

Patyna

Mathematik

für das Berufliche Gymnasium in Niedersachsen

Kerncurriculum und Bildungsstandards

Qualifikationsphase – Schwerpunkt Wirtschaft

Stochastik, Lineare Algebra, Analytische Geometrie



Arbeitsheft

Merkur 
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasserin:

Marion Patyna

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die in diesem Buch zitierten Internetseiten wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.

Die Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG behält sich eine Nutzung ihrer Inhalte für kommerzielles Text- und Data Mining (TDM) im Sinne von § 44 b UrhG ausdrücklich vor. Für den Erwerb einer entsprechenden Nutzungserlaubnis wenden Sie sich bitte an copyright@merkur-verlag.de.

Stand: Februar 2026

Umschlag: Hintergrund: ECE, Ernst-August-Galerie, Hannover,
Kreis rechts oben: Candy Box – Fotolia.com, Kreis mitte: Colourbox.de,
Kreis links: Syda Productions – Colourbox.de, Grafik: Colourbox.de

* * * * *

4. Auflage 2026

© 2020 by Merkur Verlag Rinteln

Gesamtherstellung:

Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr.: 2687-04

ISBN 978-3-8120-2212-5

Vorwort

Das vorliegende Arbeitsheft ergänzt den dritten Band der Buchreihe für den Mathematikunterricht mit dem Schwerpunkt Wirtschaft am Beruflichen Gymnasium in Niedersachsen. Die Grundlage für dieses Arbeitsheft bildet das neue *Kerncurriculum (KC)* von 2018, das wiederum auf den *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife* aus dem Jahr 2012 basiert.

Die Autorin berücksichtigt bei der Erstellung dieser Bücher die **inhaltsbezogenen** und die **prozessbezogenen Kompetenzen**, die die Schülerinnen und Schüler gemäß KC während der drei Jahre am Beruflichen Gymnasium erwerben sollen. Der in der BbS VO bzw. EB BbS VO verankerten **Handlungsorientierung** wird durchgängig Rechnung getragen.

Jedes Hauptkapitel beginnt mit **berufsbezogenen Lernsituationen gemäß SchuCu-BBS 2024** und **DU-BBS**, die die Schülerinnen und Schüler **eigenverantwortlich** und **selbstorganisiert** mithilfe der Informationstexte und der Beispielaufgaben aus den nachfolgenden Abschnitten des Buches bearbeiten und sich so die notwendigen Kompetenzen aneignen können. Jede Lernsituation umfasst nicht nur die zugrunde liegende **berufliche Handlungssituation**, sondern auch **problemorientierte Aufgabenstellungen**. Neben den Hinweisen auf die benötigten und die zu erzielenden Kompetenzen werden Hinweise zur Bearbeitung und ergänzend Hinweise für die Umsetzung im Distanzunterricht gegeben. Die vorgeschlagenen Sozialformen sind in **grün** hervorgehoben und die vorgeschlagenen Handlungsergebnisse in **blau**. Die Abfolge der Lernsituationen ist so konzipiert, dass die Schülerinnen und Schüler immer selbstständiger agieren können und müssen. Das mathematische und wirtschaftliche Fachvokabular wird durchgängig in **rot** hervorgehoben. Auf diese Weise erhalten die Schülerinnen und Schüler einen Überblick über die zu lernenden Vokabeln. Außerdem sind alle roten Begriffe im Stichwortverzeichnis aufgeführt. Die wirtschaftlichen Erklärungen können sich die Lernenden mittels QR-Code vorlesen lassen und sich so die Fachsprache einfacher aneignen.

Um die in den Lernsituationen benötigten Fähigkeiten und Fertigkeiten im Nachgang zu trainieren und zu festigen, enthält das Buch eine Vielzahl verschiedener Übungsaufgaben, die je nach Aufgabentyp händisch und/oder mit einem Computer-Algebra-System (CAS) gelöst werden können und durchgängig mithilfe von **Operatoren** formuliert werden. Außerdem sind GeoGebra-Dateien mittels QR-Code abrufbar, die das entdeckende Lernen unterstützen und fördern. In den zugehörigen Arbeitsheften finden sich weitere Übungen und/oder Spiele bzw. Rätsel, um Fachvokabeln zu lernen, das strukturierte Vorgehen bei der Bearbeitung von Lernsituationen zu üben und benötigte innermathematische Kompetenzen zu erwerben. Dadurch wird zielgerichtet der Kompetenzaufbau erreicht und die Schülerinnen und Schüler, die am **Zentralabitur Mathematik** teilnehmen werden, können die Aufgaben des hilfsmittelfreien Teils (Prüfungsteil A) und des Teils mit Hilfsmitteln (Prüfungsteil B) adäquat und sachgerecht bearbeiten.

Die Reihenfolge der einzelnen Kapitel kann als Basis für den Aufbau des **schulinternen Curriculums** und der **Jahresplanung** dienen, muss sie aber nicht. Die Autorin hat darauf geachtet, dass die Lehrkräfte ihren Unterricht mithilfe dieser Bücher individuell aufbauen können, weil die mathematisch inhaltsbezogenen Kompetenzen gemäß **Spiralcurriculum** in die Berufsbezüge integriert werden. Außerdem unterstützt die zu dieser Reihe gehörende Formelsammlung, die sich auf alle inhaltsbezogenen Kompetenzen des Kerncurriculums bezieht, das eigenständige und selbstorganisierte Lernen. Der Aufbau der Formelsammlung orientiert sich an dem Aufbau der Buchreihe, ist aber als Nachschlagewerk fachsystematisch strukturiert und thematisch sortiert.

Das Lehrerbegleitheft umfasst nicht nur alle **Erwartungshorizonte** und **Kompetenzraster** für die Lernsituationen und die Lösungen für die Übungsaufgaben, sondern auch **methodische Hinweise** zur Unterrichtsgestaltung sowie **digitale Materialien** für den Einsatz im Unterricht.

Wie nutze ich die Bücher zum Lernen?

Das folgende Video zeigt, wie Sie das Buch und die Arbeitshefte eigenständig nutzen können, um Mathematik zu lernen, die Bedeutung der Mathematik für wirtschaftliche Handlungssituationen zu verstehen und problemorientierte Aufgabenstellungen zu lösen. Es zeigt die vielfältigen Angebote und Nutzungsmöglichkeiten der Bücher und Arbeitshefte zum selbstorganisierten Lernen.

Über den folgenden QR-Code gelangen Sie zum Erklärvideo:



2 Lineare Algebra

1.2 Rechnen mit Matrizen

1.2.1 Richtig oder Falsch? (Rätsel)

Markieren Sie, ob die Aussage richtig oder falsch ist. Die markierten Buchstaben ergeben das Lösungswort. Korrigieren Sie die falschen Aussagen.

	richtig	falsch	korrigierte Aussage
Ein Skalar ist eine reelle Zahl.	S	T	
$s \cdot A = A \cdot s$	U	E	
$A \pm B = C$: Format der Matrizen A und B stimmt nicht überein.	S	H	
Die s -Multiplikation wird elementweise durchgeführt.	R	I	
Ein Vektor ist eine Matrix mit nur einer Zeile oder nur einer Spalte.	G	M	
$\vec{a}^T$ steht für einen Spaltenvektor.	A	U	
Zwei Matrizen werden gemäß folgender Regel multipliziert: „Spalte mal Zeile“.	B	T	
Bei der Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix muss die Anzahl der Elemente in der Zeile des ersten Faktors mit der Anzahl der Elemente in der Spalte des zweiten Faktors übereinstimmen.	P	N	
Es gilt immer: $A \cdot B = B \cdot A$	O	E	
$A \cdot B = C \Rightarrow A = B^{-1} \cdot C$	I	R	
In einer Einheitsmatrix stehen in der Hauptdiagonalen Nullen, ansonsten nur Einsen.	S	F	
$A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$	E	A	
$\vec{a} \cdot A$ ist möglich	R	K	
$\vec{a}^T \cdot \vec{b} = \text{reelle Zahl}$	T	Z	

Lösungswort: _ _ _ _ _ ! _ _ _ _ _ !



1.2.2 Paare finden (Rätsel)

Schneiden Sie die einzelnen Teile mit den Matrizen C an der gestrichelten Linie aus. Ordnen Sie jeweils die Matrix C den passenden Matrizen A und B zu, indem sie $A + B = C$ berechnen. Kleben Sie die passende Lösung rechts neben die Matrizen A und B . In der richtigen Reihenfolge ergibt sich das Lösungswort.

$A = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ R		$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ C	
$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ N		$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ N	
$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ I		$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ M	
$A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ T		$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ I	
$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ E			$C = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ N
$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ H	$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ A	$C = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$ T	$C = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ M
$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ Z	$C = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ R	$C = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ E	$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ E

1.2.3 Handlungssituation bearbeiten

Während der Adventszeit findet im Kindergarten *Wichtel* ein Weihnachtsbasar statt, auf dem auch Kekse verkauft werden. Mit dem Erlös des Weihnachtsbasars soll ein neues Klettergerüst für 750 EUR angeschafft werden. Die Kekse werden von der Zwergengruppe und der Wichtelgruppe gebacken. Es werden Schoko-, Zimt- und Vanillekekse hergestellt, die zum Teil verziert oder glasiert werden.

Zwergengruppe			
	Schoko	Zimt	Vanille
normal	10	15	20
verziert	15	0	25
glasiert	15	10	25



Wichtelgruppe			
	Schoko	Zimt	Vanille
normal	35	25	0
verziert	10	10	15
glasiert	20	10	5



Berechnen Sie, wie viele Kekse von welcher Sorte hergestellt wurden.

Jedes Kind darf einen Keks probieren. In der Zwergen- und in der Wichtelgruppe wurden die gleichen Kekse gegessen. Folgende Kekse haben die Kinder in der Zwergengruppe gegessen.

	Schoko	Zimt	Vanille
normal	2	2	2
verziert	1	1	2
glasiert	2	2	1

Berechnen Sie, wie viele Kekse von welcher Sorte auf dem Weihnachtsbasar verkauft werden können.

Ermitteln Sie die Gesamtanzahl der Kekse für den Verkauf.

Die Kekse werden für folgende Preise auf dem Weihnachtsbasar angeboten.

	Preis/Keks in EUR
normal	0,25
verziert	0,50
glasiert	0,50

Ermitteln Sie den Erlös, der entsteht, wenn alle Kekse auf dem Weihnachtsbasar verkauft werden.

Berechnen Sie, wie viel Geld die anderen Verkaufsstände einnehmen müssen, damit das neue Klettergerüst gekauft werden kann.

Lösungen**Berechnung der Anzahl der gebackenen Kekse:**

$Z \triangleq$ Zwergengruppe, $W \triangleq$ Wichtelgruppe und $K \triangleq$ Gesamtanzahl gebackener Kekse

Berechnung der Anzahl der Kekse für den Verkauf auf dem Weihnachtsbasar:

$G_Z \triangleq$ Anzahl gegessener Kekse in der Zwergengruppe

$G_G \triangleq$ Anzahl gegessener Kekse in beiden Gruppen

$\ddot{U} \triangleq$ Anzahl der übrigen Kekse für den Weihnachtsbasar

Antwort: _____

Erlös berechnen:

Fehlende Einnahmen berechnen:

Antwort: _____

1.2.4 Rechnen ohne CAS

Ermitteln Sie die Lösungen und benennen Sie die durchgeführte Berechnung mithilfe des Fachvokabulars.

a) $(1 \ 2 \ 4) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$

c) $(5 \ 7 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} =$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} =$

Rechnungen:

1.3 Mehrstufige Produktionsprozesse

1.3.1 Richtig oder Falsch? (Rätsel)

Markieren Sie, ob die Aussage richtig oder falsch ist. Die markierten Buchstaben ergeben das Lösungswort. Definieren Sie den Begriff und geben Sie die Formel zur Berechnung an.

	richtig	falsch
Berechnungen und Darstellungen der mehrstufigen Produktionsprozesse dienen dazu, die Betriebsabläufe in einem Produktionsprozess reibungslos zu gestalten.	V	K
Es gibt zwei Produktionsmatrizen: A_{RZ} und B_{ZE} .	A	E
A_{RZ} ist eine Matrix, die zeigt, in welcher Menge welcher Rohstoff in welches Zwischenprodukt einfließt.	R	T
Die Elemente a_{mn} geben an, wie viele Mengeneinheiten des Rohstoffes m benötigt werden, um eine ME des jeweiligen Endproduktes n herzustellen.	O	I
B_{ZE} ist eine Matrix, die angibt, in welcher Menge welches Zwischenprodukt in welches Endprodukt einfließt.	A	E
Die Elemente b_{nu} geben an, wie viele Mengeneinheiten des Endproduktes u benötigt werden, um eine ME des Zwischenproduktes n zu produzieren.	M	B
Mithilfe der Formel $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$ kann die Bedarfsmatrix C_{RE} errechnet werden. C_{RE} gibt an, in welcher Menge welcher Rohstoff in welches Endprodukt einfließt.	L	Ö
Die Elemente c_{mu} geben an, wie viele Mengeneinheiten des Rohstoffes m benötigt werden, um eine ME des jeweiligen Endproduktes u zu produzieren.	E	A
Es gilt: $A_{RZ} = C_{RE} \cdot B_{ZE}^{-1}$ und $B_{ZE} = C_{RE} \cdot A_{RZ}^{-1}$.	W	S
Für die Produktionsmatrizen und die Bedarfsmatrix dürfen keine anderen Bezeichnungen verwendet werden außer A_{RZ} , B_{ZE} und C_{RE} .	C	T
Die Matrizen A_{RZ} und B_{ZE} fließen in das Verflechtungsdiagramm ein.	Ü	H
Der Vektor $\vec{m}$ gibt den Rohstoffeinsatz für die gesamte Herstellung der Endprodukte an.	K	C
Der gesamte Rohstoffeinsatz berechnet sich durch die Multiplikation der Bedarfsmatrix mit den Endproduktmengen.	K	S
Die Produktionskosten werden ermittelt, um Verkaufspreise festzulegen. Dabei ist der Preis immer doppelt so hoch wie die Kosten.	E	K
Die Produktionskosten setzen sich aus den Rohstoffkosten $\vec{k}_R$, den Fertigungskosten der ersten und der zweiten Produktionsstufe $\vec{k}_Z$ bzw. $\vec{k}_E$ zusammen.	O	U
Die variablen Gesamtkosten errechnen sich durch folgende Formel: $K_v = \vec{k}_v^T \cdot \vec{m}$. Die Gesamtkosten werden mithilfe folgender Formel berechnet: $K = K_v + K_f$.	S	T
Die Erlöse ergeben sich aus der Multiplikation des Vektors für die Verkaufspreise mit dem Vektor für die einzelnen Endproduktmengen.	T	P
Der Vektor $\vec{p}$ verdeutlicht die Verkaufspreise für die Endprodukte in Geldeinheiten pro Mengeneinheit.	E	O
Der Gewinn wird mit $G = K - E$ berechnet.	E	N

Lösungswort: _____

Definition: _____

Formel zur Berechnung: _____

1.3.2 Handlungssituation bearbeiten

Das Unternehmen *ILSÜM* hat zwei neue Müsli-Sorten auf den Markt gebracht. Die beiden Müsliarten werden in einem zweistufigen Produktionsprozess aus fünf verschiedenen Rohstoffen hergestellt, die auf der zweiten Produktionsstufe zu drei Zwischenprodukten verarbeitet werden. Die für die Produktion benötigten Mengeneinheiten (ME) gehen aus den nachfolgenden Tabellen hervor:



Zwischenprodukte Rohstoffe	Basis	Fitness-Aroma	Genießer-Aroma
Getreide	12	0	0
Crunchy	8	0	0
Früchte	0	7	2
Nüsse	2	4	3
Schokolade	0	0	6

Endprodukte Rohstoffe	Fitness-Müsli	Genießer-Müsli
Getreide	108	120
Crunchy	72	80
Früchte	42	14
Nüsse	42	41
Schokolade	0	42

Folgende Kosten in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME) sind für die Produktion bekannt:

Rohstoffe	Preis in GE/ME	Zwischenprodukte	Preis in GE/ME	Endprodukte	Preis in GE/ME
Getreide	3	Basis	3,50	Fitness-Müsli	19
Crunchy	5	Fitness-Aroma	5,50	Genießer-Müsli	20
Früchte	6	Genießer-Aroma	7,00		
Nüsse	8				
Schokolade	8				

Die nachfolgende Tabelle verdeutlicht die festgelegten Verkaufspreise und die Bestellung eines Großhandels. Die Fixkosten belaufen sich auf 28.907,50 GE.

Endprodukte	Verkaufspreis in GE/ME	Menge in ME
Fitness-Müsli	2.500	55
Genießer-Müsli	1.300	45

Es muss analysiert werden, ob die festgelegten Preise so kalkuliert wurden, dass Gewinn erzielt werden kann. Dafür müssen nachfolgende Analysen und Berechnungen durchgeführt werden:

Ermitteln Sie die Mengen der drei Zwischenprodukte, die für die zwei Endprodukte benötigt werden.

Erklären Sie die Bedeutung der dritten Zeile der Matrix A_{RZ} .

Stellen Sie diesen Produktionsprozess mithilfe eines Verflechtungsdiagrammes dar.

Berechnen Sie die variablen Stückkosten für den Produktionsprozess.

Untersuchen Sie, ob durch diese Bestellung Gewinn erzielt wird und ob somit die Preisfestlegung sinnvoll ist.

2 Lineare Algebra

2.2 Rechnen mit Matrizen

2.2.1 Richtig oder Falsch?

	richtig	falsch	korrigierte Aussage
Ein Skalar ist eine reelle Zahl.	S	T	
$s \cdot A = A \cdot s$	U	E	Es gilt nur $s \cdot A$
$A \pm B = C$: Format der Matrizen A und B stimmt nicht überein.	S	H	Voraussetzung: Format der Matrizen A und B stimmt nicht überein.
Die s-Multiplikation wird elementweise durchgeführt.	R	I	
Ein Vektor ist eine Matrix mit nur einer Zeile oder nur einer Spalte.	G	M	
$\vec{a}^T$ steht für einen Spaltenvektor.	A	U	Zeilenvektor
Zwei Matrizen werden gemäß folgender Regel multipliziert: „Spalte mal Zeile“.	B	T	Zeile mal Spalte
Bei der Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix muss die Anzahl der Elemente in der Zeile des ersten Faktors mit der Anzahl der Elemente in der Spalte des zweiten Faktors übereinstimmen.	P	N	
Es gilt immer: $A \cdot B = B \cdot A$	O	E	Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ.
$A \cdot B = C \Rightarrow A = B^{-1} \cdot C$	I	R	$A \cdot B = C \Rightarrow A = C \cdot B^{-1}$
In einer Einheitsmatrix stehen in der Hauptdiagonalen Nullen, ansonsten nur Einsen.	S	F	In einer Einheitsmatrix stehen in der Hauptdiagonalen Einsen, ansonsten nur Nullen.
$A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$	E	A	
$\vec{a} \cdot A$ ist möglich	R	K	$\vec{a}^T \cdot A$ ist möglich
$\vec{a}^T \cdot \vec{b} =$ reelle Zahl	T	Z	

Lösungswort: Sehr gut! Perfekt!

2.2.2 Paare finden (Rätsel)

$A = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$	R	$C = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	E
$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$	C	$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$	H
$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	N	$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$	E
$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$	N	$C = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$	M
$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$	I	$C = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$	T
$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$	M	$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$	A
$A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$	T	$C = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$	R
$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$	I	$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$	Z
$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$	E	$C = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	N
Lösung: Rechnen mit Matrizen			

2.2.3 Lernsituation bearbeiten

Berechnung der Anzahl der gebackenen Kekse:

$Z \triangleq$ Zwergengruppe, $W \triangleq$ Wichtelgruppe und $K \triangleq$ Gesamtanzahl gebackener Kekse

$$Z = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 \\ 15 & 0 & 25 \\ 15 & 10 & 25 \end{pmatrix} \text{ und } W = \begin{pmatrix} 35 & 25 & 0 \\ 10 & 10 & 15 \\ 20 & 10 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow K = Z + W = \begin{pmatrix} 45 & 40 & 20 \\ 25 & 10 & 40 \\ 35 & 20 & 30 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Anzahl der Kekse für den Verkauf auf dem Weihnachtsbasar:

$G_z \triangleq$ Anzahl gegessener Kekse in der Zwergengruppe

$G_w \triangleq$ Anzahl gegessener Kekse in beiden Gruppen

$\hat{U} \triangleq$ Anzahl der übrigen Kekse für den Weihnachtsbasar

$$G_z = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{U} = K - G_w = \begin{pmatrix} 45 & 40 & 20 \\ 25 & 10 & 40 \\ 35 & 20 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 36 & 16 \\ 23 & 8 & 36 \\ 31 & 16 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 41 & 36 & 16 \\ 23 & 8 & 36 \\ 31 & 16 & 28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 93 \\ 67 \\ 75 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{normal} \\ \text{verziert} \\ \text{glasiert} \end{matrix}$$

$$\hat{U} = 93 + 67 + 75 = 235$$

Antwort: Insgesamt können die Zwergen- und die Wichtelgruppe 235 Kekse zum Verkauf auf dem Weihnachtsbasar anbieten.

Erlös berechnen:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,50 \\ 0,50 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = \hat{U} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 41 & 36 & 16 \\ 23 & 8 & 36 \\ 31 & 16 & 28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,50 \\ 0,50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36,25 \\ 27,75 \\ 29,75 \end{pmatrix}$$

Fehlende Einnahmen berechnen:

$$750 \text{ EUR} - \underbrace{(36,25 + 27,75 + 29,75)}_{93,75} \text{ EUR} = 656,25 \text{ EUR}$$

Antwort: Die Zwergen- und die Wichtelgruppe haben durch den Verkauf ihrer Kekse 93,75 EUR zum Klettergerüst beigeleitet. 656,25 EUR müssen durch die anderen Verkaufsstände auf dem Weihnachtsbasar eingenommen werden.

2.2.4 Rechnen ohne CAS

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 14 & 28 \end{pmatrix}$ „Zeilenvektor mal Matrix = Zeilenvektor“

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$ „Matrix mal Matrix = Matrix“

c) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 28$ „Zeilenvektor mal Spaltenvektor = reelle Zahl“

d) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 12 \end{pmatrix}$ „Matrix mal Spaltenvektor = Spaltenvektor“

e) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{5}{18} & -\frac{1}{18} \end{pmatrix}$ „Inverse Matrix“

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & -\frac{1}{6} \\ 0,5 & -0,25 & \frac{1}{6} \\ -0,5 & 0,25 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ „Inverse Matrix“

2.3 Mehrstufige Produktionsprozesse

2.3.1 Richtig oder Falsch? (Rätsel)

	richtig	falsch
Berechnungen und Darstellungen der mehrstufigen Produktionsprozesse dienen dazu, die Betriebsabläufe in einem Produktionsprozess reibungslos zu gestalten.	V	K
Es gibt zwei Produktionsmatrizen: A_{RZ} und B_{ZE} .	A	E
A_{RZ} ist eine Matrix, die zeigt, in welcher Menge welcher Rohstoff in welches Zwischenprodukt einfließt.	R	T
Die Elemente a_{rn} geben an, wie viele Mengeneinheiten des Rohstoffes m benötigt werden, um eine ME des jeweiligen Endproduktes n herzustellen.	O	I
B_{ZE} ist eine Matrix, die angibt, in welcher Menge welches Zwischenprodukt in welches Endprodukt einfließt.	A	E
Die Elemente b_{zu} geben an, wie viele Mengeneinheiten des Endproduktes u benötigt werden, um eine ME des Zwischenproduktes n zu produzieren.	M	B
Mithilfe der Formel $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$ kann die Bedarfsmatrix C_{RE} errechnet werden. C_{RE} gibt an, in welcher Menge welcher Rohstoff in welches Endprodukt einfließt.	L	Ö
Die Elemente c_{mu} geben an, wie viele Mengeneinheiten des Rohstoffes m benötigt werden, um eine ME des jeweiligen Endproduktes u zu produzieren.	E	A
Es gilt: $A_{RZ} = C_{RE} \cdot B_{ZE}^{-1}$ und $B_{ZE} = C_{RE} \cdot A_{RZ}^{-1}$.	W	S
Für die Produktionsmatrizen und die Bedarfsmatrix dürfen keine anderen Bezeichnungen verwendet werden außer A_{RZ} , B_{ZE} und C_{RE} .	C	T
Die Matrizen A_{RZ} und B_{ZE} fließen in das Verflechtungsdiagramm ein.	Ü	H
Der Vektor $\vec{m}$ gibt den Rohstoffeinsatz für die gesamte Herstellung der Endprodukte an.	K	C
Der gesamte Rohstoffeinsatz berechnet sich durch die Multiplikation der Bedarfsmatrix mit den Endproduktmengen.	K	S
Die Produktionskosten werden ermittelt, um Verkaufspreise festzulegen. Dabei ist der Preis immer doppelt so hoch wie die Kosten.	E	K
Die Produktionskosten setzen sich aus den Rohstoffkosten k_r , den Fertigungskosten der ersten und der zweiten Produktionsstufe k_z bzw. k_e zusammen.	O	U
Die variablen Gesamtkosten errechnen sich durch folgende Formel: $K_v = k_v \cdot \vec{m}$. Die Gesamtkosten werden mithilfe folgender Formel berechnet: $K = K_v + K_f$.	S	T
Die Erlöse ergeben sich aus der Multiplikation des Vektors für die Verkaufspreise mit dem Vektor für die einzelnen Endproduktmengen.	T	P
Der Vektor $\vec{p}$ verdeutlicht die Verkaufspreise für die Endprodukte in Geldeinheiten pro Mengeneinheit.	E	O
Der Gewinn wird mit $G = K - E$ berechnet.	E	N

Lösungswort: variable Stückkosten

Definition: Herstellungskosten, die von der Produktionszahl abhängig sind

Formel zur Berechnung: $k_v = k_r \cdot C_{RE}^{-1} \cdot C_{RE} + k_z \cdot B_{ZE}^{-1} \cdot B_{ZE} + k_e$

2.3.2 Lernsituation bearbeiten

Matrizen auf Basis der Datentabellen aufstellen:

$$A_{RZ} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 108 & 120 \\ 72 & 80 \\ 42 & 14 \\ 42 & 41 \\ 0 & 42 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C_{RE} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

B_{ZE} berechnen:

$$A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$$

$$\text{Das Format der Matrix } B \text{ ist } (3 \times 2) \Rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

LGS aufstellen:

$$\begin{aligned} 12b_{11} &= 108 \Rightarrow b_{11} = 9 \quad \text{und} \quad 12b_{12} = 120 \Rightarrow b_{12} = 10 \\ 8b_{11} &= 72 \Rightarrow b_{11} = 9 \quad \text{und} \quad 8b_{12} = 80 \Rightarrow b_{12} = 10 \\ 6b_{31} &= 0 \Rightarrow b_{31} = 0 \quad \text{und} \quad 6b_{32} = 42 \Rightarrow b_{32} = 7 \\ 7b_{21} + 2b_{31} &= 42 \Rightarrow 7b_{21} + 0 = 42 \Rightarrow b_{21} = 6 \quad \text{und} \quad 2b_{21} + 4b_{22} + 3b_{31} = 42 \Rightarrow 18 + 4b_{22} + 0 = 42 \Rightarrow b_{22} = 6 \quad \text{und} \\ 7b_{21} + 2b_{32} &= 14 \Rightarrow 7b_{21} + 14 = 14 \Rightarrow b_{21} = 0 \quad \text{und} \quad 2b_{22} + 4b_{22} + 3b_{32} = 41 \Rightarrow 20 + 4b_{22} + 21 = 41 \Rightarrow b_{22} = 0 \end{aligned}$$

$$B_{ZE} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Tabellarische Darstellung:

Endprodukte	Fitness-Müsli	Genießer-Müsli
Zwischenprodukte		
Basis	9	10
Fitness-Aroma	6	0
Genießer-Aroma	0	7

Erklärung der dritten Zeile der Matrix A_{RZ} :

Der Rohstoff Früchte fließt gar nicht in das Zwischenprodukt Basis ein, mit 7 ME in das Fitness-Aroma und mit 2 ME in das Genießer-Aroma.