

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Kurt Bohner

Lehrauftrag Mathematik am BS Wangen

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Ronald Deusch

Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner

Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall

Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die in diesem Buch zitierten Internetseiten wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte in zumutbarem Umfang untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.

Stand: August 2022

Umschlag: Kreis oben: Syda Productions - www.colourbox.de

* * * * *

2 Auflage 2022

© 2018 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0695-02

ISBN 978-3-8120-0695-8

Vorwort

Vorbemerkungen

Der vorliegende Band „Mathematik für die Einführungsphase“ ist ein Arbeitsbuch für den Mathematikunterricht in allen beruflichen Gymnasien in Niedersachsen der Fachrichtungen Wirtschaft und Verwaltung, Gesundheit und Soziales und weiteren Bildungsgängen, die den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife ermöglichen. Das Buch behandelt den gesamten Lehrstoff, die Statistik, die Ganzrationalen Funktionen, die Exponentialfunktionen, die trigonometrischen Funktionen und eine Einführung in die Differenzialrechnung.

Grundlage der Inhalte ist das Kerncurriculum von 2017. Das Autorenteam berücksichtigt sowohl die in den Rahmenrichtlinien geforderten inhalts- als auch die prozessbezogenen Kompetenzen (modellieren, argumentieren, kommunizieren, nutzen mathematischer Werkzeuge und Darstellungen, lösen innermathematischer Problemstellungen sowie das Umgehen mit formalen und symbolischen Elementen).

Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die in den Richtlinien aufgeführten Kompetenzen wie auch die Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Begleitend werden ein Arbeitsheft (ISBN 978-3-8120-2695-9) und eine Formelsammlung (ISBN 978-3-8120-1695-0) angeboten. Das Arbeitsheft soll Schüler und Lehrer durch Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung unterstützen.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

Der Aufbau dieses Buches

Jedes Hauptkapitel beginnt mit berufsbezogenen **Lernsituationen**, die die Schüler/innen eigenverantwortlich und selbstorganisiert bearbeiten. Die **Lösungen der Lernsituationen** befinden sich im Anhang.

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.

2 Lineare Funktionen

Lernsituation

Die Pyrotech GmbH stellt Feuerwerke aller Art her. Unter anderem werden Feuerwerksraketen, und Böllertypen für unterschiedliche Anlässe – z. B. Hochzeiten – produziert.

Das Sortiment soll um Tischfeuerwerke erweitert werden. Der Produktionsleiter Herr Fischer kalkuliert diese Kosten zur Erweiterung der Produktionskapazität in Höhe von 25 GE. Eine ME Tischfeuerwerk wird mit Produktionskosten von 150 GE veranschlagt. Die Kapazitätsgrenze liegt bei 40 ME. Die Verkaufserlöse für diese verkauft aufgrund ihrer Marktsättigung, das mindestens 30 ME verkauft werden können. Sie möchten den Preis so festlegen, dass ihr Produktion und dem Verkauf von 60 % ihrer Mindestmenge, Gewinne erzielt wird.

Triften Sie eine Entscheidung über die Preisgestaltung und analysieren Sie die Daten.



78 Quadratische Funktionen und wirtschaftliche Anwendungen

Angebotsfunktion

Beispiel

Die gewinnwirtschaftliche Angebotsfunktion ist gegeben durch

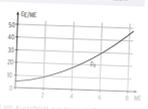
$$a) p_A(x) = 0,5x^2 + x + 5 \quad x \in D_A \quad b) p_A(x) = -3x^2 + 30x + 20 \quad x \in D_A$$

Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen von p_A mathematisch und ökonomisch.

Lösung

a) Quadratische Angebotsfunktion p_A mit $p_A(x) = 0,5x^2 + x + 5$

Mindestpreis: $p_A(0) = 5$
 p_A hat keine Nullstelle auf D_A .



Das Schaubild der Angebotsfunktion p_A ist ein Ausschnitt des linear nach oben

Kompetenzorientierte Fragestellungen mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Probleme aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her.

Jede Lerneinheit endet mit einer umfassenden Anzahl von Aufgaben. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet.

Eine **Differenzierung der Aufgaben** ist durch Farben gegeben;

blau: Lösung ohne Hilfsmittel

schwarz: keine Vorgabe zur Lösung.



Für **Aufgaben mit dem Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese in der Mediathek zum Buch auf unserer Website <http://www.merkur-verlag.de>.

Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.

Grundwissen: Die Schüler im Beruflichen Gymnasium kommen aus verschiedenen Schularten mit unterschiedlichen Vorkenntnissen. Um die Schüler dennoch möglichst schnell auf ein gleiches Wissensniveau zu bringen und damit gleiche Ausgangsbedingungen für den Mathematikunterricht zu schaffen, gibt es ein umfangreiches **Kapitel zur Wiederholung** der grundlegenden Rechentechniken und aller mathematischen Grundlagen aus der Mittelstufe.



Die **Heftklammer** im Lehrbuch mit Seitenangabe weist auf einen entsprechenden Abschnitt im Kapitel Grundwissen hin.

Seite 210

Die Aufgaben **„Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse“** werden im Anhang ausführlich gelöst.

Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Im Buch wird **Geogebra** in vielfältiger Weise, zur Erarbeitung von mathematischen Inhalten und zur Lösung von Aufgaben eingesetzt.



5b **Graphische Funktionen und wirtschaftliche Anwendungen**

- Berechnen Sie die Koordinaten der Scheitelpunkte der Graphen von f mit den Koordinatenachsen. Zeichnen Sie die Graphen in ein Koordinatensystem ein.
 - $f(x) = -4x - 3x + 5$
 - $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{2}$
 - $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$
- Die Gerade von f und von g schneiden sich im Punkt S. Ermitteln Sie die Koordinaten von S. Zeichnen Sie die Geraden in ein Koordinatensystem ein und kennzeichnen Sie S.
 - $f(x) = 3x + \frac{1}{2}$
 - $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
 - $f(x) = -\frac{1}{2}x - 1$
 - $g(x) = -\frac{1}{2}x - 4$
 - $g(x) = \frac{1}{2}x - 4$
- In einer Fabrik entstehen zur Herstellung von maximal 1200 ME Fertigteilen fixe Kosten in Höhe von 450 GE. Die variablen Kosten je ME Fertigtteil betrage 0,25 GE.
 - Ermitteln Sie einen Term für die Gesamterlösfunktion K.
 - Berechnen Sie das Verkaufsergebnis je ME, wenn bei 160 ME Kostendeckung erzielt wird.
 - Bestimmen Sie den maximalen Gewinn.
 - Durch Rationalisierung lassen sich die Fixkosten um 20% senken. Die Verkaufspreise bleiben gleich. Ermitteln Sie das Gewinnschwellen- und das maximale Gewinn.
 - Die Kosten für ein anderes Produktionsverfahren lassen sich beschreiben durch $K_{neu}(x) = 0,2x + 500$. Ermitteln Sie die Produktionszahl, ab der es sich lohnt, die Produktion mit dem Reizen aus (a) umzustellen.
- Die Abbildung zeigt die Gewinnsituation der Kramer GmbH aus Göttingen.
 - Beschreiben Sie die Gewinnfunktion.
 - Geben Sie den Gewinn pro Stück bei 40 ME an.
 - Ermitteln Sie die variablen Gesamtkosten, wenn der Stückpreis bei 124 EUR liegt.
- Der Gewinn eines Betriebes lässt sich beschreiben durch $G(x) = 0,25x - 1,2x^2$ mit $x \geq 0$. x ist die Produktionsmenge in ME, $G(x)$ der Gewinn in Geldeinheiten (GE).
 - Skizzieren Sie die Umkehrfunktion $G^{-1}(x) > 0$. Interpretieren Sie das Ergebnis ökonomisch.
 - Erläutern Sie die mathematische und ökonomische Bedeutung von $0,25$ bzw. $-1,2$ auf dem Term der Gewinnfunktion.
 - Der Gewinn beträgt 312. Bestimmen Sie die zugehörige Produktionsmenge.

- Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Graphen von f_1 und f_2 . Bestimmen Sie gegebenenfalls die Koordinaten der Schnittpunkte.
 - $f_1(x) = 2x^2 - 6x + 2$; $f_2(x) = -2x + 8$
 - $f_1(x) = x^2 - 5x + 5$; $f_2(x) = 3x - 6$
 - $f_1(x) = x^2 + x + 2$; $f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$
 - $f_1(x) = x^2 + x - 5$; $f_2(x) = 3x - 6$
 - $f_1(x) = x^2 + x - 2,5$; $f_2(x) = 0,5x - 1$
- Die Gesamterlöse einer Unternehmung werden durch die Funktion $K(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 7000$, $x \geq 0$ beschrieben. Die Absatzfunktion liegt bei 100 ME. Der

Die Angebotspreise reichen von 20 GE/ME (für $x = 0$) bis 90 GE/ME (für $x = 5$). Der ökonomische Wertebereich ist $W_{\text{ök}} = [20; 95]$.

Beachten Sie:
Eine **Angebotsfunktion** ist eine **wachsende Funktion**:
 $p_1(x)$ wird größer, wenn x größer wird. Dabei gilt: $p_1(x) > 0$ für $x \in D_{p_1}$.
 p_1 hat keine Nullstelle auf D_{p_1} .

218 **VI Grundwissen**

1 Intervalle als Teilmengen der reellen Zahlen

Beispiele

$[0; 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$ alle reellen Zahlen von 0 bis 5, einschließlich 0 und 5
 $(-2; 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 2\}$ alle reellen Zahlen zwischen -2 bis 2, ausschließl. -2 und einschließl. 2
 $(-5; 6) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 6\}$ alle reellen Zahlen größer als -5 und kleiner als 6
 $[1; \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ alle reellen Zahlen größer oder gleich 1

Geschlossenes Intervall: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Offenes Intervall: $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Ermitteln Sie den Gewinn an der Kapazitätsgrenze ($x \in \mathbb{R}$).

16 **11** Bestimmen Sie die Lösungsmenge ($x \in \mathbb{R}$).

- $20x + 3(5x + 7) = 2(3 - x)$
- $5x - (8 - 9x) = 12$
- $4x - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}x + 1$
- $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = x + 4$
- $x - 3(4 - x) + 2 = (x - 5)(x - 1)$
- $-\frac{1}{2}(x - 1) + 1 = \frac{1}{3}x$

1 Lösen Sie die quadratische Gleichung.
 $a) x^2 + 2x - 15 = 0$ $b) 4x - 3(2x - 1) = 0$

2 Gegeben sind die Gesamterlösfunktion K durch $K(x) = 0,2x^2 + 3x + 20$ und die Erlösfunktion E mit $E(x) = 8x$. Die Kapazitätsgrenze liegt bei 22 ME.

- Berechnen Sie die Gewinnschwelle und die Verlustzone.
- Zeichnen Sie, dass der maximale Gewinn 1,25 GE beträgt.
- Nach einer Preisänderung gilt $F_{\text{neu}}(x) = 7x$. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Graphen von K und F_{neu} . Interpretieren Sie Ihr Ergebnis ökonomisch.

3 Die Abbildung 1 zeigt einen Ausschnitt einer

Definition einer Funktion

39

Darstellungsmöglichkeiten einer Funktion f

Beispiele

- Funktionsgleichung) $f(x) = x^2 - x \cdot x \in \mathbb{R}$
- Wertetabelle

x	-2	-1	0	0,5	1	2	3
$f(x) = (-1)^2 - (-1) = 2$	0,01	0	0	-0,25	0	2	6

$f(3) = 3^2 - 3 = 6$

Inhaltsverzeichnis

I Beschreibende Statistik	9
1 Erfassung und Darstellung von Daten	10
2 Datenauswertung	17
2.1 Lagemaße	17
2.2 Streuungsmaße	22
2.3 Klassierte Daten	32
II Ganzrationale Funktionen und wirtschaftliche Anwendungen	37
1 Definition einer Funktion	37
2 Lineare Funktionen	41
2.1 Definition der linearen Funktion	42
2.2 Aufstellen von linearen Funktionstermen	50
2.3 Gemeinsame Punkte	55
2.4 Geradenscharen	64
3 Quadratische Funktionen	67
3.1 Definition der quadratischen Funktion	69
3.2 Parametervariation bei ganzrationalen Funktionen 2. Grades	70
3.3 Gemeinsame Punkte	73
3.3.1 Gemeinsame Punkte von Graph und Abszissenachse	73
3.3.2 Gemeinsame Punkte von zwei Graphen	81
3.4 Aufstellen von Funktionstermen für quadratische Funktionen	88
3.5 Parabelscharen	91
4 Potenzfunktionen	95
5 Ganzrationale Funktionen dritten Grades	97
5.1 Definition einer ganzrationalen Funktion dritten Grades	99
5.2 Gemeinsame Punkte	104
5.2.1 Polynomgleichungen	104
5.2.2 Nullstellen ganzrationaler Funktionen 3. Grades	106
5.2.3 Gemeinsame Punkte von zwei Graphen	110
5.3 Aufstellen von Funktionstermen für ganzrationale Funktionen 3. Grades	118
5.4 Kurvenscharen	122
III Exponentialfunktionen	125
1 Einführungsbeispiele	126
2 Definition einer Exponentialfunktion	128
3 Schaubilder von Exponentialfunktionen	129
4 Anwendungsorientierte Aufgaben	134

IV Trigonometrische Funktionen 141

1	Einführungsbeispiele	142
2	Definition der Winkelfunktionen	143
2.1	Definition der Winkelfunktionen für Winkel von 0° bis 90°	143
2.2	Das Bogenmaß eines Winkels	145
2.3	Definition der Sinus- und der Kosinusfunktion für $x \in \mathbb{R}$	146
3	Schaubilder von Trigonometrischen Funktionen	147
4	Anwendungsorientierte Aufgaben	158

V Einführung in die Differenzialrechnung 161

1	Ableitungen von Funktionen	162
1.1	Änderungsrate	162
1.2	Definition der Ableitung	166
1.3	Ableitungsregeln	168
1.4	Ableitung und Steigung	173
2	Untersuchung von Graphen mithilfe der Differenzialrechnung	181
2.1	Monotonie	182
2.2	Extrempunkte	186
2.3	Wendepunkte	193
3	Weitere Anwendungen der Differenzialrechnung	200
3.1	Wirtschaftliche Anwendungen	200
3.2	Extremwertaufgaben	214

VI Grundwissen 218

1	Intervalle als Teilmengen der reellen Zahlen	218
2	Algebraische Begriffe und Vorübungen	219
2.1	Begriffe	219
2.2	Rechnen mit Summen und Differenzen	219
2.3	Rechnen mit Brüchen	221
2.4	Vereinfachung durch Ausklammern	222
2.5	Rechnen mit Potenzen	223
3	Gleichungen und Gleichungssysteme	225
3.1	Lineare Gleichungen	225
3.2	Lineare Gleichungssysteme	227
3.3	Quadratische Gleichungen	229

Anhang 233

1	Operatoren für das Fach Mathematik	233
2	Fachbegriffe aus der Wirtschaft	235
3	Einführung in Geogebra und GeogebraListen	239
4	Lösungen der Lernsituationen	242
5	Lösungen der Tests	250
6	Lösungen der Aufgaben im Kapitel Grundwissen	261
7	Mathematische Zeichen	264
8	Stichwortverzeichnis	265