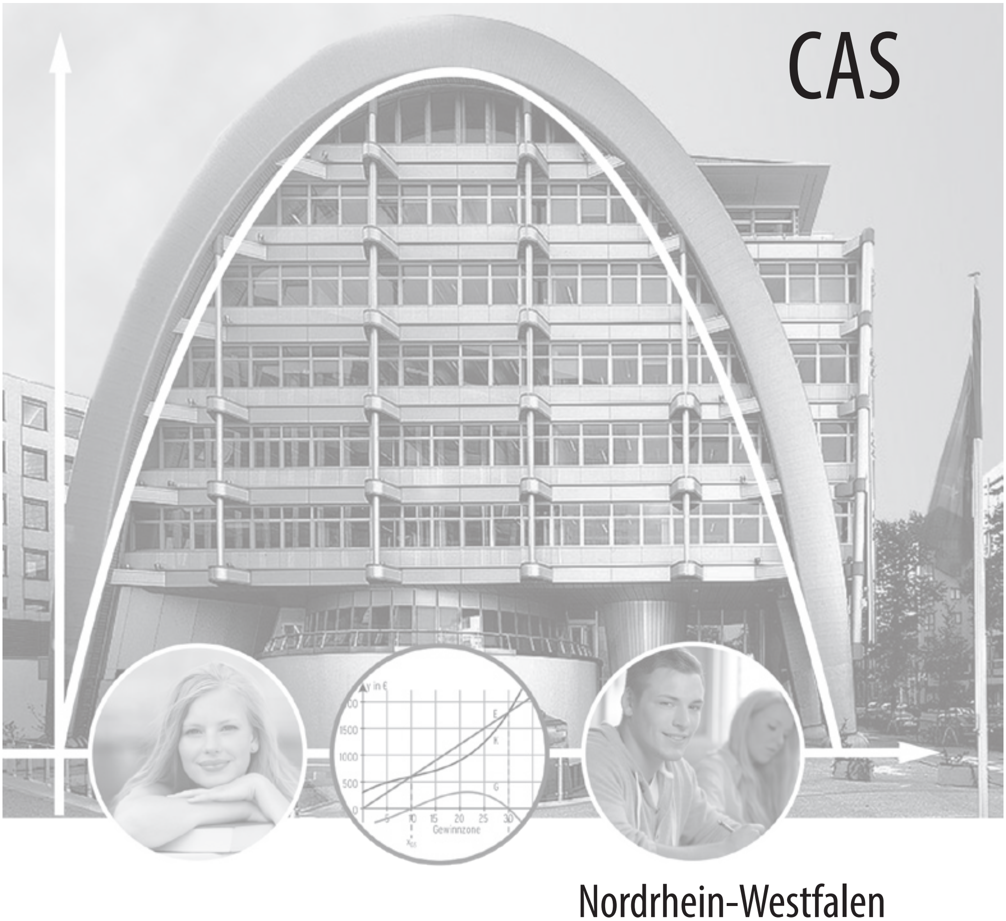
Ott
Lengersdorf

Abitur 2026 | *Grundkurs*

Aufgabensammlung zur zentralen Abiturprüfung
Mathematik am Berufskolleg – Berufliches Gymnasium –
Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung



Nordrhein-Westfalen

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Norbert Lengersdorf
Oberstudienrat am Berufskolleg für Wirtschaft und Verwaltung in Herzogenrath

Umschlag: Kreis links: www. adpic.de
Kreis rechts: Robert Kneschke – Fotolia.com

* * * * *

17. Auflage 2025

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0478-17
ISBN 978-3-8120-1184-6

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung enthält auf die neue Prüfungsordnung für das Berufskolleg mit gymnasialer Oberstufe in Nordrhein-Westfalen abgestimmte Aufgaben zur Vorbereitung auf das Abitur 2026 an beruflichen Gymnasien im Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung. **Alle Aufgaben sind entspechend den Abiturvorgaben 2026 ausgewählt worden.**
Die zentrale Abiturprüfung 2026 besteht aus zwei Teilen, einem hilfsmittelfreien Prüfungsteil A und einem Prüfungsteil B mit Hilfsmittel **(erstmalig nur MMS (CAS)).**
Die Aufgaben für den **Grundkurs** sind gegliedert nach den Prüfungsgebieten:
Analysis mit Anwendungen, Stochastik und Lineare Algebra/Analytische Geometrie.

Im Analysis-Teil werden als thematischer Schwerpunkt die ganzrationalen Funktionen und die Exponentialfunktionen und die Modellierung von berufsbezogenen Anwendungen mit Hilfe dieser Funktionstypen verlangt. Dabei handelt es sich um das Modell der vollständigen Konkurrenz sowie die Absatz-/Umsatzentwicklung.
Die Stochastik behandelt fokussiert die bedingte Wahrscheinlichkeit, die Binomialverteilung mit Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung und den einseitigen Hypothesentest.
Die Lineare Algebra/Analytische Geometrie hat die Schwerpunkte Lineare Gleichungssysteme, Lineare Optimierungsprobleme sowie mehrstufige Produktionsprozesse als ökonomische Anwendung.

Die Einteilung nach Prüfungsgebieten ermöglicht ein gezieltes Üben.
Die Aufgaben sind als Übungsaufgaben zu verstehen, sowohl im Umfang als auch in den Fragestellungen. Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.
Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.

Da die Aufgabensammlung allen Schüler/innen bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben.
An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.
Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung 2026

Grundkurs

Aufgabenteil A Bearbeitung ohne Hilfsmittel				**Aufgabenteil B Bearbeitung mit Hilfsmittel**	
Pflichtaufgaben		Wahlaufgaben (zwei aus vier, davon eine Analysis)		Pflichtaufgaben	
Analysis	5	Analysis	5	Analysis	25
Stochastik	5	Analysis	5	Stochastik	25
Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	5	Stochastik	5	Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	25
		Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	5		
Summe	15	Summe	10	Summe	75
Gesamtsumme: 100 BE + 5 BE (Darstellungsleistung) = **105 BE**					

Mindestens zwei der Teilaufgaben im Aufgabenteil A haben **Anwendungsbezug.**

Die Aufgaben sowohl im Teil A als auch im Teil B bestehen jeweils aus Teilaufgaben.

Organisation

Zu Beginn der Bearbeitungszeit erhält der Prüfling die beiden zu bearbeitenden Aufgabenteile A und B. Die zugelassenen Hilfsmittel (CAS, Formelsammlung) werden noch nicht ausgegeben.

Der Prüfling gibt individuell nach Bearbeitung den Aufgabenteil A und seine Ausarbeitungen zum Aufgabenteil A ab und erhält im Gegenzug Zugang zu den zugelassenen Hilfsmitteln.

SchülerIn bearbeitet alle Aufgaben.

Die Gesamtbearbeitungszeit für beide Prüfungsteile beträgt im Grundkurs einschließlich Auswahlzeit 255 Minuten.

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist in beiden Prüfungsteilen der Klausur zugelassen.

I Hilfsmittelfreier Teil A der Zentralen Abiturprüfung GK

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis

Lösungen Seite 14

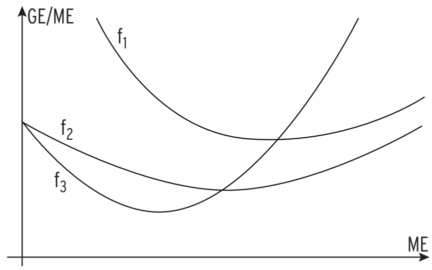
Aufgabe 1 **Punkte**

Zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a, c, d > 0$, $b < 0$,

x in ME, K(x) in GE,

sind in der nebenstehenden Abbildung die Graphen der Grenzkostenfunktion, der Stückkostenfunktion und der variablen Stückkostenfunktion dargestellt.

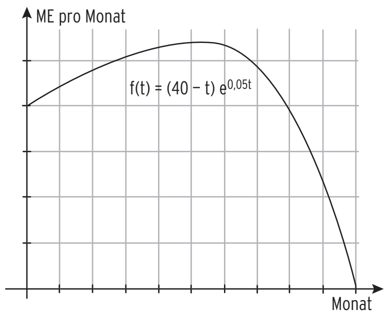


1.1 Ordnen Sie dem jeweiligen Graphen die entsprechende ökonomische Funktion begründet zu. 2

1.2 Beweisen Sie, dass die betriebsminimale Ausbringungsmenge bei $x = -\frac{b}{2a}$ liegt. 3

Aufgabe 2

Die monatlichen Absatzzahlen eines Produkts werden mit $f(t) = (40 - t)e^{0,05t}$, (t in Monaten, f(t) in ME/Monat) modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



2.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, bis zu dem das Produkt auf dem Markt abgesetzt werden kann. 2

2.2 Zeigen Sie, dass der Zeitpunkt des maximalen monatlichen Absatzes bei t = 20 liegt. 3

($f''(t) = -\frac{1}{400}\,t\,e^{0,05t}$ kann verwendet werden.)

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis

Lösung Seite 14/15

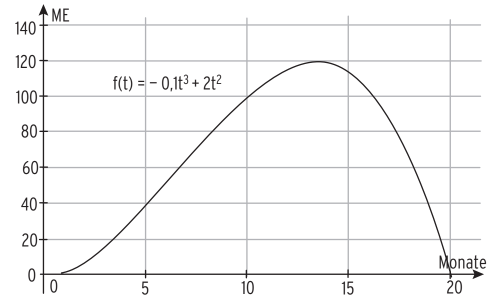
Aufgabe 3

Punkte

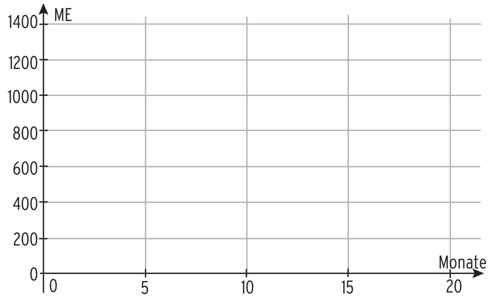
Die monatlichen Absatzzahlen eines neuartigen Produkts werden mit

$f(t) = -\frac{1}{10}t^3 + 2t^2$

(t in Monaten, $f(t)$ in ME/Monat) modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



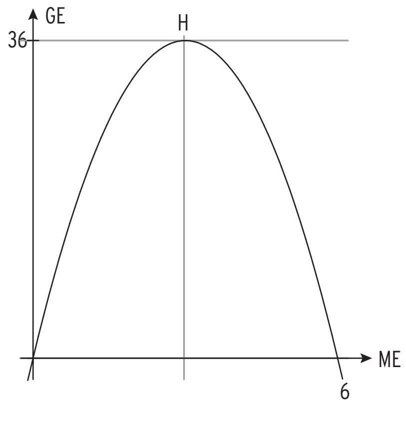
3.1 Bestimmen Sie die in den ersten 20 Monaten insgesamt abgesetzte Menge. 3



3.2 Skizzieren Sie in das nebenstehende Koordinatensystem den Graphen der Funktion, die den Gesamtabsatz in Abhängigkeit von der Zeit angibt. 2

Aufgabe 4

Lösung Seite 15



a) Bestimmen Sie den Funktionsterm für die Erlösfunktion unter der Voraussetzung, dass es sich um eine ganzrationale Funktion 2. Grades handelt. 3

b) Ergänzen Sie den Graphen der 1. Ableitung in das Koordinatensystem. Beschreiben Sie den Verlauf des Ableitungsgraphen mathematisch und ökonomisch. 2

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis

Lösungen Seite 15

Aufgabe 5

Punkte

Die folgende Tabelle gibt die Stückkosten k, die variablen Stückkosten k_v und die Grenzkosten K′ zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K an (x in ME; K(x) in GE):

x	1	2	3	4	5	6	7	8
k(x)	201,0	124,0	97,0	84,0	77,8	76,0	77,6	82,0
$k_v(x)$	57,0	52,0	49,0	48,0	49,0	52,0	57,0	64,0
K′(x)	51,0	44,0	43,0	48,0	59,0	76,0	99,0	128,0

Beurteilen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussagen allein unter Zuhilfenahme der Tabellenwerte:

1.1 Das Betriebsminimum liegt bei 4 ME. 2

1.2 Die Kosten steigen zwischen 0 und 4 ME degressiv. 1

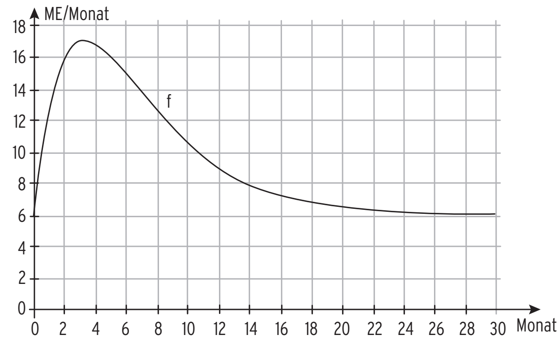
1.3 Die Fixkosten belaufen sich auf 144 GE. 2

Aufgabe 6

Die Absatzentwicklung eines Produktes wird durch die folgende Funktion beschrieben:

$f(t) = 9t \cdot e^{-0,3t} + 6$

dabei steht $t > 0$ für die Monate und f(t) für den Absatz in ME pro Monat.



1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die monatlichen Absatzzahlen maximal werden (notwendiges Kriterium genügt). 3

2 Nehmen Sie mit Hilfe des Graphen Stellung zu der folgenden Aussage:
In der zweiten Hälfte des ersten Jahres liegt der Zeitpunkt des maximalen Absatzrückganges. 2

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis **Lösungen Seite 16**

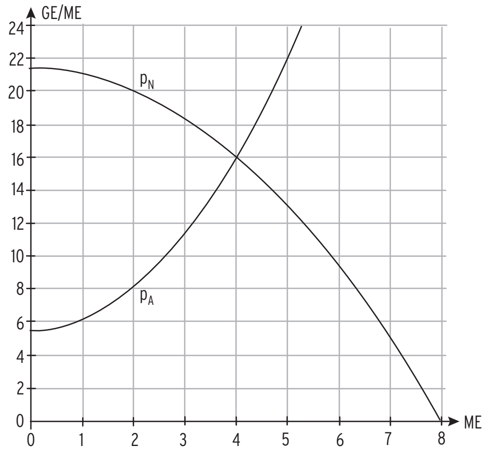
Aufgabe 7 **Punkte**

Gegeben sind folgende Angebotsfunktion p_A und Nachfragefunktion p_N:

$p_A(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{3}$

$p_N(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{64}{3}$

x in ME, p(x) in GE/ME



1 Berechnen Sie das Marktgleichgewicht. 3

2 Begründen Sie anhand der Graphen, dass die Konsumentenrente geringer ist als die Produzentenrente. 2

Aufgabe 8

Die Entwicklung der Gesamtkosten der Produktion von Fahrrädern kann durch die Funktion K mit $K(x) = 0{,}5x^3 - 8x^2 + 45x + 70$ mit $D_K = [0; 13]$ beschrieben werden.
Berechnen Sie das Minimum der variablen Stückkosten und interpretieren Sie ihr Ergebnis.

Aufgabe 9 **Lösungen Seite 17**

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$.

Aufgabe 10

Ein Behälter enthält zu Beobachtungsbeginn zwei Liter einer Flüssigkeit. Für die anschließenden fünf Stunden gibt die Funktion f mit $f(t) = -t \cdot (t - 4)$ die momentane Zuflussrate der Flüssigkeit in Liter pro Stunde an.
Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden.

a) Begründen Sie, dass das Volumen der Flüssigkeit im Behälter innerhalb der ersten vier Stunden nach Beobachtungsbeginn durchgehend zunimmt. 3

b) Geben Sie eine Gleichung an, mit der berechnet werden kann, wie viele Stunden vom Beobachtungsbeginn an vergehen, bis der Behälter sieben Liter der Flüssigkeit enthält. 2

Hilfsmittelfreier Teil A - Analysis **Lösungen Seite 17**

Aufgabe 11 **Punkte**

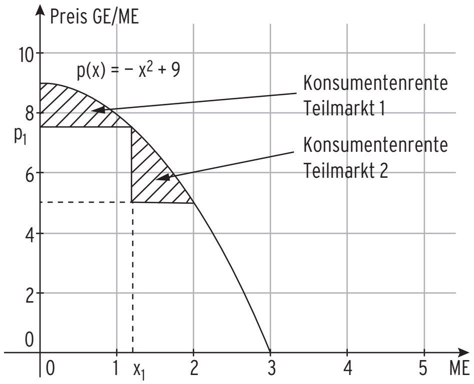
Die Preisentwicklung eines Produkts entspricht der Nachfragefunktion p mit

$p(x) = -x^2 + 9$

x in ME, p(x) in GE/ME.

Das Produkt wird auf dem Teilmarkt 1 für p_1 GE/ME und auf dem Teilmarkt 2 für 5 GE/ME verkauft.

Es werden insgesamt 2 ME abgesetzt (vgl. nebenstehende Abbildung).



1 Beschreiben Sie den Einfluss der Höhe des Preises auf die Konsumentenrente des jeweiligen Teilmarkts. 2

2 Weisen Sie nach, dass die gesamte Konsumentenrente optimal abgeschöpft wird, wenn $x_1 = \sqrt{\frac{4}{3}}$ (ME) ist. 3

Aufgabe 12 **Lösungen Seite 18**

Für die Angebotsfunktion eines Massengutes gilt die Vorschrift der Form: $p_A(x) = ax^2 + b$.
Für die Angebotsfunktion gelten folgende Bedingungen:
Beträgt der Marktpreis des Gutes 10 GE, so wird das Gut nicht mehr angeboten.
Das Marktgleichgewicht wird bei einer Absatzmenge von 60 ME und einem Marktpreis von 64 GE/ME erreicht. Berechnen Sie die Werte für a und b.
Berechnen Sie die Produzentenrente. 5

Aufgabe 13

Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{-1}^{1} (\sqrt{2} \cdot x)^2 \, dx$. 3

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis Lösungen Seite 18

Aufgabe 14 **Punkte**

Gegeben sind die zwei Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 9x + 18$ $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 9x + 18$

In Abbildung 1 sind die Graphen der Ableitungen von f und g im

Bereich [0; 10] dargestellt.

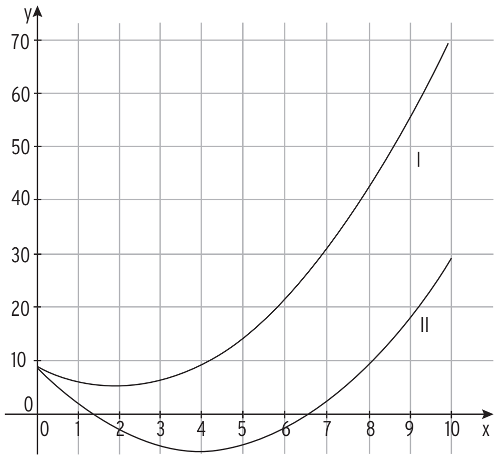


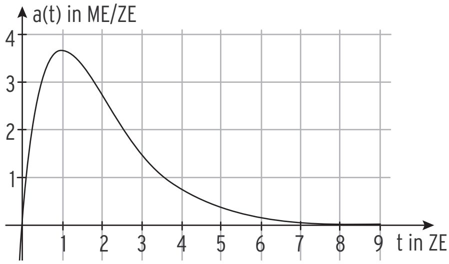
Abbildung 1

a) Entscheiden Sie Sie begründet, welcher Graph die Ableitung von f und welcher Graph die Ableitung von g darstellt. 3

b) Prüfen Sie, welcher der beiden Graphen nicht zu der Grenzkostenfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion gehören kann. 2

Aufgabe 15

Die PRINTFIX AG fertigt innovative und hochwertige 3D-Drucker. Der momentane Absatz in Mengeneinheiten pro Zeiteinheit (ME/ZE) kann durch den Graphen a des Produktlebenszyklus $a(t) = 10t \cdot e^{-t}$ mit $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ beschrieben werden.



a) Bestimmen Sie ausschließlich mit Hilfe der notwendigen Bedingung den Zeitpunkt, an dem die PRINTFIX AG die meisten 3D-Drucker pro ZE absetzt. 3

b) In t = 2 liegt eine Wendestelle vor. Interpretieren Sie diese ökonomisch. 2

Lösungen – Hilfsmittelfreier Teil A der Zentralen Abiturprüfung

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis Lösungen

Aufgabe 1 **Aufgaben Seite 8**

1.1 Der Graph der Grenzkostenfunktion schneidet den Graphen der variablen Stückkostenfunktion im Betriebsminimum, den der Stückkostenfunktion im Betriebsoptimum. Also gehört f_3 zur Grenzkostenfunktion. Die kurzfristige Preisuntergrenze ist geringer als die langfristige Preisuntergrenze, so dass f_2 der variablen Stückkostenfunktion und f_1 der Stückkostenfunktion zugeordnet werden kann.

1.2 Minimum der variablen Stückkosten:

$k_v(x) = a\,x^2 + bx + c$; $k_v'(x) = 2ax + b$

Notwendig und hinreichend bei ertragsgesetzlicher Kostenfunktion:

$k_v'(x) = 0$ $\quad 2ax + b = 0$

$x = -\frac{b}{2a}$

$x = -\frac{b}{2a}$ ist Minimalstelle, da $k_v''(x) = 2a > 0$

Aufgabe 2

2.1 Nullstellenbetrachtung

$f(t) = 0$ $\quad (40 - t)e^{0,05t} = 0$

da $e^{0,05t} \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ $\quad t = 40$

Nach 40 Monaten verschwindet das Produkt vom Markt.

2.2 Extremwertbetrachtung: Notwendige Bedingung $f'(t) = 0$:

$f'(t) = 0,05(40 - t)e^{0,05t} - e^{0,05t} = e^{0,05t}\,(0,05(40 - t) - 1)$

(Produkt- und Kettenregel)

$f'(20) = 0$ $\quad 0,05(40 - 20) - 1 = 0$ wahr

Dazu hinreichend für Maximum: $f''(20) = -\frac{1}{400} \cdot 20 \cdot e^1 = -\frac{e}{20} < 0$

Aufgabe 3 **Aufgaben Seite 9**

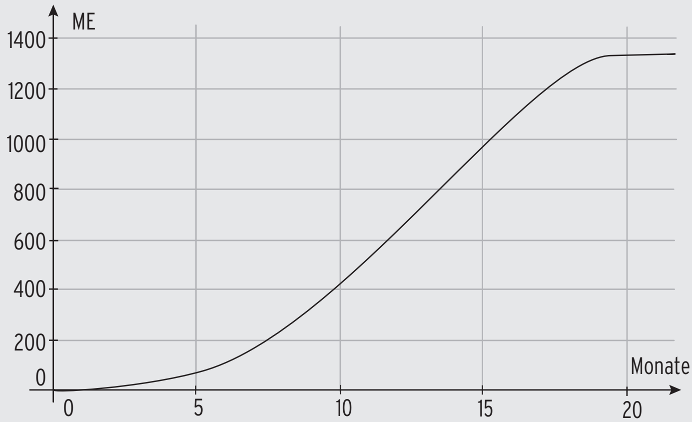
3.1 Die gesamte Absatzmenge der ersten 20 Monate wird mit dem Integral berechnet.

$$\int_0^{20} f(t)dt = \int_0^{20} \left(-\frac{1}{10}t^3 + 2t^2\right)dt = \left[-\frac{1}{40}t^4 + \frac{2}{3}t^3\right]_0^{20} = -4000 + \frac{16000}{3} = 1333{,}3 \text{ (ME)}$$

Hilfsmittelfreier Teil A – Analysis Lösungen

Aufgabe 3

3.2



Aufgabe 4

a) Ansatz: $E(x) = ax^2 + bx$ wegen $E(0) = 0$; $E'(x) = 2ax + b$

Bedingungen und LGS: $E(3) = 36$ $\quad 9a + 3b = 36$

$3a + b = 12 \quad | \cdot(-1)$

$E'(3) = 0 \quad 6a + b = 0$

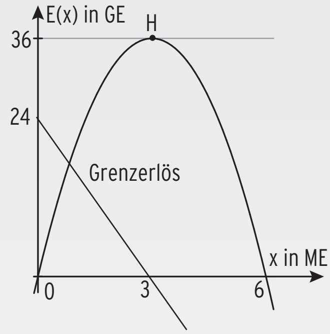
Addition ergibt: $3a = -12 \Leftrightarrow a = -4$

Einsetzen in $6a + b = 0$: $b = 24$

Funktionsterm für die Erlösfunktion: $E(x) = -4x^2 + 24x$

Hinweis: $E(6) = 0$ führt auf $36a + 6b = 0 \Leftrightarrow 6a + b = 0$

b) Graph der 1. Ableitung: fallende Gerade, die oberhalb und unterhalb der Abszissenachse im 1. und 4. Quadranten verläuft ($x \geq 0$).
Sie schneidet die x-Achse an der Maximalstelle von E.
Mit jeder zusätzlich verkauften ME wird der zusätzliche Erlös kleiner. Ab 3 ME nimmt der Erlös ab, weil der Grenzerlös E′ ($E'(x) = -8x + 24$) negativ wird.



Aufgabe 5   Aufgaben Seite 10

1.1 Die variablen Stückkosten und die Grenzkosten sind im Betriebsminimum gleich, also ist aus der Tabelle abzulesen: $x_{BM} = 4$. Die Aussage ist also wahr.

oder: k_v ist minimal in $x = 4$

1.2 Die Grenzkostenfunktion K′ gibt den Kostenzuwachs an. Dieser nimmt nur von 0 ME bis 3 ME ab (degressiver Zuwachs), danach wieder zu (progressiver Zuwachs). Daher ist die Aussage falsch.

Hilfsmittelfreier Teil A – Analysis Lösungen

Aufgabe 5 **Aufgaben Seite 10**

1.3 Die Stückkostenfunktion und die variable Stückkostenfunktion unterscheiden sich nur durch den Term $\frac{K_{fix}}{x}$: $k(x) = k_v(x) + \frac{K_{fix}}{x}$

Daher gilt: $K_{fix} = k(1) - k_v(1) = 201 - 57 = 144$. Die Aussage ist also wahr.

Aufgabe 6

1 $f(t) = 9t \cdot e^{-0,3t} + 6$; $f'(t) = 9 \cdot e^{-0,3t} + (-0,3) \cdot 9t \cdot e^{-0,3t} = (9 - 2,7t) \cdot e^{-0,3t}$

(mit Produkt und Kettenregel)

Notwendige Bedingung: $f'(t) = 0$ $\quad 9 - 0,3 \cdot 9t = 0 \quad (e^{-0,3t} \neq 0)$

$-2,7t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{3}$

Der maximale Absatz wird im 4. Monat erreicht.

2 Der stärkste Absatzrückgang entspricht dem Wendepunkt mit re/li-Krümmungswechsel. Dieser liegt laut Graph bei ungefähr (8 | 12,5). Die Aussage ist also wahr.

Aufgabe 7 **Aufgaben Seite 11**

1 Schnittpunkt von Angebots- und Nachfragefunktion:

$p_A(x) = p_N(x)$ $\quad \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{3} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{64}{3} \Leftrightarrow x^2 = 16$

liefert die Lösungen $x = \pm 4$

Da negative Produktionswerte ökonomisch sinnlos sind, liegt die Gleichgewichtsmenge bei 4 ME. Der Gleichgewichtspreis liegt bei 16 GE/ME:

$p_A(4) = p_N(4) = 16$ Die Abbildung bestätigt das Ergebnis.

2 Der Inhalt der zwischen dem Graphen von p_N und $y = 16$ eingeschlossenen Fläche stellt den Geldwert der Konsumentenrente dar, der Flächeninhalt zwischen $y = 16$ und dem Graphen von p_A den Geldwert der Produzentenrente. Die Fläche der Konsumentenrente ist kleiner als die Fläche der Produzentenrente, somit ist die Konsumentenrente geringer als die Produzentenrente.

Aufgabe 8

Gesamtkosten K mit $K(x) = 0,5x^3 - 8x^2 + 45x + 70$ mit $D_K = [0; 13]$

Minimum der variablen Stückkosten

variable Stückkosten $k_v(x) = 0,5x^2 - 8x + 45$; $k_v'(x) = x - 8$; $k_v''(x) = 1 > 0$

Minimum der variablen Stückkosten: $k_v'(x) = 0$ für $x = 8$

Nachweis: $k_v(8) = 13$ ist das Minimum wegen $k_v''(x) = 1 > 0$

Interpretation: Der minimale Verkaufspreis, bei dem bereits die fixen Kosten als Verlust in Kauf genommen werden, beträgt 13 GE/ME.

II Musteraufgabensätze zum Aufgabenteil A ab 2024

Aufgabensatz 1 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Lösungen Seite 50

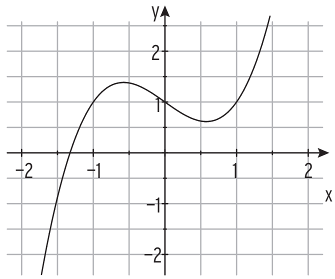
Pflichtaufgabe Analysis **Punkte**

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f, g und h durch

$f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 - x + 1$ und $h(x) = x^4 + x^2 + 1$.

a) Die Abbildung zeigt den Graphen einer der drei Funktionen. 3

Geben Sie an, um welche Funktion es sich handelt. Begründen Sie, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt.



b) Die erste Ableitungsfunktion von h ist h′.

Bestimmen Sie den Wert von $\int_0^1 h'(x)\,dx$. 2

Pflichtaufgabe Stochastik

Bei der Wintersportart Biathlon wird bei jeder Schießeinlage auf fünf Scheiben geschossen. Ein Biathlet tritt bei einem Einzelrennen zu einer Schießeinlage an, bei der er auf jede Scheibe einen Schuss abgibt. Diese Schießeinlage wird modellhaft durch eine Bernoullikette mit der Länge 5 und der Trefferwahrscheinlichkeit p beschrieben. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Treffer.

a) Nennen Sie in diesem Sachzusammenhang das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit $P(X < 3)$ bestimmt werden kann. 1

b) Entscheiden Sie, welcher der beiden Terme die Wahrscheinlichkeit für genau vier Treffer beschreibt: (i) $\binom{5}{4} \cdot p \cdot (1-p)^4$ (ii) $\binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)$ 2

c) Erläutern Sie anhand eines Beispiels, dass die modellhafte Beschreibung der Schießeinlage durch eine Bernoullikette unter Umständen der Realität nicht gerecht wird. 2

Aufgabensatz 1

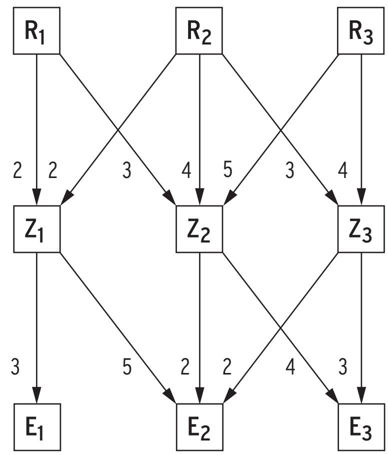
Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Pflichtaufgabe Lineare Algebra — Punkte

Ein Betrieb erzeugt aus drei Rohstoffen (R_1, R_2, R_3) drei Zwischenprodukte (Z_1, Z_2, Z_3), die zu drei Endprodukten (E_1, E_2, E_3) weiterverarbeitet werden.
Es gibt Werte für a und b, so dass die Zusammenhänge durch den folgenden Verflechtungsgraphen und die Rohstoff-Endprodukt-Tabelle gegeben sind.

Verflechtungsgraph

Angaben in Mengeneinheiten



Rohstoff-Endprodukt-Tabelle

Anzahl der benötigten ME der Rohstoffe je ME des Endprodukts

Endprodrukt / Rohstoff	E_1	E_2	E_3
R_1	*a*	16	12
R_2	6	*b*	25
R_3	0	18	32

a) Der Zusammenhang Rohstoff-Zwischenprodukt wird durch eine Matrix A_{RZ}, der Zusammenhang Zwischenprodukt-Endprodukt durch eine Matrix B_{ZE} und der Zusammenhang Rohstoff-Endprodukt durch eine Matrix C_{RE} beschrieben.

Geben Sie eine Beziehung zwischen diesen drei Matrizen an. 1

b) Bestimmen Sie die fehlenden Wert für und a b. 2

c) Betrachtet werden die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass B die zu A inverse Matrix ist. 2

Aufgabensatz 1

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Wahlaufgaben

Bearbeiten Sie 2 Aufgaben aus den 4 Wahlaufgaben, davon mindestens eine Analysis-Aufgabe

Wahlaufgabe 1 – Analysis

Punkte

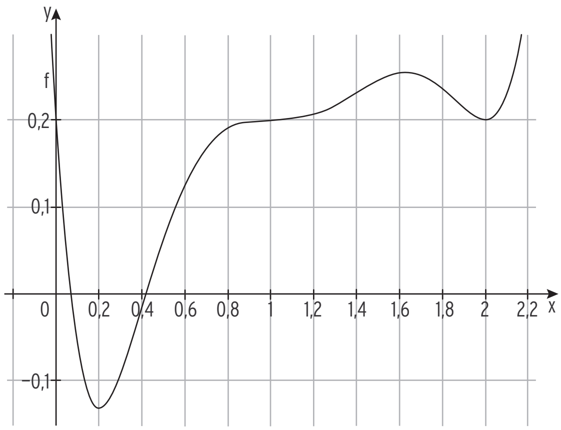
Eine Funktion f ist durch ihre Gleichung $f(x) = x^3 - 8x^2 + 12x$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f. 2

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P(1 \mid f(1))$. 3

Wahlaufgabe 2 – Analysis

Abgebildet ist der Graph einer Funktion f.



a) Geben Sie je einen Wert für a und b an, so dass gilt:

I $f'(0{,}2) = a$

II $f''(b) = 0$. 2

b) Markieren Sie einen Punkt $P(x_P \mid y_P)$ auf dem Funktionsgraphen von f, für den gilt: 3

$f''(x_P) = 0$ und $f'(x_P) < 0$.

Begründen Sie, warum der von Ihnen gewählte Punkt P die beiden Bedingungen erfüllt.

Aufgabensatz 1

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Wahlaufgaben

Punkte

Wahlaufgabe 3 Stochastik

60% der Kunden eines Reiseunternehmens reisen gerne in die Region A,

30% in die Region B, 20% reisen in jede der beiden Regionen gerne.

a) Unter denjenigen Kunden, die gerne in die Region A reisen, wird eine Person zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person auch gerne in die Region B reist. 2

b) Berechnen Sie den Anteil der Kunden, die entweder in die Region A oder in die Region B gerne reisen. 3

Wahlaufgabe 4 Lineare Algebra

Im Folgenden sind alle vorliegenden $(n \times n)$ - Matrizen invertierbar. 5

E ist die Einheitsmatrix.

Lösen Sie die Matrizengleichung $(B + A) \cdot (E - A) = (X - B) \cdot A$

nach X auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

Musteraufgabensätze zum Aufgabenteil A ab 2024

Aufgabensatz 2

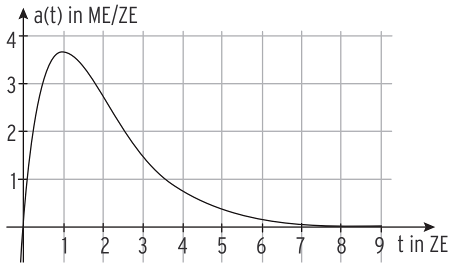
Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Lösungen Seite 52

Pflichtaufgaben Punkte

Pflichtaufgabe Analysis

Die PRINTFIX AG fertigt innovative und hochwertige 3D-Drucker. Der momentane Absatz in Mengeneinheiten pro Zeiteinheit (ME/ZE) kann durch den Graphen a des Produktlebenszyklus $a(t) = 10t \cdot e^{-t}$ mit $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ beschrieben werden.



a) Bestimmen Sie ausschließlich mit Hilfe der notwendigen Bedingung den Zeitpunkt, an dem die PRINTFIX AG die meisten 3D-Drucker pro ZE absetzt. 3

b) In $t = 2$ liegt eine Wendestelle vor. Interpretieren Sie diese ökonomisch. 2

Pflichtaufgabe Stochastik

In einer Urne U_1 befinden sich vier rote und zwei gelbe Kugeln, in einer Urne U_2 zwei rote, eine gelbe und eine blaue Kugel.

a) Eine der beiden Urnen wird zufällig ausgewählt. Anschließend wird daraus zweimal hintereinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt werden kann, dass beide entnommenen Kugeln rot sind. 2

b) Eine der beiden Urnen wurde zufällig ausgewählt; aus dieser wurde eine Kugel zufällig entnommen. Die entnommene Kugel ist gelb oder blau. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel aus der Urne U_1 stammt. 3

Pflichtaufgabe Lineare Algebra

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.5 Entscheiden Sie für jeden der Terme $A + B$ und $A \cdot B$, ob er definiert ist. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung. 2

1.6 Bestimmen Sie für die Matrix $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Werte von a, b, c und d so, dass $B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt. 3

III Teil B der Abiturprüfung mit Hilfsmittel – MMS (CAS) Operatoren

Operator	AFB	Erläuterung
angeben, nennen	I, II	Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung erforderlich
begründen, nachweisen, zeigen	II, III	Sachverhalte, Aussagen sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens ist frei wählbar, das Verfahren ist darzustellen. zu nutzen
berechnen	I, II	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen
beschreiben	I, II	Strukturen, Sachverhalte, Verfahren unter Verwendung der Fachsprache angemessen wiedergeben, eine Begründung ist nicht notwendig.
bestimmen, ermitteln	I, II	Zusammenhänge bzw. Lösungswege finden und die Ergebnisse formulieren
beurteilen	II, III	Das zu fällende Urteil ist zu begründen
bewerten, deuten interpretieren	II, III	Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.
entscheiden	II, III	Sich bei Alternativen eindeutig und begründet auf eine Möglichkeit festlegen.
erläutern	I, II	Strukturen und Zusammenhänge erfassen, in Einzelheiten verdeutlichen und durch zusätzliche Informationen verständlich machen
herleiten, formulieren	II, III	Eine Formel oder einen Zusammenhang aus bekannten Sachverhalten nachvollziehbar entwickeln
skizzieren	I, II	Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie wesentliche Eigenschaften von Sachverhalten oder Objekten beschreibt
untersuchen	I, II	Sachverhalte, Probleme, Fragestellungen nach bestimmten, fachlich üblichen bzw. sinnvollen Kriterien bearbeiten
vergleichen	I, II	Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede ermitteln
zeichnen, grafisch darstellen	I, II	hinreichend exakte graphische Darstellungen von Objekten oder Daten anfertigen
klassifizieren	II, III	eine Menge von Objekten nach vorgegebenen oder sinnvoll selbstständig zu wählenden Kriterien in Klassen einteilen

Operator	AFB	Erläuterung
bestätigen	I, II	Aussagen oder Sachverhalte mathematisch verifizieren
dokumentieren, darstellen	I, II	Gedankengang bzw. Herleitung der Problemlösung darlegen
veranschaulichen, verdeutlichen	I, II	Einen Sachverhalt mit verbalen oder graphischen Erläuterungen versehen
ergänzen	I, II	eine vorgegebene Rechnung, Grafik oder Tabelle vervollständigen
erklären	I, II	Sachverhalte mithilfe eigener Kenntnisse verständlich und nachvollziehbar machen und in Zusammenhänge einordnen
definieren	II, III	kontextabhängige, eigenständige Begriffe bzw. Darstellungen festlegen
erstellen	I, II	einen Sachverhalt in übersichtlicher, fachlich angemessener Form ausdrücken
analysieren	II, III	Sachverhalte, Probleme, Fragestellungen genauer untersuchen und strukturieren
vereinfachen, umformen	I, II	Terme, Aussagen, Formeln mittels geeigneter Strategien an den jeweiligen Sachverhalt anpassen
prüfen, überprüfen	II, III	die Gültigkeit einer Aussage, z. B. einer Hypothese oder einer Modellvorstellung, verifizieren, falsifizieren
übertragen	II, III	einen untersuchten Sachverhalt bzw. allgemeingültige Aussagen auf ähnliche Sachverhalte anwenden
entwickeln, entwerfen	II, III	Sachverhalte und Methoden zielgerichtet in einen Zusammenhang bringen, also eine Hypothese, eine Skizze oder ein Modell weiterführen und ausbauen

Die Verwendung eines Operators, der in der Übersicht nicht genannt wird, ist möglich, wenn aufgrund der standardsprachlichen Bedeutung dieses Operators in Verbindung mit der Aufgabenstellung davon auszugehen ist, dass die jeweilige Aufgabe im Sinne der Aufgabenstellung bearbeitet werden kann.
Grundsätzlich können sich alle Operatoren auf alle drei Anforderungsbereiche beziehen.
Die Operatoren können durch **Zusätze** (z. B. „rechnerisch“ oder „grafisch“) konkretisiert werden.
Zugelassene Hilfsmittel dürfen zur Bearbeitung verwendet werden, sofern dem kein entsprechender Zusatz entgegensteht. Speziell kann bei der Verfügbarkeit von MMS (CAS) im Einzelfall die Darstellung eines Lösungswegs gefordert werden, der auch ohne den Einsatz dieser Technologien nachvollziehbar ist.

Teil B der Abiturprüfung mit Hilfsmittel, CAS

1 Analysis

Mathematische Formeln Wirtschaft und Verwaltung

Gesamtkostenfunktion K mit	$K(x) = K_v(x) + K_f$
Ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit	$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ a > 0;\ x \geq 0$
K wächst degressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) < 0$
K wächst progressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) > 0$
Funktion der variablen Gesamtkosten	$K_v(x)$
Funktion der gesamten Stückkosten k	$k(x) = \frac{K(x)}{x}$
Funktion der variablen Stückkosten k_v (k_{var})	$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$
Grenzkostenfunktion	$K'(x)$ Kostenzuwachs
Grenzstückkostenfunktion	$k'(x)$
Betriebsoptimum (Minimalstelle von k)	x_{BO}
Langfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BO})$
Betriebsminimum (Minimalstelle von k_v)	x_{BM}
kurzfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BM})$
Nachfragefunktion (Preis-Absatz-Funktion)	$p_N(x)$
Angebotsfunktion	$p_A(x)$
Gleichgewichtsmenge (Schnittstelle von p_N und p_A)	x_G
Gleichgewichtspreis	$p_G = p_N(x_G) = p_A(x_G)$
Marktgleichgewicht MG	$MG(x_G \mid p_G)$
Konsumentenrente	$KR = \int_0^{x_G} p_N(x)dx - x_G \cdot p_G$
Produzentenrente	$PR = x_G \cdot p_G - \int_0^{x_G} p_A(x)\,dx$
Erlösfunktion	$E(x) = p \cdot x;$ p Preis pro ME $E(x) = p_N(x) \cdot x$ $p_N(x)$; Preis abhängig von x
Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x)$
Grenzgewinnfunktion	$G'(x)$
Gewinnschwelle	x_{GS} 1. positive Nullstelle von G
Gewinngrenze	x_{GG} 2. positive Nullstelle von G
gewinnmaximale Ausbringungsmenge Maximalstelle von G(x)	x_{max}
Cournot'scher Punkt	$C(x_{max} \mid p_N(x_{max}))$
Stückdeckungsbeitrag d = dB	$dB(x) = p - k_v(x)$
Deckungsbeitrag D = DB	$DB(x) = G(x) + K_f = E(x) - K_v(x)$

Bezeichnungen: $\mathbb{R}^* = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $\mathbb{R}_+^* = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^{>0}$

$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\} = \mathbb{R}^{\geq 0}$

Produktregel der Ableitung: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Analysis

Aufgabe 1 Lösung Seite 68

Die Gluco KG stellt verschiedene Traubenzuckerprodukte und Müsliriegel der Marke D-Ergy her.
Mit dem Müsliriegel Müslifit, der sich besonders an Jugendliche wendet, ist die Gluco KG neben vielen weiteren Anbietern ähnlicher Produkte am Markt vertreten.
Den Müsliriegel gibt es in drei Geschmacksrichtungen: Banane, Erdbeere und Waldfrucht.
Die Funktionsgleichungen der Grenzkostenfunktionen für die Geschmacksrichtungen Banane und Erdbeere lauten:

Banane $K_B'(x) = 21x^2 - 90x + 150$

Erdbeere $K_E'(x) = ax^2 - 90x + 150$

Für den unbekannten Vorfaktor a gilt: $a \in \mathbb{R}$ und $a > 13{,}5$
Dabei gibt x die produzierte Menge von Müslifit in Mengeneinheiten (ME) an sowie $K_B'(x)$ und $K_E'(x)$ die zugehörigen Grenzkosten in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME).
Der Verkaufspreis beträgt für alle Geschmacksrichtungen einheitlich 125 GE/ME.
Bei der Herstellung von 4 ME der Sorte Banane betragen die anfallenden Kosten 388 GE.
Der Müsliriegel mit Geschmacksrichtung Waldfrucht wird als Sonderedition für maximal 24 Wochen auf den Markt gebracht.
Der Produktlebenszyklus der Geschmacksrichtung Waldfrucht wird durch die Funktion u mit

$$u(t) = 1{,}2667 \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}01013t^2 + 4}$$

beschrieben. Dabei gibt t die Zeit in Wochen nach Markteinführung dieser Geschmacksrichtung und u(t) den zugehörigen Wochenumsatz in GE pro Woche an.
Der Zeitpunkt der Markteinführung entspricht t = 0.

1.1 Die Unternehmensleitung fordert Informationen über die Kosten- und Gewinnsituation bei der Herstellung der verschiedenen Geschmacksrichtungen von Müslifit an.

1.1.1 Erläutern Sie, wie man aus den gegebenen Informationen die Kostenfunktion K_B mit $K_B(x) = 75x^3 - 45x^2 + 150x + 60$ für die Geschmacksrichtung Banane herleiten kann. 5 Punkte

1.1.2 Berechnen Sie die gewinnmaximale Produktionsmenge und den dazugehörigen Gewinn für die Sorte Banane. 7 Punkte

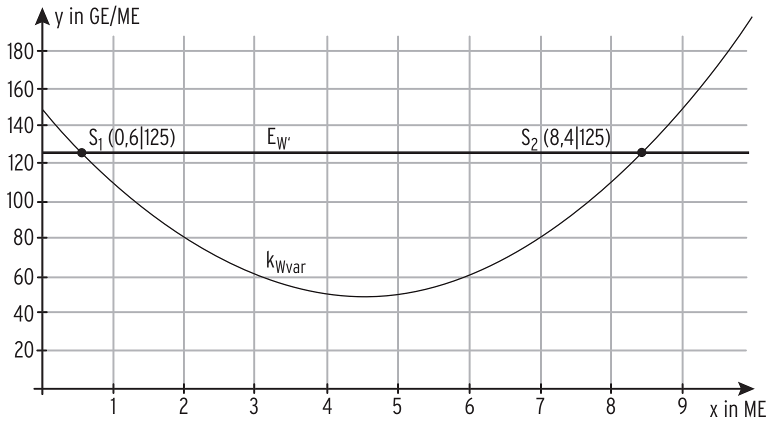
Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Analysis

Aufgabe 1

1.1.3 Untersuchungen haben gezeigt, dass für die Geschmacksrichtung Erdbeere die Grenzkosten bei einer Produktionsmenge von 2 ME minimal sind.
Erläutern Sie die ökonomische Bedeutung dieser Angabe. 3 Punkte

1.1.4 Bestimmen Sie mit Hilfe der Angabe aus 1.1.3 den Wert für den Vorfaktor a der Grenzkostenfunktion K_E'. 4 Punkte

1.2 Die folgende Abbildung zeigt die Graphen der Grenzerlösfunktion E_W' und der variablen Stückkostenfunktion $k_{W_{var}}$ für die dritte Geschmacksrichtung Waldfrucht.



1.2.1 Begründen Sie, dass die Funktionswerte der Grenzerlösfunktion E_W' den Verkaufspreis pro Stück angeben. 2 Punkte

1.2.2 Die Geschäftsführerin behauptet, dass bei Ausbringungsmengen zwischen 0,6 ME und 8,4 ME die Gesamtkosten gedeckt sind.
Nehmen Sie Stellung zu der Behauptung der Geschäftsführerin. 4 Punkte

1.3 Im Folgenden soll die Funktion u, die den Produktlebenszyklus der Geschmacksrichtung Waldfrucht beschreibt, näher untersucht werden.

1.3.1 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion u für $0 \leq t \leq 24$ in die **Anlage 1.** 4 Punkte

1.3.2 Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von u im Sachkontext. 4 Punkte

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Analysis

Aufgabe 1

1.4 Die Unternehmensleitung gibt vor, dass die Produktion der Geschmacksrichtung Waldfrucht eingestellt wird, wenn der Wochenumsatz unter 1 000 GE pro Woche sinkt, spätestens jedoch, wenn der Umsatzrückgang maximal ist. Dies soll mit Hilfe der Funktion u untersucht werden.

1.4.1 Weisen Sie nach, dass die Geschmacksrichtung Waldfrucht wegen der Vorgaben nach ca. 15 Wochen wieder vom Markt genommen wird. 8 Punkte

1.4.2 Berechnen Sie den Gesamtumsatz der Geschmacksrichtung Waldfrucht innerhalb der ersten 15 Wochen. 4 Punkte

insgesamt: 45 Punkte

(Haupttermin 2016 GK CAS)

Anlage 1 für Aufgabe 1.3.1

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Analysis

Aufgabe 2 **Lösung Seite 71**

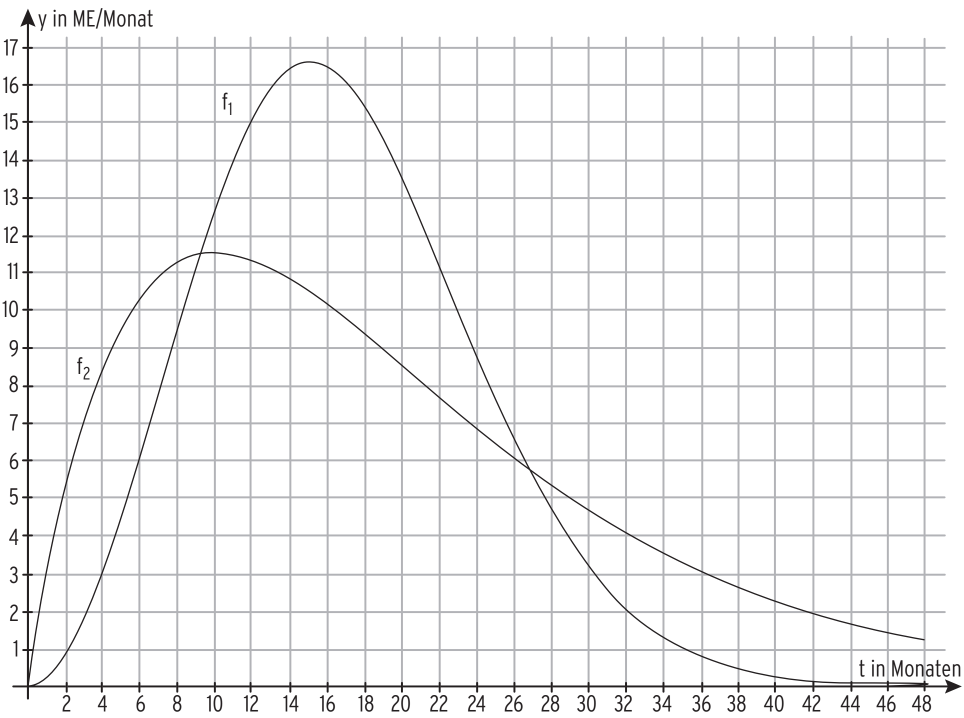
Das Unternehmen ISERLED hat ein neues, besonders lichtstarkes LED-Leuchtmittel der Serie „Ambiente" entwickelt, das bisher übliche Halogen-Leuchtmittel ersetzen soll. Der Vorstand der ISERLED hat eine Umsatzprognose für das neue Produkt in Auftrag gegeben. Daraufhin werden die zwei folgenden Modelle betrachtet, die die monatliche Absatzrate des Leuchtmittels in den kommenden vier Jahren beschreiben könnten.

Modell 1: $f_1(t) = \frac{1}{5}t^2 \cdot e^{-\left(\frac{t}{15}\right)^2}$

Modell 2: $f_2(t) = 3{,}15t \cdot e^{-\frac{t}{10}}$

Dabei steht t für die seit Markteinführung des Produktes vergangene Zeit in Monaten.

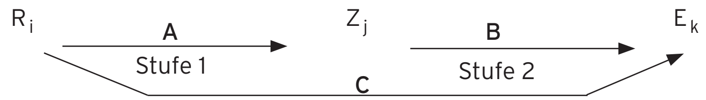
$f_1(t)$ und $f_2(t)$ geben für die Modelle 1 und 2 die zugehörigen Absatzraten des Leuchtmittels zum Zeitpunkt t in Mengeneinheiten (ME) pro Monat an. Die folgende Abbildung zeigt die Graphen von f_1 und f_2 im Prognosezeitraum von 4 Jahren.



2 Lineare Algebra/Analytische Geometrie

Formelsammlung

Lineare Verflechtung – Mehrstufige Produktionsprozesse



R_i: Rohstoffe; Z_j: Zwischenprodukte; E_k: Endprodukte

Verflechtungsmatrizen

Rohstoff-Zwischenprodukt ; Zwischenprodukt-Endprodukt; Rohstoff-Endprodukt-Matrix
A B C

Es gilt der Zusammenhang: $\boxed{C = A \cdot B}$

Verbrauchs-, Produktionsvektoren

$\vec{r}$: Rohstoffvektor $\vec{z}$: Zwischenproduktvektor $\vec{x}$: Endproduktvektor

Es gilt: $\boxed{A \cdot \vec{z} = \vec{r} \qquad B \cdot \vec{x} = \vec{z} \qquad C \cdot \vec{x} = \vec{r}}$

Kostenvektoren (variable Kosten pro Einheit)

Rohstoffkosten: $\vec{k}_R$ Fertigungskosten in Stufe 1: $\vec{k}_Z$ Fertigungskosten in Stufe 2: $\vec{k}_E$

Kostenvektoren sind Zeilenvektoren.

Die **Gesamtkosten für die Produktion $\vec{x}$** setzen sich zusammen aus
Rohstoffkosten + Fertigungskosten in Stufe 1 + Fertigungskosten in Stufe 2 + fixe Kosten
K_R K_Z K_E K_f

Es gilt: $\boxed{K_R = \vec{k}_R \cdot \vec{r} \qquad K_Z = \vec{k}_Z \cdot \vec{z} \qquad K_E = \vec{k}_E \cdot \vec{x}}$

Variable Herstellungskosten $\vec{k}_v$ pro Einheit eines Endproduktes: $\boxed{\vec{k}_v = \vec{k}_R \cdot C + \vec{k}_Z \cdot B + \vec{k}_E}$

Gesamtkosten K für die Produktion $\vec{x}$ gilt bei Fixkosten K_f:

$$K = K_v + K_f = \vec{k}_v \cdot \vec{x} + K_f$$
$$K = \vec{k}_R \cdot C \cdot \vec{x} + \vec{k}_Z \cdot B \cdot \vec{x} + \vec{k}_E \cdot \vec{x} + K_f$$
$$K = \vec{k}_R \cdot \vec{r} + \vec{k}_Z \cdot \vec{z} + \vec{k}_E \cdot \vec{x} + K_f$$

Inverse Matrix

Existenz: Die **quadratische** Matrix A ist **invertierbar** (die Inverse A^{-1} existiert), wenn

Rg(A) = n **oder** das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist **eindeutig lösbar.**

Berechnung: Umformung von $(A \mid E)$ in $(E \mid A^{-1})$

Eigenschaften: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ $\qquad (A^{-1})^{-1} = A$

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ $\qquad (r \cdot A)^{-1} = \frac{1}{r} \cdot A^{-1}$

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra

Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Lösung Seite 95**

Das Ein-Liter-Auto ist kaum noch ein Thema. Niemand dürfte bereit sein, mehrere 10 000 Euro für ein eigenes Gefährt zu zahlen. Eine mögliche Zwischenlösung wird künftig wohl in einem Zwei- oder Drei-Liter-Auto gesehen.
Insgesamt gilt: ME gleich Mengeneinheiten und GE gleich Geldeinheiten.
Der Autozulieferbetrieb Dynamik baut unter anderem für ein Zwei-Liter-Auto in einem zweistufigen Produktionsprozess aus verschiedenen elektronischen Bauteilen (B1, B2 und B3) Fahrdynamikregelung, Motorsteuergerät und Bordcomputer (E1, E2, E3).
Die folgenden Listen geben Auskunft über die Zusammenhänge zwischen den Bauteilen und den Zwischen- bzw. Endprodukten in ME.

	Z1	Z2	Z3
B1	1	0	3
B2	5	2	12
B3	50	15	95

	E1	E2	E3
Z1	2	3	2
Z2	0	4	3
Z3	1	5	1

Kosten der Bauteile in GE/ME			Fertigungskosten der Zwischenprodukte in GE/ME			Fertigungskosten der Endprodukte in GE/ME		
B1	B2	B3	Z1	Z2	Z3	E1	E2	E3
0,03	0,02	0,01	1,5	2,5	2,5	10	15	20

1.1 Aus den obigen Angaben ergibt sich die folgende Bauteile-Endproduktmatrix:

$$M_{BE} = \begin{pmatrix} 5 & 18 & 5 \\ 22 & 83 & b \\ 195 & a & 240 \end{pmatrix}$$

1.1.1 Berechnen Sie die Werte für a und b. 5

1.1.2 Erläutern Sie die Bedeutung der Elemente a und b im Sachzusammenhang. 5

Im Folgenden sei a = 685 und b = 28.

1.2 Die Fixkosten der Wochenproduktion betragen 7 525 GE. 8
Berechnen Sie die Gesamtkosten für eine Wochenproduktion von 750 ME von E1, 900 ME von E2 und 500 ME von E3.

1.3 Kurz vor den Betriebsferien meldet das Lager einen Bestand an Zwischenprodukten von Z1 mit 4 300 ME, Z2 mit 4 250 ME und Z3 mit 4 950 ME.

1.3.1 Untersuchen Sie, wie viele Endprodukte mit diesem Lagerbestand noch vor den Betriebsferien produziert werden können. 8

1.3.2 Begründen Sie, dass es trotz höheren Rechenaufwands sinnvoll sein kann, zunächst die Inverse der Verflechtungsmatrix M_{ZE} zu bestimmen. 5

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra

Aufgabe 1 **Seite 2/2** **Punkte**

1.4 Das Unternehmen Dynamik staffelt seine Preise der Endprodukte nach Auftrag und Kunde. Den Kunden werden bestimmte Rabattkategorien r mit $r \in \mathbb{N}$ zugeordnet – guten Kunden wird eine höhere Kategorie zugeordnet.
Es gilt folgender Preisvektor:

$$e_r^T = (26{,}54 - 0{,}5r \quad 69{,}55 - 1{,}5r \quad 49{,}61 - r)$$

1.4.1 Berechnen Sie, für welche $r > 0$ die einzelnen Preise ökonomisch sinnvoll sind. 7

1.4.2 Die Gesamtkosten in Höhe von 85 055 GE bei der Wochenproduktion von 750 ME von E1, 900 ME von E2 und 500 ME von E3 sollen trotz Rabatt mindestens gedeckt werden. 7
Leiten Sie den Bereich für r her, der dieser Anforderung genügt.
(Berufskolleg NRW 2011.) $\overline{45}$

Aufgabe 2 **Seite 1/2** **Lösung Seite 96** **Punkte**

BioKosmetiKuss stellt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus pflanzlichen Rohstoffen (R1, R2 und R3) Zwischenprodukte (Z1, Z2 und Z3) und aus diesen wiederum verschiedene Parfums (E1, E2 und E3) her.
Die folgenden Matrizen geben die benötigten pflanzlichen Rohstoffe je Zwischenprodukt bzw. Zwischenprodukte je Endprodukt (Parfum) in ME an.

$$A_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 4 & 1 & b \end{pmatrix} \qquad B_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & c \end{pmatrix}\ ;\ a, b, c \geq 0$$

Für die Rohstoff-Endprodukt-Matrix gilt in der aktuellen Produktionsperiode:

$$C_{RE} = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 7 \\ 15 & 23 & 13 \\ 10 & 17 & 7 \end{pmatrix}$$

3.1 Bei der Produktion der Zwischenprodukte und der Parfums treten produktionsbedingte Parameter a, b und c auf, die in den einzelnen Produktionsperioden variieren können.

3.1.1 Berechnen Sie die Werte für a, b und c für die aktuelle Produktionsperiode. 5

3.1.2 Deuten Sie Ihre Ergebnisse aus 3.1.1 im Sachzusammenhang. 3

3.1.3 Stellen Sie die betriebliche Materialverflechtung in Form eines Gozintographen (Verflechtungsdiagramm) dar. 5

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra

Aufgabe 2 **Seite 2/2** **Punkte**

Im Folgenden seien a = 4, b = 2 und c = 0.

3.2 Folgende Kosten fallen an:

Kosten der pflanzlichen Rohstoffe in GE/ME			Fertigungskosten der Zwischenprodukte in GE/ME			Fertigungskosten der Endprodukte in GE/ME		
R1	R2	R3	Z1	Z2	Z3	E1	E2	E3
4,5	2,8	3,2	8,5	5	6,5	3	2,5	4

Die fixen Kosten einer Wochenproduktion betragen 5000 GE.

3.2.1 Bestimmen Sie die variablen Kosten je ME der Parfums E1, E2 und E3. 8

3.2.2 Aus produktionstechnischen Gründen werden die Parfums E1, E2 und E3 im Verhältnis 1 : 2 : 4 hergestellt. Ermitteln Sie, wie viele ME der Parfums E1, E2 und E3 produziert werden, wenn die Gesamtkosten 47 232 GE pro Woche betragen. (Berufskolleg NRW 2013.) 5

Aufgabe 3 **Seite 1/2** **Lösung Seite 98**

Das Unternehmen Argoline produziert Spielzeug. Ganz neu zum Sortiment gehört das Stecksystem Argoline3D, das den leichten Zusammenbau auch komplexer Modelle ermöglicht.

Das Spielsystem Argoline3D besteht im wesentlichen aus den Grundelementen V1 (Verbindungswürfel), S1 (Stecker), P1 (Platte) und R1 (Rohr).

1 In einem zweistufigen Produktionsprozess werden aus den Grundelementen V1, S1, P1 und R1 die Wandteile W1 und W2 gefertigt und die Beutel B mit 100 Steckern S1 gepackt, da man viele Stecker S1 benötigt, um Wände zusammenzusetzen.
In der zweiten Produktionsstufe werden daraus die häufig nachgefragten Modelle Haus und Turm hergestellt.

Grundelement - Zwischenprodukt

	W1	W2	B
V1	12	9	0
S1	34	24	100
R1	17	12	0
P1	6	4	0

Zwischenprodukt - Endprodukt

	Haus	Turm
W1	12	12
W2	16	34
B	3	4

1.1 Berechnen Sie die Matrix, die die Anzahl der Grundelemente je Endprodukt Haus und Turm angibt.

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 11 **Lösung Seite 109**

Die Gluco KG bietet in einer Sport-Edition verschiedene Sorten von Energieriegeln an, deren Herstellung in einem zweistufigen Produktionsprozess erfolgt. Dabei werden zunächst aus den Rohstoffen R1 (Maltodextrin), R2 (Mandeln), R3 (Haferflocken) und R4 (Glucosesirup) die Basismischungen B1, B2 und B3 hergestellt. Anschließend werden aus diesen Basismischungen die Energieriegel E1, E2 und E3 produziert.

Die folgenden Tabellen zeigen den jeweiligen Bedarf in Mengeneinheiten (ME):

	B1	B2	B3
R1	3,5	2,75	2,5
R2	0,5	1	1
R3	0,5	0,75	1
R4	0,5	0,5	0,5

	E1	E2	E3
B1	20	25	a
B2	10	15	b
B3	10	20	c

Die nachstehende Tabelle gibt die Rohstoffkosten je ME in Geldeinheiten (GE) an:

Rohstoff	R1	R2	R3	R4
Rohstoffkosten in GE je ME	5	3	2	1

2.1 Ein Kunde bestellt jeweils 100 ME von E1, E2 und E3.
Für deren Herstellung werden 53 625 ME von R1, 14 250 ME von R2, 13 125 ME von R3 und 9 000 ME von R4 benötigt.

2.1.1 Bestimmen Sie die Werte für a, b und c, die den Bedarf an Basismischungen für die Produktion einer ME des Energieriegels E3 angeben. 6 Punkte

Gehen Sie im Folgenden von den Werten a = 30, b = 20 und c = 30 aus.

2.1.2 Berechnen Sie die benötigten Mengen an Basismischungen für die Bestellung des Kunden. 3 Punkte

2.2 Für die Vorbereitung eines Kundenauftrages werden Basismischungen produziert.

2.2.1 Für diesen Kundenauftrag werden insgesamt 6 800 ME von B1, 4 100 ME von B2 und 5 500 ME von B3 benötigt.
Berechnen Sie die gesamten Rohstoffkosten für diesen Auftrag. 5 Punkte

2.2.2 Im Lager befinden sich 6 800 ME von B1, 4 100 ME von B2 und 5 500 ME von B3.
Diese Lagerbestände sollen komplett verbraucht werden.
Zeigen Sie, dass mehrere Kombinationen von E1, E2 und E3 mit diesen Lagerbeständen hergestellt werden können. 6 Punkte

Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra

Aufgabe 11

2.2.3 Eine Mitarbeiterin behauptet bezüglich der in Aufgabe 2.2.2 angegebenen Lagerbestände:„Von E3 können höchstens 140 ME hergestellt werden und die Menge der bestellten Energieriegel beträgt insgesamt 270 ME“.
Prüfen Sie die Behauptung der Mitarbeiterin. 5 Punkte

2.3 Im Rahmen einer Umstrukturierung nimmt die Gluco KG den Riegel E3 aus dem Sortiment und ersetzt ihn durch eine neue Sorte F. Wegen eines Rohstoffengpasses stehen lediglich begrenzte Mengen der Basismischungen zur Verfügung, die so zu Energieriegeln E1, E2 und F verarbeitet werden können. Ein Mitarbeiter wird beauftragt, mit Hilfe des Simplexalgorithmus die Produktionsmengen x_1 (Energieriegel E1), x_2 (Energieriegel E2) und x_3(Energieriegel F) zu ermitteln, bei denen der Deckungsbeitrag maximal ist. Er stellt dazu das folgende Starttableau (1. Tableau) auf:

x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	
20	25	40	1	0	0	6000
10	15	40	0	1	0	4000
10	20	10	0	0	1	3000
20	10	40	0	0	0	Z

2.3.1 Erklären Sie die Bedeutung der Einträge in den grau schattierten Zellen im Sachzusammenhang. 7 Punkte

2.3.2 Berechnen Sie das 2. Tableau. 7 Punkte

2.3.3 Der Mitarbeiter ermittelt das folgende 3. Tableau:

x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	
1	1	0	0,1	–0,1	0	200
0	0,125	1	–0,025	0,05	0	50
0	8,75	0	–0,75	0,5	1	500
0	–15	0	–1	0	0	Z–6000

Interpretieren Sie das 3. Tableau in Bezug auf das Erreichen des maximalen Deckungsbeitrags, die Höhe des Deckungsbeitrages, die Produktionsmengen der Energieriegel E1, E2 und F und auf verbleibende Reste der Basismischungen.
(Berufskolleg NRW 2016.) 6 Punkte

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra Lösungen

Lösung Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 77**

1.1.1 Bauteile-Zwischenprodukt-Matrix M_{BZ}

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix M_{ZE}; Bauteile-Endprodukt-Matrix M_{BE}

Es gilt: $M_{BZ} \cdot M_{ZE} = M_{BE}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 12 \\ 50 & 15 & 95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 18 & 5 \\ 22 & 83 & b \\ 195 & a & 240 \end{pmatrix}$

Für a und b gilt dann: $a = 50 \cdot 3 + 15 \cdot 4 + 95 \cdot 5 = 685$

$b = 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 12 \cdot 1 = 28$

Die exemplarische Überprüfung stimmt mit der Vorgabe überein.

1.1.2 a gibt die Anzahl der Bauteile B3 im Endprodukt E2 (Motorsteuergerät) an.
b gibt die Anzahl der Bauteile B2 im Endprodukt E3 (Bordcomputer) an.

1.2 Wochenproduktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 750 \\ 900 \\ 500 \end{pmatrix}$

Bauteilekosten je Endprodukt: $(0{,}03 \;\; 0{,}02 \;\; 0{,}01)\begin{pmatrix} 5 & 18 & 5 \\ 22 & 83 & 28 \\ 195 & 685 & 240 \end{pmatrix} = (2{,}54 \;\; 9{,}05 \;\; 3{,}11)$

Fertigungskosten je Endprodukt: $(1{,}5 \;\; 2{,}5 \;\; 2{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (5{,}5 \;\; 27 \;\; 13)$

Fertigungskosten der Endprodukte: $(10 \;\; 15 \;\; 20)$

Für die variablen Kosten je Endprodukt gilt:

$(2{,}54 \;\; 9{,}05 \;\; 3{,}11) + (5{,}5 \;\; 27 \;\; 13) + (10 \;\; 15 \;\; 20) = (18{,}04 \;\; 51{,}05 \;\; 36{,}11)$

Für die Gesamtkosten einer Wochenproduktion gilt:

$(18{,}04 \;\; 51{,}05 \;\; 36{,}11)\begin{pmatrix} 750 \\ 900 \\ 500 \end{pmatrix} + 7525 = 85055$

Die Gesamtkosten einer Wochenproduktion betragen 85 055 GE.

1.3.1 Ansatz: $M_{ZE} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4300 \\ 4250 \\ 4950 \end{pmatrix}$

Lösung des Gleichungssystems mithilfe der Inversen $M_{ZE}^{-1} = \frac{1}{21} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -7 & -1 \\ -3 & 0 & 6 \\ 4 & 7 & -8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M_{ZE}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4300 \\ 4250 \\ 4950 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 800 \\ 350 \end{pmatrix}$

Es können noch 600 ME von E1, 800 ME von E2 und 350 ME von E3 produziert werden.

1.3.2 Die Berechnung der Inversen hat genau dann einen Vorteil, wenn die Produktionsmengen nicht nur für einen Lagerbestand, sondern für unterschiedliche Lagerbestände bestimmt werden sollen. So reduziert sich der weitere Rechenaufwand lediglich auf eine einfache Multiplikation der Inversen von M_{ZE} mit den Vektoren der jeweiligen Lagerbestände. Das Lösen von Gleichungssystemen ist dann nur einmal notwendig.

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra Lösungen

Lösung Aufgabe 1 **Seite 2/2**

1.4.1 Die Preise müssen mit Rabattgewährung größer als Null sein:

$26{,}54 - 0{,}5r > 0 \quad \Leftrightarrow \; r < 53{,}08$

$69{,}55 - 1{,}5r > 0 \quad \Leftrightarrow \; r < 46{,}37$

$49{,}61 - r > 0 \quad \Leftrightarrow \; r < 49{,}61$

Die Rabattgewährung r soll nur ganzzahlig ($\in \mathbb{N}$) sein; es gilt somit $0 \le r \le 46$.

1.4.2 Sinnvoller Bereich für r:

Es gilt: $G \ge 0$ mit $G = E - K$

$$G = e_r^T \cdot \vec{x} - K = (26{,}54 - 0{,}5r \quad 69{,}55 - 1{,}5r \quad 49{,}61 - r)\begin{pmatrix} 750 \\ 900 \\ 500 \end{pmatrix} - 85055 \ge 0$$

$22250 - 2225r \ge 0$

$r \le 10$

Für die Wahl der Rabattkategorie r gilt: $0 \le r \le 10$

Lösung Aufgabe 2 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 78**

3.1 $A_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 4 & 1 & b \end{pmatrix}$; $B_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & c \end{pmatrix}$; a, b, c $\ge$ 0; $C_{RE} = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 7 \\ 15 & 23 & 13 \\ 10 & 17 & 7 \end{pmatrix}$

3.1.1 Es gilt: $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$

Daraus folgt: $(1 \quad a \quad 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 15 \qquad 1 + 2a + 6 = 15 \quad \Leftrightarrow a = 4$

$(4 \quad 1 \quad b)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 10 \qquad 4 + 2 + 2b = 10 \quad \Leftrightarrow b = 2$

$(1 \quad 2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ c \end{pmatrix} = 7 \qquad 1 + 6 + c = 7 \quad \Leftrightarrow c = 0$

3.1.2 Deutung im Sachzusammenhang:

a= 4: Für eine ME des Zwischenproduktes Z2 werden 4 ME des pflanzlichen Rohstoffs R2 benötigt.

b = 2: Für eine ME des Zwischenproduktes Z3 werden 2 ME des pflanzlichen Rohstoffs R3 benötigt.

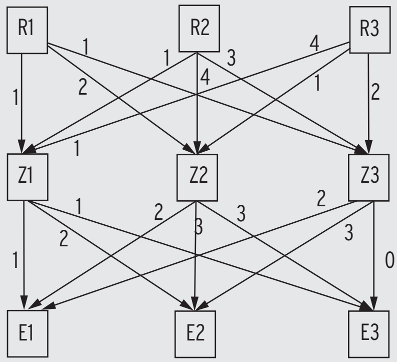
c = 0: Für eine ME des Endproduktes E3 werden keine ME des Zwischenproduktes Z3 verbraucht.

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra Lösungen

Lösung Aufgabe 2 **Seite 2/2**

3.1.3 Materialverflechtung

Gozintograph



3.2.1 **Variable Kosten je ME der Endprodukte E1, E2 und E3**

Materialkosten:

$$(4{,}5 \quad 2{,}8 \quad 3{,}2) \cdot C_{RE} = (4{,}5 \quad 2{,}8 \quad 3{,}2) \cdot \begin{pmatrix} 7 & 11 & 7 \\ 15 & 23 & 13 \\ 10 & 17 & 7 \end{pmatrix} = (105{,}5 \quad 168{,}3 \quad 90{,}3)$$

Fertigungskosten Zwischenprodukte:

$$(8{,}5 \quad 5 \quad 6{,}5) \cdot B_{ZE} = (8{,}5 \quad 5 \quad 6{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = (31{,}5 \quad 51{,}5 \quad 23{,}5)$$

Variable Kosten je ME der Endprodukte:

$(105{,}5 \quad 168{,}3 \quad 90{,}3) + (31{,}5 \quad 51{,}5 \quad 23{,}5) + (3 \quad 2{,}5 \quad 4)$

$= (140 \quad 222{,}3 \quad 117{,}8)$

Die variablen Kosten für eine ME von E1 betragen 140 GE, für eine ME E2 222,3 GE und 117,8 GE für eine ME E3.

3.2.2 **Produktionszahlen der Endprodukte**

Zu lösen ist: $(140 \quad 222{,}3 \quad 117{,}8) \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 4x \end{pmatrix} + 5000 = 47232$

$140x + 444{,}6x + 471{,}2x + 5000 = 47232 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 40$

Vom Endprodukt E1 können 40 E, von E2 80 ME und von E3 160 ME hergestellt werden.

Zentrale Abiturprüfung 2025
Grundkursfach Mathematik
Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Beschreibung der Ausgangssituation zu Aufgabenteil A

Die TravelBags GmbH stellt als Start-Up-Unternehmen neben klassischen Trolleys, Rucksäcken und Hartschalenkoffern auch Modelle mit eingebauten Powerbanks und GPS-Geräten her.

In allen Aufgaben gilt: ME ≙ Mengeneinheiten und GE ≙ Geldeinheiten.

Aufgabe 1 (25 Punkte)

Die Teilaufgaben 1.1 bis 1.3 sind Pflichtaufgaben.

1.1 **Pflichtaufgabe Analysis**

Für die Kosten des Business-Trolleys mit integrierter Powerbank stehen aus der letzten Produktionsperiode die Graphen der Funktionen $k(x)$, $k_v(x)$ und $K'(x)$ zur Verfügung.

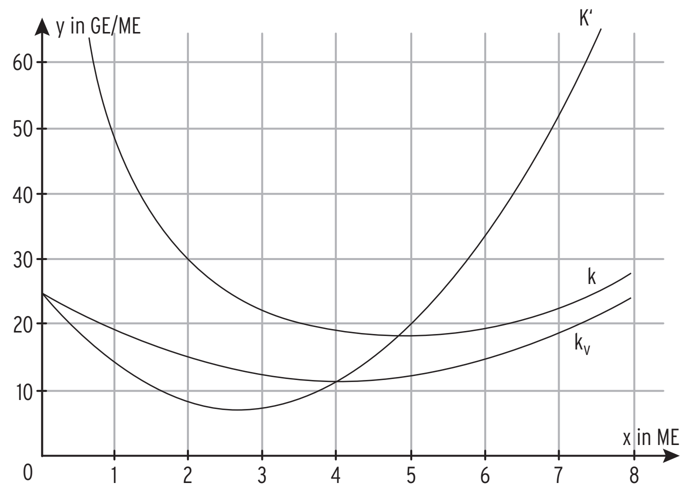


Abbildung 1

1.1.1 Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen zutreffen oder nicht.

A: Der Kostenanstieg ändert sich bei ca. 2,8 ME von degressiv zu progressiv.

B: Die Stückkosten und die Grenzkosten sind für ca. 4 ME gleich hoch.

C: Bei 2 ME entstehen Gesamtkosten in Höhe von 60 GE.

(5 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2025 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

1.2 Pflichtaufgabe Stochastik

Die TravelBags GmbH hat auf einer Messe eine Kundenbefragung durchgeführt. Die Kunden wurden befragt, welchen der beiden Hartschalenkoffer H1 bzw. H2 sie bevorzugen und ob sie mit den verwendeten Materialien im Hinblick auf Nachhaltigkeit zufrieden sind.

Es gelten die folgenden Bezeichnungen:

A: Der Kunde bevorzugt das Modell H1.

$\overline{A}$: Der Kunde bevorzugt das Modell H2.

B: Der Kunde ist zufrieden mit den verwendeten Materialien.

$\overline{B}$: Der Kunde ist nicht zufrieden mit den verwendeten Materialien.

1.2.1 Ergänzen Sie die Vierfeldertafel in **Anlage 1**.

(3 Punkte)

1.2.2 Interpretieren Sie die folgende Wahrscheinlichkeit im Sachzusammenhang:

$$P_A(\overline{B})$$

(2 Punkte)

1.3 Pflichtaufgabe Lineare Algebra/Analytische Geometrie

Die Hartschalenkoffer werden in zwei Produktionsschritten gefertigt. Zunächst werden aus zwei Granulaten G_1 und G_2 die beiden Zwischenteile Z_1 und Z_2 gegossen. Die zwei Zwischenteile werden dann zu den beiden Hartschalenkoffern H_1 und H_2 zusammengesetzt.

Die Matrix A_{GZ} gibt die Menge in ME des benötigten Granulats für je 1 ME von Z_1 und Z_2 und die Matrix B_{ZH} die Menge in ME der benötigten Zwischenprodukte für je 1 ME von H_1 und H_2 an:

$$A_{GZ} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_{ZH} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.3.1 Berechnen Sie die Mengen der Granulate G_1 und G_2, die jeweils zur Herstellung einer ME von H_1 und H_2 benötigt werden.

(3 Punkte)

1.3.2 Berechnen Sie die Mengen der Zwischenprodukte Z_1 und Z_2, die jeweils zur Herstellung von 5 ME H_1 und 3 ME H_2 benötigt werden.

(2 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2025 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Wahlaufgaben

Zwei aus den folgenden vier Teilaufgaben sind zu bearbeiten, davon mindestens eine aus dem Teilgebiet Analysis.

1.4 Wahlaufgabe Analysis

Die Absatzentwicklung des Koffermodells Starbag wird durch die folgende Funktion beschrieben:

$$a(t) = (3 \cdot t + 6) \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}$$

Dabei steht $t \geq 0$ für die Monate seit Markteinführung und $a(t)$ für den Absatz in ME pro Monat.

1.4.1 Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem der maximale Absatz von Starbag erreicht wird.
Hinweis: Auf den Nachweis des hinreichenden Kriteriums kann verzichtet werden.

(5 Punkte)

1.5 Wahlaufgabe Analysis

Der TravelBags GmbH liegt für das Koffermodell TSchibu die Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 12 \cdot x^2 + 60 \cdot x + 98$ vor.

Folgende Angaben sind bekannt:

(1) $k_v'(6) = 0$

(2) $K''(4) = 0$ und $K'(4) = 12$

1.5.1 Interpretieren Sie die Gleichungen (1) und (2) im Hinblick auf ihre ökonomische Bedeutung.

(3 Punkte)

1.5.2 Berechnen Sie $\int_0^2 K'(x)\,dx$.

(2 Punkte)

1.6 Wahlaufgabe Stochastik

Die TravelBags GmbH überprüft regelmäßig die Qualität des Koffermodells Starbag. Hierzu wird eine Stichprobe aus der laufenden Produktion entnommen.

Es ergibt sich daraus die folgende Bernoulli-Formel:

$$P(X = k) = \binom{n}{10} \cdot p^k \cdot 0{,}87^{90}$$

1.6.1 Geben Sie die fehlenden Werte k, n und p an.

(3 Punkte)

1.6.2 Formulieren Sie eine Aufgabenstellung im Sachzusammenhang, für die diese Gleichung ein Lösungsansatz ist.

(2 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2025 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

1.7 Wahlaufgabe Lineare Algebra/Analytische Geometrie

Zur Lösung eines Gleichungssystems wurde folgende erweiterte Koeffizientenmatrix aufgestellt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 11 & 8 & 23 \\ 5 & 16 & 11 & 36 \end{array}\right)$$

1.7.1 Leiten Sie mithilfe eines geeigneten Kriteriums die Anzahl der Lösungen her.

(5 Punkte)

Anlage 1 zu Aufgabe 1.2.1

	A	$\overline{A}$	Σ
B		0,3	
$\overline{B}$			0,3
Σ	0,6		

Zentrale Abiturprüfung 2025 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil B: Hilfsmittel CAS

Aufgabenstellung

Die TravelBags GmbH stellt als Start-Up-Unternehmen neben klassischen Trolleys, Rucksäcken und Hartschalenkoffern auch Modelle mit eingebauten Powerbanks und GPS-Geräten her.

In allen Aufgaben gilt: ME $\triangleq$ Mengeneinheiten und GE $\triangleq$ Geldeinheiten.

Aufgabe 2 – Analysis (25 Punkte)

Die Geschäftsführung beauftragt die verschiedenen Abteilungsleiter für eine anstehende Gesellschafterversammlung die Daten der Absatz-, Kosten- und Gewinnsituation aufzubereiten und zu analysieren.

2.1 Der Absatz des Koffers mit integrierter Powerbank lässt sich gemäß der Funktion

$$a(t) = (1{,}1 \cdot t^3 + 15 \cdot t + 4) \cdot e^{-0{,}5t} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \wedge t \geq 0$$

modellieren.

Hierbei steht t für die Zeit in Jahren nach Markteinführung und $a(t)$ für die Absatzzahlen in ME pro Jahr.

2.1.1 Ermitteln Sie den Gesamtabsatz für die ersten zwei Jahre nach Markteinführung.

(2 Punkte)

2.1.2 Zeigen Sie unter Verwendung von Ableitungsregeln, dass $a'(t) = (-0{,}55 \cdot t^3 + 3{,}3 \cdot t^2 - 7{,}5 \cdot t + 13) \cdot e^{-0{,}5t}$ gilt.

(3 Punkte)

2.1.3 Berechnen Sie den Zeitpunkt und die Höhe des maximalen Absatzes.

(4 Punkte)

2.2 Die Unternehmensleitung geht davon aus, dass sich die Gewinnsituation für den Koffer mit GPS-Geräten durch die nachfolgende Funktion darstellen lässt: $G(x) = -0{,}5 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 100$

Dabei gibt x die Menge in ME und G(x) den Gewinn in GE an.

2.2.1 Weisen Sie nach, dass sich das Unternehmen beim Verkauf von 9 ME in der Gewinnzone befindet, aber das Gewinnmaximum noch nicht erreicht hat.

(4 Punkte)

2.2.2 Berechnen Sie die Wendestelle der Gewinnfunktion und interpretieren Sie diese aus ökonomischer Sicht.

(4 Punkte)

Zentrale Abiturprüfung 2025 Grundkursfach Mathematik Lösungen

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

1.1 Pflichtaufgabe Analysis

1.1.1 **Beurteilen Sie, ob die Aussagen A, B, C zutreffen oder nicht.**

A: Die Aussage stimmt. Der Tiefpunkt des Graphen der Grenzkostenfunktion befindet sich an der Stelle $x \approx 2{,}8$, daraus folgt, dass der Verlauf der Kostenfunktion zuerst degressiv und danach progressiv ist.

B: Die Aussage ist falsch. Die variablen Stückkosten und die Grenzkosten sind für ca. 4 ME gleich hoch, nicht aber die Stückkosten und die Grenzkosten.

C: Die Aussage stimmt. $K(2) = k(2) \cdot 2 = 30 \cdot 2 = 60$, damit betragen die Gesamtkosten bei 2 ME 60 GE.

1.2 Pflichtaufgabe Stochastik

1.2.1 **Ergänzen Sie die Vierfeldertafel in Anlage 1.**

	A	$\overline{A}$	Σ
B	0,4	0,3	0,7
$\overline{B}$	0,2	0,1	0,3
Σ	0,6	0,4	1

Hinweis: Aus der Summe = 1 ergeben sich sukzessive alle Werte.

1.2.2 **Interpretieren Sie $P_A(\overline{B})$ im Sachzusammenhang.**

$P_A(\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)}$

Es handelt sich um die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde mit den verwendeten Materialien nicht zufrieden ist, wenn er das Modell H1 bevorzugt.

1.3 Pflichtaufgabe Lineare Algebra

1.3.1 **Berechnen Sie die Mengen der Granulate G_1 und G_2, die ...**

Es gilt: $A_{GZ} \cdot B_{ZH} = C_{GH}$ $\quad \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 40 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$

Zur Herstellung einer ME H_1 werden 20 ME G_1 und 8 ME G_2 benötigt, zur Herstellung einer ME H_2 werden 40 ME G_1 und 16 ME G_2 benötigt.

1.3.2 **Berechnen Sie die Mengen der Zwischenprodukte Z_1 und Z_2, die ...**

$B_{ZH} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 11 \end{pmatrix}$

Zur Herstellung von 5 ME H_1 und 3 ME H_2 werden 33 ME von Z_1 sowie 11 ME von Z_2 benötigt.

Zentrale Abiturprüfung 2025 Grundkursfach Mathematik Lösungen

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel (oHiMi)

1.4 Wahlaufgabe Analysis

1.4.1 Zeitpunkt des maximalen Absatzes

Ableitung von a mit $a(t) = (3 \cdot t + 6) \cdot e^{-0,2 \cdot t}$ bilden mit Produkt- und Kettenregel:

$a'(t) = 3 \cdot e^{-0,2 \cdot t} + (3 \cdot t + 6) \cdot e^{-0,2 \cdot t} \cdot (-0,2) = (-0,6t + 1,8) \cdot e^{-0,2 \cdot t}$

Notwendige Bedingung: $a'(t) = 0$

Da $e^{-0,2 \cdot t} > 0$, gilt: $a'(t) = 0 \Leftrightarrow -0,6t + 1,8 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ (Satz vom Nullprodukt)

Zum Zeitpunkt t = 3, also nach 3 Monaten, wird der maximale Absatz erreicht.

1.5 Wahlaufgabe Analysis

1.5.1 Interpretieren Sie die Gleichungen (1) und (2).

(1) Die variablen Stückkosten sind für 6 ME minimal.

(2) Das Kostenwachstum wechselt bei 4 ME von einem degressiven zu einem progressiven Verlauf und die Grenzkosten betragen für diese Menge 12 GE/ME.

1.5.2 Berechnen Sie das Integral.

$\int_0^2 K'(x)\,dx = K(2) - K(0) = 178 - 98 = 80$ (K ist die Stammfunktion von K')

1.6 Wahlaufgabe Stochastik

1.6.1 Geben Sie die fehlenden Werte an.

Es ergeben sich folgende Werte: k = 10, n = 100 , p = 0,13;

Hinweis: $p = 1 - 0,87$; $\binom{n}{k} = \binom{100}{10}$; $P(X = 10) = \binom{100}{10} \cdot 0,13^{10} \cdot 0,87^{90}$

1.6.2 Formulieren Sie eine Aufgabenstellung im Sachzusammenhang, für …

Die TravelBags GmbH untersucht eine Stichprobe von 100 Koffern des Modells Starbag, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 13 % einen Defekt aufweisen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in der Stichprobe 10 defekte Koffer des Modells Starbag befinden.

1.7 Wahlaufgabe Lineare Algebra

1.7.1 Leiten Sie die Anzahl der Lösungen her.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 11 & 8 & 23 \\ 5 & 16 & 11 & 36 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Der Rang der Koeffizientenmatrix (= 2) entspricht dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix (= 2) und ist nicht voll (= 3). Damit ergeben sich unendlich viele Lösungen.

Zentrale Abiturprüfung 2025 Grundkursfach Mathematik Lösungen

Aufgabenteil B: Hilfsmittel CAS

Aufgabe 2 - Analysis

2.1.1 **Ermitteln Sie den Gesamtabsatz für die ersten zwei Jahre nach Markteinführung.**

$$\int_0^2 a(t)dt \approx 22{,}92$$

Der Gesamtabsatz in den ersten zwei Jahren seit Markteinführung beträgt ca. 22,92 ME.

2.1.2 Zeigen Sie unter Verwendung von Ableitungsregeln, dass $a'(t)$ gilt.

$a(t) = (1{,}1 \cdot t^3 + 15 \cdot t + 4) \cdot e^{-0{,}5t}$

Ableitung mit Produkt- und Kettenregel:

$a'(t) = (3{,}3 \cdot t^2 + 15) \cdot e^{-0{,}5t} + (1{,}1 \cdot t^3 + 15 \cdot t + 4) \cdot (-0{,}5)\, e^{-0{,}5t}$

$a'(t) = (-0{,}55 \cdot t^3 + 3{,}3 \cdot t^2 - 7{,}5 \cdot t + 13) \cdot e^{-0{,}5t}$ gilt.

2.1.3 **Berechnen Sie den Zeitpunkt und die Höhe des maximalen Absatzes.**

notwendige Bedingung:

$a'(t) = 0 \Rightarrow t \approx 4{,}08$

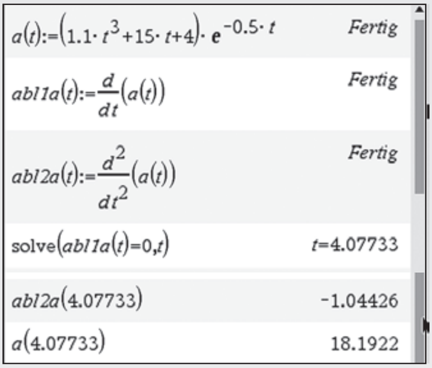
hinreichende Bedingung: $a'(t) = 0 \wedge a''(t) < 0$

$a''(4{,}08) \approx -1{,}04 < 0$ lokales Maximum

Berechnung des maximalen Absatzes:

$a(4{,}08) \approx 18{,}1922$

Der maximale Absatz wird Anfang des 5. Jahres erreicht und besitzt eine Höhe von ca. 18,19 ME.



2.2.1 **Das Unternehmen befindet sich beim Verkauf von 9 ME in der Gewinnzone, aber das Gewinnmaximum ist noch nicht erreicht.**

Gewinnfunktion: $G(x) = -0{,}5 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 100$

$G(9) \approx 291{,}5 > 0$

Überprüfung, ob das Gewinnmaximum bei x = 9 erreicht ist:

z. B. $G(10) \approx 320 > G(9)$ oder $G_{max} = G(11{,}37) \approx 335{,}7$

Das Unternehmen befindet sich bei einer Ausbringungsmenge von 9 ME in der Gewinnzone, hat die gewinnmaximale Menge jedoch noch nicht erreicht.