42
2.2 Berechnung der inversen Matrix	43
3 Matrizengleichungen	48
3.1 Einführung	48
3.2 Auflösung von Matrizengleichungen	49

III Ein- und zweistufige Produktionsprozesse

1 Einführung	55
2 Verflechtungsmatrizen	58
3 Produktions- und Verbrauchsvektoren	65
4 Kosten	72

IV Übergangsprozesse

1 Einführung	85
2 Stochastische Übergangsprozesse	87
2.1 Stochastische Matrix	87
2.2 Stabilitätsvektor und Grenzmatrix	95
2.3 Absorbierender Zustand	102
3 Zyklische Verteilungen	105

ANHANG

Musteraufgaben für das Abitur.....	114
Lösungen der Modellierungen und Tests.....	116
Stichwortverzeichnis	124
Abbildungsverzeichnis.....	126