

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Kurt Bohner

Lehrauftrag Mathematik am BS Wangen

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Ronald Deusch

Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner

Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall

Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG behält sich eine Nutzung ihrer Inhalte für kommerzielles Text- und Data Mining (TDM) im Sinne von § 44 b UrhG ausdrücklich vor. Für den Erwerb einer entsprechenden Nutzungserlaubnis wenden Sie sich bitte an copyright@merkur-verlag.de.

Die in diesem Buch zitierten Internetseiten wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte in zumutbarem Umfang untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.

Stand: Januar 2023

Umschlag: Kreis oben: Syda Productions - www.colourbox.de

* * * * *

2. Auflage 2023

© 2019 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr.: 0696-02

ISBN 978-3-8120-0696-5

Vorwort

Vorbemerkungen

Der vorliegende Band „Mathematik für die Qualifikationsphase“ ist ein Arbeitsbuch für den Mathematikunterricht in allen beruflichen Gymnasien in Niedersachsen der Fachrichtungen Wirtschaft und Verwaltung, Gesundheit und Soziales und weiteren Bildungsgängen, die den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife ermöglichen. Das Buch behandelt den gesamten Lehrstoff, die Analysis mit Differenzialrechnung und Integralrechnung, die Stochastik, die Lineare Algebra und die Analytische Geometrie.

Die Grundlage der Inhalte ist das Kerncurriculum von 2018. Das Autorenteam berücksichtigt sowohl die in den Rahmenrichtlinien geforderten inhalts- als auch die prozessbezogenen Kompetenzen (modellieren, argumentieren, kommunizieren, nutzen mathematischer Werkzeuge und Darstellungen, lösen innermathematischer Problemstellungen sowie das Umgehen mit formalen und symbolischen Elementen).

Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die in den Richtlinien aufgeführten Kompetenzen wie auch die Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Die vorliegende Neuauflage ist auf ein Arbeiten mit einem CAS ausgerichtet.

Begleitend werden ein Arbeitsheft (ISBN 978-3-8120-2696-9) und eine Formelsammlung (ISBN 978-3-8120-1695-0) angeboten. Das Arbeitsheft soll Schüler und Lehrer durch Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung unterstützen.

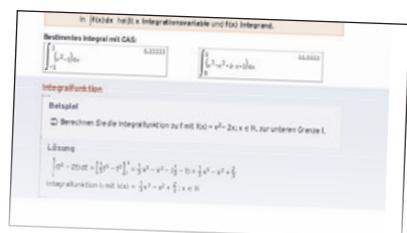
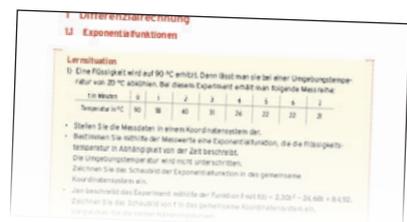
Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

Der Aufbau dieses Buches

Jedes Hauptkapitel beginnt mit berufsbezogenen **Lernsituationen**, die die Schüler/innen eigenverantwortlich und selbstorganisiert bearbeiten. Die Lösungen der Lernsituationen befinden sich im Anhang.

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.



Vorwort

Kompetenzorientierte Fragestellungen mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Probleme aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her.

Jede Lerneinheit endet mit einer umfassenden Anzahl von Aufgaben. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet.

Eine **Differenzierung der Aufgaben** ist durch Farben gegeben;

blau: Lösung ohne Hilfsmittel

schwarz: keine Vorgabe zur Lösung.

Themen und Aufgaben für das erhöhte Anforderungsniveau (eA) sind farblich hinterlegt.

Für **Aufgaben mit dem Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese im Downloadbereich zum Buch auf unserer Website <http://www.merkur-verlag.de>.



Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.

Prüfungsvorbereitung – Analysis, Stochastik, Lineare Algebra und Analytische Geometrie
Schüler/innen bereiten sich durch die Bearbeitung prüfungähnlicher Aufgaben auf Kursarbeiten und auf die Abiturprüfung vor. Die mathematischen Anforderungen werden wiederholt und die Schüler/innen lernen die prüfungsspezifischen Formulierungen kennen.

Die Aufgaben „**Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse**“ werden im Anhang ausführlich gelöst.

Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Im Buch wird Geogebra in vielfältiger Weise, zur Erarbeitung von mathematischen Inhalten und zur Lösung von Aufgaben eingesetzt.



Aufgaben

1. Berechnen Sie den Integralwert.
 - a) $\int_{-1}^1 (2x + 1) dx$
 - b) $\int_{-1}^1 (2x^2 + 1) dx$
 - c) $\int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx$
2. Bestimmen Sie die folgenden Integrale.
 - a) $\int_{-1}^1 (2x^2 + 6x - 1) dx$
 - b) $\int_{-1}^1 (2x^2 + 6x + 1) dx$
 - c) $\int_{-1}^1 (3x + \frac{1}{2}) dx$
 - d) $\int_{-1}^1 (2x + \frac{1}{2}) dx$
 - e) $\int_{-1}^1 (2x + \frac{1}{2}) dx$
3. Maria hat berechnet: $\int_{-1}^1 (x^2 - 2x) dx = 0$. Nehmen Sie Stellung.
4. Bestimmen Sie die folgenden Integrale.
 - a) $\int_{-1}^1 (2x^2 + 6x + 1) dx$
 - b) $\int_{-1}^1 (2x + 1) dx$
5. Ermitteln Sie die obere Grenze a so, dass gilt: $\int_{-1}^a (x^2 + 2) dx = 2$.
6. Bestimmen Sie $x > 0$, sodass $\int_{-1}^x (x^2 - 2x + 1) dx = 0$.
7. Ermitteln Sie den Integralwert.
 - a) $\int_{-1}^1 (2x) dx$
 - b) $\int_{-1}^1 (2x^2) dx$
 - c) $\int_{-1}^1 (2x^2 + 1) dx$
8. Berechnen Sie die Ober- und Untersumme der Funktion f mit $K(x) = x^2 + 1$ über dem Intervall $[0, 2]$ mittels einer Zerlegung in 4 gleich große Teilintervalle.
9. Gegeben ist die Funktion f mit $K(x) = 0,5x^{10} - x + 1$.
 - a) Zeigen Sie f mit $K(x) = -x + 2x^{10}$ ist eine Stammfunktion von f .
 - b) Berechnen Sie die Intervallsumme $\int_{-1}^1 f(x) dx$ mit dem Hauptsatz.
 - c) Untersuchen Sie, ob es eine obere Grenze a gibt, sodass $\int_{-1}^a f(x) dx = 3$.

10. Geben Sie eine Stammfunktion von f mit $K(x) = 2x^{10} - x + 3$ an.
Bestimmen Sie den Integralwert $\int_{-1}^1 f(x) dx$ mit dem Hauptsatz.

Logarithmisches Wachstum

Beispiel

Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1000}{1 + 2x}$ beschreibt die Ausgaben für Konsumgüter des Landes A in Abhängigkeit von der Zeit t ($t = 0$ Beginn des Jahres 2016, t in Jahren, $f(t)$ in Milliarden Euro).

2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 - e^{-x} + 1$. Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f . Zeigen Sie die Halbwertszeit $T_{1/2}$ der Funktion f zwischen $-0,69$ und $-0,70$. Erläutern Sie, wie der Graph von f aus dem Graphen von g ($g(x) = e^{-x} + 1$) entsteht.
3. Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = 0,2x - 0,01x^2 + 1$.
 - a) Skizzieren Sie den Graphen von f und beschreiben Sie den Verlauf.
 - b) Für $x = -0,50$ haben die tangentialen Kurvenpunkte einen Abstand von dem Abszissenwert $x = -0,50$.

Bestimmen Sie

Konsumsteuern: $K(x) = \int_{-1}^x (2x^2 - 2x) dx + \int_{-1}^x (2x^2 - 2x) dx + K_0$
 Inhalt der Fläche zwischen dem Graph der Nachfragefunktion und der Preislinie.
 Produktionssteuern: $P(x) = \int_{-1}^x (2x^2 - 2x) dx + \int_{-1}^x (2x^2 - 2x) dx + P_0$
 Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Angebotsfunktion und der Preislinie.
 Die Funktionen h_1 und h_2 sind für $x > 0$ definiert.

3 Prüfungsvorbereitung – Analysis

• Ohne Hilfsmittel

1. In der Controllingabteilung rechnet die Wearables Ltd. bei dem Modell e-ClickIt mit folgenden ertragsbezogener Kostenfunktion K :
 $K(x) = 0,02 \cdot x^2 - 0,6 \cdot x + 16 + 4 \cdot 0,02 \cdot x = 0,02 \cdot x^2 - 0,56 \cdot x + 16$
 Kosten $K(x)$ in GE (1 GE = 1000 €), Menge x in ME (1 ME = 1000 Stück)
11. Berechnen Sie den Wendepunkt des Graphen der Kostenfunktion.
12. Erläutern Sie die Bedeutung dieses Wendepunktes im Sachzusammenhang.
2. In der Produktion von Springkollern hängen die Produktionskosten in hohem Maße vom Preis des verwendeten Rohstoffes Zinn ab. Da dieser nicht vorsteuerbar ist, kalkuliert das Unternehmen mit einer parametrisch abhängigen Funktion:
 $K(x) = \frac{1}{2} x^2 - 0,1 x^3 + c \cdot x + 30$ mit $c > 0$.
- 2.1. Eine ertragsmaximale Kostenfunktion besitzt keine lokalen Extrema. Zeigen Sie, dass dies für $c > 30$ erfüllt ist.
- 2.2. Bestimmen Sie, dass die Betriebskosten Ausbringungsmenge nicht vom Parameter c abhängt.

3. In der Gewinn- oder Verlustfunktion eines Produktionsunternehmens sind die Nullstellen

1. Bestimmen Sie $f(x)$.
 - a) $f(x) = 2x^2 - 4$
 - b) $f(x) = 3x - 2x^2 - 4$
 - c) $f(x) = (1 + 30x)e^{10x}$
2. Skizzieren Sie die Schablonen von f mit $f(x) = (x - 2)e^x$ und die Tangente im Kurvenpunkt $P(2 | f(2))$ in ein Koordinatensystem ein. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Kurvenpunkt P .
3. Gegeben ist die Nachfragefunktion D_0 mit $D_0(x) = (4 - 0,5x)e^{2x - 2}$. Bestimmen Sie den maximalen Absatz D_0 innerhalb des Definitionsbereichs für die

Bestimmung von Stammfunktionen

Beispiele

FM	F(x)	Prüfungsaussage (F(x))
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$	$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$
x^2	$\frac{1}{3}x^3 + C$	$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$
x^3	$\frac{1}{4}x^4 + C$	$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$
x^4	$\frac{1}{5}x^5 + C$	$\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C$
x^5	$\frac{1}{6}x^6 + C$	$\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 + C$
x^6	$\frac{1}{7}x^7 + C$	$\int x^6 dx = \frac{1}{7}x^7 + C$
x^7	$\frac{1}{8}x^8 + C$	$\int x^7 dx = \frac{1}{8}x^8 + C$
x^8	$\frac{1}{9}x^9 + C$	$\int x^8 dx = \frac{1}{9}x^9 + C$
x^9	$\frac{1}{10}x^{10} + C$	$\int x^9 dx = \frac{1}{10}x^{10} + C$
x^{10}	$\frac{1}{11}x^{11} + C$	$\int x^{10} dx = \frac{1}{11}x^{11} + C$

Inhalt

I Analysis 11

1	Differenzialrechnung	11
1.1	Exponentialfunktionen	11
1.1.1	Die Euler'sche Zahl e	12
1.1.2	Exponentialfunktionen zur Basis e	13
1.1.3	Graphen von Exponentialfunktionen	15
1.1.4	Exponentialgleichungen und geometrische Interpretation	20
1.1.4.1	Der natürliche Logarithmus	20
1.1.4.2	Exponentialgleichungen	21
1.1.4.3	Exponentialgleichungen mit der Basis $a > 0$	25
1.1.4.4	Bestimmung von gemeinsamen Punkten	26
1.1.5	Ableitungsregeln	30
1.1.6	Kurvenuntersuchung	35
1.1.7	Exponentialfunktionen in Anwendungen	39
1.1.7.1	Wachstumsprozesse	39
1.1.7.2	Wirtschaftliche Anwendungen	47
1.2	Gebrochenrationale Funktionen	56
1.2.1	Einführung	57
1.2.2	Die Grundfunktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$	58
1.2.3	Ableitung von gebrochenrationalen Funktionen	63
1.2.4	Wirtschaftliche Anwendungen	64
1.3	Funktionsanpassung	79
1.4	Untersuchung einer Kurvenschar	91
2	Integralrechnung	98
2.1	Einführung	99
2.2	Stammfunktion und unbestimmtes Integral	101
2.2.1	Stammfunktion	101
2.2.2	Grafisches Differenzieren und Integrieren	106
2.2.3	Das unbestimmte Integral	110
2.3	Das bestimmte Integral	111
2.4	Flächeninhaltsberechnung mithilfe der Integralrechnung	120
2.4.1	Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion und der Abszissenachse	120
2.4.2	Fläche zwischen zwei Graphen	128
2.5	Wirtschaftliche Anwendungen der Integralrechnung	135
2.6	Rotationskörper	147
3	Prüfungsvorbereitung – Analysis	150

II Stochastik 156

1	Umgang mit Zufall und Wahrscheinlichkeit	156
1.1	Zufallsexperiment	157
1.1.1	Einstufiges Zufallsexperiment	157
1.1.2	Mehrstufiges Zufallsexperiment	159
1.2	Ereignisse	161
1.3	Wahrscheinlichkeit	166
1.3.1	Definition der Wahrscheinlichkeit	166
1.3.2	Wahrscheinlichkeit bei Gleichverteilung (Laplace-Experiment)	170
1.3.3	Wahrscheinlichkeit bei mehrstufigen Zufallsexperimenten	173

1.3.4	Additionssatz	178
1.3.5	Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit	180
1.4	Zufallsvariable	187
1.4.1	Einführung	187
1.4.2	Wahrscheinlichkeitsverteilung	190
1.4.3	Erwartungswert einer Zufallsvariablen	193
1.4.4	Varianz und Standardabweichung einer Zufallsvariablen	198
2	Binomialverteilung	204
2.1	Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Ketten	205
2.2	Die Bernoulli-Formel	207
2.3	Erwartungswert und Varianz einer Binomialverteilung	216
2.4	Prognoseintervalle	224
3	Normalverteilung	230
3.1	Von der Binomialverteilung zur Normalverteilung	230
3.2	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei Normalverteilung	232
3.3	Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung	238
4	Konfidenzintervalle	244
4.1	Bestimmung von Konfidenzintervallen	245
4.2	Stichprobenumfang und Länge des Konfidenzintervalls	253
4.3	Konfidenzintervalle für beliebige Sicherheitswahrscheinlichkeiten	255
5	Prüfungsvorbereitung – Stochastik	259

III Lineare Algebra

262

1	Rechenoperationen mit Matrizen	262
1.1	Rechnen mit Matrizen	263
1.1.1	Einführung	263
1.1.2	Addition und skalare Multiplikation	265
1.1.3	Multiplikation von Matrizen	269
1.2	Inverse Matrix	276
1.2.1	Einführung	276
1.2.2	Berechnung der inversen Matrix	277
2	Lineare Verflechtung bei mehrstufigen Produktionsprozessen	282
2.1	Produktionsprozesse	283
2.2	Verflechtungsmatrizen	286
2.3	Produktions- und Verbrauchsvektoren	292
2.4	Kosten	299
3	Das Leontiefmodell	312
3.1	Beschreibung des Leontiefmodells	313
3.2	Inputmatrix	315
3.3	Problemstellungen beim Leontiefmodell	321
3.3.1	Die Konsumabgabe hängt von der gegebenen Produktion ab	321
3.3.2	Die Produktion richtet sich nach der erwarteten Nachfrage	323
3.3.3	Produktion und der Konsum sind teilweise gegeben	325
4	Stochastische Übergangsprozesse	332
4.1	Käufer- und Wahlverhalten	333
4.2	Stabilitätsvektor und Grenzmatrix	342
5	Prüfungsvorbereitung - Lineare Algebra	352

IV Analytische Geometrie**356**

1	Raumanschauung und Koordinatisierung	357
1.1	Punkte	357
1.2	Vektoren	362
1.3	Rechnen mit Vektoren	364
1.3.1	Addition und Subtraktion	364
1.3.2	Skalare Multiplikation	367
1.3.3	Linearkombination von Vektoren	368
2	Maße und Längen	373
2.1	Abstand von zwei Punkten	373
2.2	Skalarprodukt	375
2.3	Winkel zwischen zwei Vektoren	377
2.4	Flächen- und Volumenberechnungen	380
3	Prüfungsvorbereitung – Analytische Geometrie	387

Anhang**389**

1	Lösungen der Lernsituationen	389
2	Lösungen der Tests	401
3	Einführung in Geogebra – GeogebraListe	416
4	Mathematische Zeichen	420
5	Stichwortverzeichnis	421
6	Abbildungsverzeichnis	425