

# Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

## Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

---

Die Verfasser:

**Kurt Bohner**

Lehrauftrag Mathematik am BS Wangen

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

**Roland Ott**

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

**Ronald Deusch**

Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

**Stefan Rosner**

Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall

Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die in diesem Buch zitierten Internetseiten wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte in zumutbarem Umfang untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.

Stand: Januar 2023

Umschlag: Kreis oben: Syda Productions - [www.colourbox.de](http://www.colourbox.de)

\* \* \* \* \*

2. Auflage 2023

© 2019 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: [info@merkur-verlag.de](mailto:info@merkur-verlag.de); [lehrer-service@merkur-verlag.de](mailto:lehrer-service@merkur-verlag.de)

Internet: [www.merkur-verlag.de](http://www.merkur-verlag.de)

Merkur-Nr.: 0696-02

ISBN 978-3-8120-0696-5

# Vorwort

## Vorbemerkungen

Der vorliegende Band „Mathematik für die Qualifikationsphase“ ist ein Arbeitsbuch für den Mathematikunterricht in allen beruflichen Gymnasien in Niedersachsen der Fachrichtungen Wirtschaft und Verwaltung, Gesundheit und Soziales und weiteren Bildungsgängen, die den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife ermöglichen. Das Buch behandelt den gesamten Lehrstoff, die Analysis mit Differenzialrechnung und Integralrechnung, die Stochastik, die Lineare Algebra und die Analytische Geometrie.

Die Grundlage der Inhalte ist das Kerncurriculum von 2018. Das Autorenteam berücksichtigt sowohl die in den Rahmenrichtlinien geforderten inhalts- als auch die prozessbezogenen Kompetenzen (modellieren, argumentieren, kommunizieren, nutzen mathematischer Werkzeuge und Darstellungen, lösen innermathematischer Problemstellungen sowie das Umgehen mit formalen und symbolischen Elementen).

Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die in den Richtlinien aufgeführten Kompetenzen wie auch die Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Die vorliegende Neuauflage ist auf ein Arbeiten mit einem CAS ausgerichtet.

Begleitend werden ein Arbeitsheft (ISBN 978-3-8120-2696-9) und eine Formelsammlung (ISBN 978-3-8120-1695-0) angeboten. Das Arbeitsheft soll Schüler und Lehrer durch Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung unterstützen.

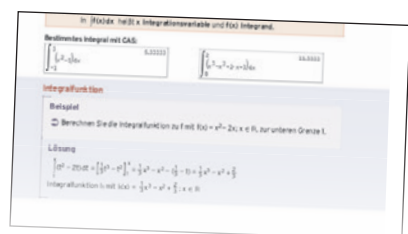
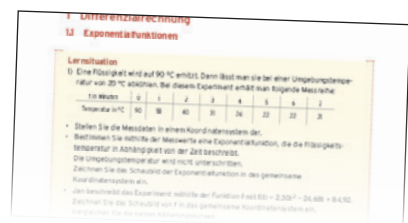
Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

## Der Aufbau dieses Buches

Jedes Hauptkapitel beginnt mit berufsbezogenen **Lernsituationen**, die die Schüler/innen eigenverantwortlich und selbstorganisiert bearbeiten. Die Lösungen der Lernsituationen befinden sich im Anhang.

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.



# Vorwort

Kompetenzorientierte Fragestellungen mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Probleme aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her.

Jede Lerneinheit endet mit einer umfassenden Anzahl von Aufgaben. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet.

Eine **Differenzierung der Aufgaben** ist durch Farben gegeben;

**blau:** Lösung ohne Hilfsmittel

**schwarz:** keine Vorgabe zur Lösung.

Themen und Aufgaben für das erhöhte Anforderungsniveau (eA) sind farblich hinterlegt.

Für **Aufgaben mit dem Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese in der Mediathek zum Buch auf unserer Website <http://www.merkur-verlag.de>.



**Definitionen, Festlegungen, Merksätze** und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.

## Prüfungsvorbereitung – Analysis, Stochastik, Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Schüler/innen bereiten sich durch die Bearbeitung prüfungähnlicher Aufgaben auf Kursarbeiten und auf die Abiturprüfung vor. Die mathematischen Anforderungen werden wiederholt und die Schüler/innen lernen die prüfungsspezifischen Formulierungen kennen.

Die Aufgaben „**Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse**“ werden im Anhang ausführlich gelöst.

Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Im Buch wird Geogebra in vielfältiger Weise, zur Erarbeitung von mathematischen Inhalten und zur Lösung von Aufgaben eingesetzt.



**Aufgaben**

- 1 Berechnen Sie den Integralwert.  $\int_{-1}^1 (2x + 1) dx$   $\int_{-1}^1 (2x^2 + 1) dx$
- 2 Bestimmen Sie die folgenden Integrale.  $\int_{-1}^1 (2x^2 + 1) dx$   $\int_{-1}^1 (2x^2 + 1) dx$
- 3 Maria hat berechnet:  $\int_{-1}^1 (2x^2 + 1) dx = 0$ . Nehmen Sie Stellung.
- 4 Bestimmen Sie die folgenden Integrale.  $\int_{-1}^1 (2x^2 + 1) dx$   $\int_{-1}^1 (2x^2 + 1) dx$
- 5 Erstellen Sie die obere Grenze  $u$  so, dass gilt:  $\int_{-1}^u (2x^2 + 1) dx = 2$ .
- 6 Bestimmen Sie  $x > 0$ , sodass  $\int_{-1}^x (2x^2 + 1) dx = 0$ .
- 7 Erstellen Sie den Integralwert.  $\int_{-1}^1 (2x^2 + 1) dx$   $\int_{-1}^1 (2x^2 + 1) dx$
- 8 Berechnen Sie die Ober- und Untersumme der Funktion  $f$  mit  $K(x) = x^2 + 1$  über dem Intervall  $[0, 2]$  mithilfe einer Zerlegung in 4 gleich große Teilintervalle.
- 9 Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $K(x) = 0,5x^{10} + x + 1$ .
- 10 Zeigen Sie  $f$  mit  $K(x) = -x + 2x^{10}$  ist eine Stammfunktion von  $f$ .
- 11 Berechnen Sie die Stammfunktion  $F$  der unteren Grenze  $u$ .
- 12 Untersuchen Sie, ob es eine obere Grenze  $u$  gibt, sodass  $\int_{-1}^u (2x^2 + 1) dx = 3$ .

10 Geben Sie eine Stammfunktion  $F$  der Funktion  $f(x) = 2x^{10} + x + 1$  an.  
Bestimmen Sie den Integralwert  $\int_{-1}^1 (2x^2 + 1) dx$ .

**Logarithmisches Wachstum**

**Beispiel**

Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1000}{1 + 2x}$  beschreibt die Ausgaben für Konsumgüter des Landes  $A$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  ( $t = 0$  Beginn des Jahres 2016,  $t$  in Jahren,  $f(t)$  in Milliarden Euro).

- 2 Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = 2 - e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von  $f$ . Zeigen Sie die Nullstelle von  $f$  liegt zwischen  $-0,69$  und  $-0,70$ . Erläutern Sie, wie der Graph mit dem Graphen von  $g(x) = e^x + 1$  verhält.
- 3 Die Funktion  $f$  ist gegeben durch  $f(x) = 0,2x - 0,01x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 4 Skizzieren Sie den Graphen von  $f$  und beschreiben Sie den Verlauf.
- 5 Für  $x = -4,50$  haben die Tangentialpunkte einen Abstand von dem Abszissenwert.

**Rechnen Sie**

Kostenfunktions  $K(x) = \frac{1}{2} (0,2x^3 - 0,01x^4) + 0,1x^2 + 0,1x + 0,1$

Inhalt der Fläche zwischen dem Graph der Nachfragefunktion und der Preislinie

Produktionsfunktions  $P(x) = \frac{1}{2} (0,2x^3 - 0,01x^4) + 0,1x^2 + 0,1x + 0,1$

Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Angebotsfunktion und der Preislinie

Die Funktionen  $P_1$  und  $P_2$  sind für  $x \geq 0$  definiert.

### 3 Prüfungsvorbereitung – Analysis

• Ohne Hilfsmittel

- 1 In der Controllingabteilung rechnet die Wearebly Ltd. bei dem Modell e-ClickIt mit folgenden unternehmensspezifischer Kostenfunktion  $K$ :  
 $K(x) = 0,02 \cdot x^3 - 0,6 \cdot x^2 + 16 \cdot x + 0,02$ ,  $x \in [0, 100]$   
Kosten  $K(x)$  in GE (1 GE = 1000 €), Menge  $x$  in ME (1 ME = 1000 Stück)
- 11 Berechnen Sie den Wendepunkt des Graphen der Kostenfunktion.
- 12 Erläutern Sie die Bedeutung dieses Wendepunktes im Sachzusammenhang.
- 2 In der Produktion von Springgitarren hängen die Produktionskosten in hohem Maße vom Preis des verwendeten Rohmaterials Zinn ab. Da dieser nicht vorsteuerbar ist, kalkuliert das Unternehmen mit einer parametrisch abhängigen Funktion:  
 $K(x, z) = \frac{1}{2} z^2 - 0,1z^2 + c$ ,  $x \geq 30$  mit  $c > 0$
- 2.1 Eine parametrisch abhängige Kostenfunktion besitzt keine lokalen Extrema. Zeigen Sie, dass dies für  $c > 36$  erfüllt ist.
- 2.2 Bestimmen Sie, dass die Betriebskosten  $K$  Ausbringungsmenge nicht vom Parameter  $c$  abhängt.
- 3 In der Betriebswirtschaftslehre werden unter Produktionskostenkurven auf die Kurvenkurve

- 1 Bestimmen Sie  $f(x)$ .  
a)  $f(x) = 2x^2 - 4$     b)  $f(x) = 3x - 2x^2 - 4$     c)  $f(x) = (1 + 30x)^{10}$
- 2 Skizzieren Sie die Schablonen von  $f$  mit  $f(x) = (x - 2)^{10}$  und die Tangente im Kurvenpunkt  $P(2 | 0)$  in ein Koordinatensystem ein. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Kurvenpunkt  $P$ .
- 3 Gegeben ist die Nachfragefunktion  $D_1$  mit  $D_1(x) = (4 - 0,5x)e^{2-x}$ . Bestimmen Sie den maximalen Absatz  $A$  innerhalb des Definitionsbereichs für die

**Bestimmung von Stammfunktionen**

**Beispiele**

$f(x)$	$F(x)$	Probe (bei Ableiten $F'(x)$ )
$x$	$\frac{1}{2}x^2 + C$	$\frac{1}{2} \cdot 2x = x$
$x^2$	$\frac{1}{3}x^3 + C$	$\frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$
$x^3$	$\frac{1}{4}x^4 + C$	$\frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3$
$x^4$	$\frac{1}{5}x^5 + C$	$\frac{1}{5} \cdot 5x^4 = x^4$
$x^5$	$\frac{1}{6}x^6 + C$	$\frac{1}{6} \cdot 6x^5 = x^5$
$x^6$	$\frac{1}{7}x^7 + C$	$\frac{1}{7} \cdot 7x^6 = x^6$
$x^7$	$\frac{1}{8}x^8 + C$	$\frac{1}{8} \cdot 8x^7 = x^7$
$x^8$	$\frac{1}{9}x^9 + C$	$\frac{1}{9} \cdot 9x^8 = x^8$
$x^9$	$\frac{1}{10}x^{10} + C$	$\frac{1}{10} \cdot 10x^9 = x^9$
$x^{10}$	$\frac{1}{11}x^{11} + C$	$\frac{1}{11} \cdot 11x^{10} = x^{10}$

# Inhalt

## I Analysis

11

1	Differenzialrechnung	11
1.1	Exponentialfunktionen	11
1.1.1	Die Euler'sche Zahl $e$	12
1.1.2	Exponentialfunktionen zur Basis $e$	13
1.1.3	Graphen von Exponentialfunktionen	15
1.1.4	Exponentialgleichungen und geometrische Interpretation	20
1.1.4.1	Der natürliche Logarithmus	20
1.1.4.2	Exponentialgleichungen	21
1.1.4.3	Exponentialgleichungen mit der Basis $a > 0$	25
1.1.4.4	Bestimmung von gemeinsamen Punkten	26
1.1.5	Ableitungsregeln	30
1.1.6	Kurvenuntersuchung	35
1.1.7	Exponentialfunktionen in Anwendungen	39
1.1.7.1	Wachstumsprozesse	39
1.1.7.2	Wirtschaftliche Anwendungen	47
1.2	Gebrochenrationale Funktionen	56
1.2.1	Einführung	57
1.2.2	Die Grundfunktion $f$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$	58
1.2.3	Ableitung von gebrochenrationalen Funktionen	63
1.2.4	Wirtschaftliche Anwendungen	64
1.3	Funktionsanpassung	79
1.4	Untersuchung einer Kurvenschar	91
2	Integralrechnung	98
2.1	Einführung	99
2.2	Stammfunktion und unbestimmtes Integral	101
2.2.1	Stammfunktion	101
2.2.2	Grafisches Differenzieren und Integrieren	106
2.2.3	Das unbestimmte Integral	110
2.3	Das bestimmte Integral	111
2.4	Flächeninhaltsberechnung mithilfe der Integralrechnung	120
2.4.1	Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion und der Abszissenachse	120
2.4.2	Fläche zwischen zwei Graphen	128
2.5	Wirtschaftliche Anwendungen der Integralrechnung	135
2.6	Rotationskörper	147
3	Prüfungsvorbereitung – Analysis	150

## II Stochastik

156

1	Umgang mit Zufall und Wahrscheinlichkeit	156
1.1	Zufallsexperiment	157
1.1.1	Einstufiges Zufallsexperiment	157
1.1.2	Mehrstufiges Zufallsexperiment	159
1.2	Ereignisse	161
1.3	Wahrscheinlichkeit	166
1.3.1	Definition der Wahrscheinlichkeit	166
1.3.2	Wahrscheinlichkeit bei Gleichverteilung (Laplace-Experiment)	170
1.3.3	Wahrscheinlichkeit bei mehrstufigen Zufallsexperimenten	173

1.3.4	Additionssatz .....	178
1.3.5	Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit .....	180
1.4	Zufallsvariable .....	187
1.4.1	Einführung .....	187
1.4.2	Wahrscheinlichkeitsverteilung .....	190
1.4.3	Erwartungswert einer Zufallsvariablen .....	193
1.4.4	Varianz und Standardabweichung einer Zufallsvariablen .....	198
2	Binomialverteilung .....	204
2.1	Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Ketten .....	205
2.2	Die Bernoulli-Formel .....	207
2.3	Erwartungswert und Varianz einer Binomialverteilung .....	216
2.4	Prognoseintervalle .....	224
3	Normalverteilung .....	230
3.1	Von der Binomialverteilung zur Normalverteilung .....	230
3.2	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei Normalverteilung .....	232
3.3	Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung .....	238
4	Konfidenzintervalle .....	244
4.1	Bestimmung von Konfidenzintervallen .....	245
4.2	Stichprobenumfang und Länge des Konfidenzintervalls .....	253
4.3	Konfidenzintervalle für beliebige Sicherheitswahrscheinlichkeiten .....	255
5	Prüfungsvorbereitung – Stochastik .....	259

### III Lineare Algebra

262

1	Rechenoperationen mit Matrizen .....	262
1.1	Rechnen mit Matrizen .....	263
1.1.1	Einführung .....	263
1.1.2	Addition und skalare Multiplikation .....	265
1.1.3	Multiplikation von Matrizen .....	269
1.2	Inverse Matrix .....	276
1.2.1	Einführung .....	276
1.2.2	Berechnung der inversen Matrix .....	277
2	Lineare Verflechtung bei mehrstufigen Produktionsprozessen .....	282
2.1	Produktionsprozesse .....	283
2.2	Verflechtungsmatrizen .....	286
2.3	Produktions- und Verbrauchsvektoren .....	292
2.4	Kosten .....	299
3	Das Leontiefmodell .....	312
3.1	Beschreibung des Leontiefmodells .....	313
3.2	Inputmatrix .....	315
3.3	Problemstellungen beim Leontiefmodell .....	321
3.3.1	Die Konsumabgabe hängt von der gegebenen Produktion ab .....	321
3.3.2	Die Produktion richtet sich nach der erwarteten Nachfrage .....	323
3.3.3	Produktion und der Konsum sind teilweise gegeben .....	325
4	Stochastische Übergangsprozesse .....	332
4.1	Käufer- und Wahlverhalten .....	333
4.2	Stabilitätsvektor und Grenzmatrix .....	342
5	Prüfungsvorbereitung - Lineare Algebra .....	352

**IV Analytische Geometrie****356**

1	Raumanschauung und Koordinatisierung .....	357
1.1	Punkte .....	357
1.2	Vektoren .....	362
1.3	Rechnen mit Vektoren .....	364
1.3.1	Addition und Subtraktion .....	364
1.3.2	Skalare Multiplikation .....	367
1.3.3	Linearkombination von Vektoren .....	368
2	Maße und Längen .....	373
2.1	Abstand von zwei Punkten .....	373
2.2	Skalarprodukt .....	375
2.3	Winkel zwischen zwei Vektoren .....	377
2.4	Flächen- und Volumenberechnungen .....	380
3	Prüfungsvorbereitung – Analytische Geometrie .....	387

**Anhang****389**

1	Lösungen der Lernsituationen .....	389
2	Lösungen der Tests .....	401
3	Einführung in Geogebra – GeogebraListe .....	416
4	Mathematische Zeichen .....	420
5	Stichwortverzeichnis .....	421
6	Abbildungsverzeichnis .....	425