Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner
Lehrauftrag Mathematik am BS Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch
Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Günther Thun
Studiendirektor in Oldenburg
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner
Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall
Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

* * * * * * * * * * *

1. Auflage 2017

Gesamtherstellung:

Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 2386-01-DS

Bildquellen: Umschlag: Hintergrundbild: Kirill Kedrinski – fotolia.com, Rahmen links: Mike Kiev – Fotolia.com, Rahmen Mitte: Andres Rodriguez – Fotolia.com

Einleitung

Das Arbeitsheft dient zur Aufbereitung, Wiederholung und Festigung des im Schülerbuch behandelten Lernstoffs. Es soll parallel zum Schülerbuch verwendet werden.
Die begleitende Unterstützung durch die Lehrkraft ist gewünscht und sehr sinnvoll.

Das Arbeitsheft enthält ergänzende Aufgaben zur Wiederholung und ermöglicht eine Lernkontrolle in Eigenverantwortung. Das im Vergleich zum Schülerbuch veränderte Format und die Form der Darstellung wirken motivierend auf Schüler/innen.
Einige Aufgaben beinhalten fächerübergreifende Aspekte in Handlungssituationen.
Das Arbeitsheft hilft, das Erlernte zu festigen und damit eine gute Grundlage für die schriftliche Prüfung zu schaffen.

4 Berechnen Sie ohne Hilfsmittel.

$1-\frac{1}{7}$	$=\frac{7}{7}-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$	$-2\cdot(-\frac{2}{9})\cdot(-\frac{2}{5})$	$=\frac{4}{9}\cdot(-\frac{2}{5})=-\frac{8}{45}$
$-\frac{2}{5}+\frac{6}{5}$	=	$\frac{1}{9}\cdot(-7)$	=
$-\frac{24}{5}-5$	=	$-\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}$	=
$\frac{2}{9}-1-\frac{5}{9}$	=	$-\frac{5+3}{4}\cdot(-4)$	=
$-\frac{(5+3)}{6}-\frac{4}{6}$	=	$\frac{9}{2}\cdot(-\frac{4}{9})$	=
$\frac{9-2}{-7}$	=	$(\frac{2}{3})^2-\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}$	=
$\frac{3}{2}-\frac{4}{5}-\frac{6}{4}-\frac{4}{5}$	=	$5-\frac{7}{3}-\frac{1+3}{6}$	=
$-\frac{5+7}{12}+\frac{5-7}{12}$	=	$-\frac{1}{a}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{a}$	=

5 Formulieren Sie einen Term für den Text.

Summe aus dem fünffachen einer Zahl und 13	
Subtrahiere von 46 das Doppelte einer Zahl	
Gesamtkosten aus: Fixkosten 20 €, Kosten pro Stück 0,75 €	

6 Wenden Sie eine binomische Formel an.

$(x+1)^2$	$=x^2+2x+1$	$x^2-12x+36$	$=(x-6)^2$
$x^2+8x+16$	=	$(t-5)^2$	=
$(x-3)^2$	=	$(x-a)^2$	=
$4(x-6y)(x+6y)$	=	$(2x-1)^2$	=
$x^2-x+\frac{1}{4}$	=	$x^2+20x+100$	=

7 Ergänzen Sie den Term.

$(x+\_\_)^2=x^2+\_\_\cdot 5x$ ______	$(x+5)^2=x^2+2\cdot 5x+25$
$\frac{5}{4}a-\frac{3}{4}b=\frac{1}{4}\cdot($______$)$	$49-14a+a^2=($______$)\cdot($______$)$
$(x-\ )^2=x^2-4x$ ______	$x^2+7x+10=(x$ ___$)(x$ ___ $)$
$(x-$ __ $y)(x+$ __ $y)=x^2$ __ $4y^2$	$2x^2-\ldots x=x($___ $-5)$

4 Der Kostenvoranschlag für die Instandsetzung eines Lackschadens bei einem Pkw lautet auf 1235,30 €. Um wie viel Prozent wird dieser Betrag überschritten, wenn die endgültige Rechnung aufgrund zusätzlicher Arbeiten auf 1 340,30 € lautet?

Lösungsschema:

Kostenvoranschlag

+ Erhöhung

= Rechnungsbetrag

Der Betrag wurde um überschritten.

5 Katja gibt Nachhilfeunterricht in Englisch für 12,00 € je Stunde. Thorsten gibt Mathe und Physik und bekommt dafür 15,60 € je Stunde.

a) Wie viel Prozent bekommt Thorsten mehr als Katja?

Grundwert: Prozentwert: p % =

b) Wie viel Prozent bekommt Katja weniger als Thorsten?

Grundwert: Prozentwert: p % =

6 Berechnen Sie den neuen Grundwert.

Grundwert	Zuschlag (+) Abschlag (−)	Prozentfaktor	Zuschlag Abschlag	Prozentfaktor	Neuer Grundwert
200 €	+ 30 %	· 1,3	− 25 %	· 0,75	200€ ·1,3 · 0,75 = 195 €
1300 kg	+ 15 %		+ 22 %		
2350 €	− 12,5 %		+ 3 %		
240 ME	− 15 %		− 25 %		
25400 m	+ 6,5 %		+ 0,8 %		

7 Berechnen Sie die fehlenden Werte.

Grundwert	Zuschlag(+)/Abschlag (−)	Faktor	Neuer Grundwert
500,00 €	+ 35 %	$\frac{675}{500} = 1{,}35$	**675,00 €**
1230 kg	+ 2,5 %		
		1,15	1495,65 €
	− 2,5 %		1677,00 €
36520 km			39149,44 km
42,5 kg			36,125 kg

8 Auf den Einkaufspreis einer Ware werden zunächst die Handlungskosten und auf den erhaltenen Preis der Gewinn zugeschlagen. Das Ergebnis ist der Verkaufspreis. Berechnen Sie den Einkaufspreis bzw. den Verkaufspreis.

Einkaufs-preis	Handlungs-kosten	Prozent-faktor	Gewinn	Prozent-faktor	Verkaufspreis in €
500,00 €	50,0 %	· 1,5	25,0 %	· 1,25	500 · 1,5· 1,25 = 937,50
230,00 €	48 %		12,5 %		
1370,00 €	72,4 %		8,5 %		
	95,0 %		22,5 %		2 388,75
	64,3 %		36,25 %		5 362,80

9 Der Jahresgewinn einer Kommanditgesellschaft in Höhe von 162 600 € ist wie folgt zu verteilen: Die Einlagen der Gesellschafter Albers (Vollhafter), Behrends und Herbst (beide Teilhafter) werden zunächst mit 6 % verzinst. Vollhafter Albers erhält dann eine monatliche Vergütung für die Geschäftsführung in Höhe von je 5 000 €.
Der Rest wird im Verhältnis 3 : 2 : 1 verteilt. Stellen Sie die Gewinnverteilung in der folgenden Tabelle dar unter Berücksichtigung der folgenden Gesellschafter-Einlagen: Albers 100 000 €, Behrends 80 000 € und Herbst 30 000 €.

Beteiligte	Einlagen	Verzinsung (€)	Vergütung (€)	Vert.-Verh.	Restgewinn (€)	Gesamtgewinn-anteil (€)
Albers						
Behrends						
Herbst						
Summe						

10 Das zu versteuernde Einkommen eines Angestellten ist im letzten Jahr von 72 000 € auf 78 000 € gestiegen. Seine zu zahlende Einkommensteuer erhöhte sich dadurch von 21 845 € auf 24 365 €.

a) Um wie viel Prozent nahm sein Einkommen zu?

Letztjähriges Einkommen
+ Zunahme
diesjähriges Einkommen

b) Mit wie viel Prozent wurde der Einkommenszuwachs besteuert?

Letztjährige Einkommensteuer (ESt)
+ Zunahme
diesjährige ESt

1.6 Kalkulation

1 Führen Sie die Berechnung des Barverkaufspreises durch.

	a) %	€	b) %	€	c) %	€
Listeneinkaufspreis		**250,00 €**		85,00 €		1450,00 €
− Liefererrabatt	12,5%	31,25 €	25,0%		10,0%	
=		218,75 €				
− Liefererskonto	3,0%	6,56 €	2,0%		1,5%	
=		212,19 €				
+ Bezugskosten		**7,81 €**		7,53 €		34,58 €
=		220,00 €				
+ Handlungskosten	75,0%	165,00 €	92,0%		112,0%	
=		385,00 €				
+ Gewinn	8,0%	30,80 €	13,0%		5,5%	
= Barverkaufspreis		415,80 €				

2 Führen Sie die Verkaufskalkulation durch.

	a) %	€	b) %	€	c) %	€
Barverkaufspreis		169,20 €		57,33 €		3052,14 €
+ Vertreterprovision	8,0%	15,04 €	6,0%		7,5%	
+ Kundenskonto	2,0%	3,76 €	3,0%		1,5%	
= Zielverkaufspreis		188,00 €				
+ Kundenrabatt	20,0%	47,00 €	12,5%		14,0%	
= Listenverkaufspreis		235,00 €				

3 Berechnen Sie die gesuchte Größe.

a) Verkaufspreis 678,90 € Kalkulationszuschlag 86 % Bezugspreis ?	x =
b) Bezugspreis 275,00 € Kalkulationsfaktor 1,826 Verkaufspreis ?	x =
c) Bezugspreis 445,00 € Verkaufspreis 823,25 € Kalkulationszuschlagsatz ? Handelsspanne?	Kazu = Hsp =

9 Berechnen Sie die Stelle, in der sich die Graphen von f und g schneiden.

$f(x) = x;\ g(x) = 1 - x$	$f(x) = 2x - 3;\ g(x) = 3x$	$f(x) = -\frac{1}{2}(x + 5);\ g(x) = \frac{1}{2}x$
$f(x) = g(x)$ $x = 1 - x \quad \vert + x$ $2x = 1 \quad \vert : 2$ $x = 0{,}5$ Schnittstelle		

$f(x) = 17x - 8;\ g(x) = x + 3$	$f(x) = 1;\ g(x) = \frac{7}{2}x - 8$	$f(x) = 2(\frac{16}{3} - 3x);\ g(x) = -5x$

10 Ein Monopolist arbeitet mit der Preisabsatzfunktion p mit $p(x) = 24 - 0{,}5x$. Berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. Welche ökonomische Bedeutung haben diese Punkte?

Schnittpunkt mit der x-Achse: ______________________________

Schnittpunkt mit der y-Achse: ______________________________

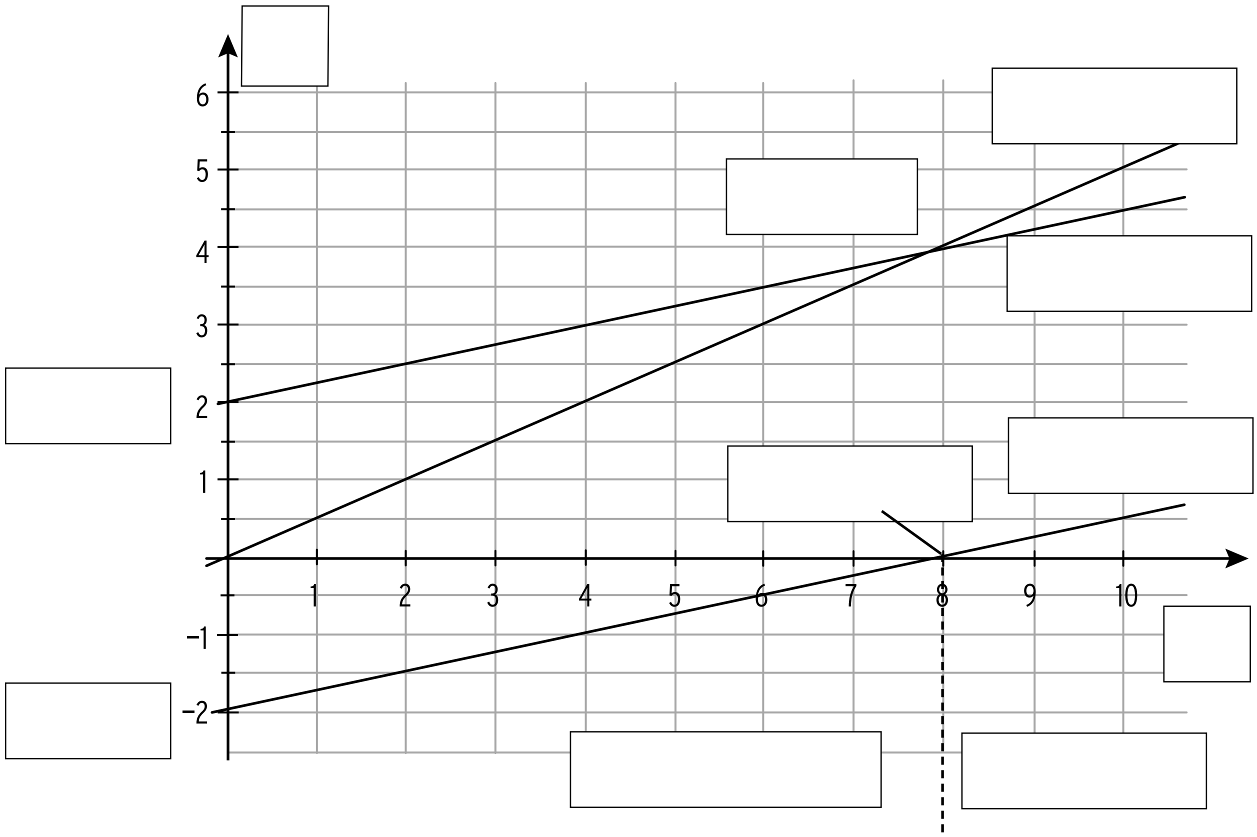
Ökonomische Bedeutung: ______________________________

11 Gegeben ist die Nachfragefunktion p_N mit $p_N(x) = 5 - 0{,}25x$ und die Angebotsfunktion p_A mit $p_A(x) = 0{,}4x + 1{,}1$.

a) Bestimmen Sie das Marktgleichgewicht.

b) Erklären Sie die Marktsituation, wenn 5 ME am Markt angeboten werden.

12 Beschriften Sie die Abbildung zum Thema Kostentheorie.



13 Füllen Sie den Lückentext aus.

Die Gesamtkostenfunktion K ist eine lineare Funktion, die zugehörige Kostengerade ist _______________ .

Die Gesamtkosten setzen sich zusammen aus den ____________________ und den _______________ Kosten. Für den Term K(x) gilt: _____________________________

Der Schnittpunkt der Kostengeraden mit der y-Achse gibt die __________________ ________________ an.

Die Erlösfunktion E ist eine lineare Funktion, der zugehörige Graph ist eine _______________ _____________ .

Die Schnittstelle der beiden Geraden gibt die ____________________ an.

Die Gewinnfunktion lässt sich wie folgt berechnen: G(x) = _______________ .

Die Nullstelle der Gewinnfunktion entspricht der _______________ .

Verläuft die Gewinnkurve unterhalb der x-Achse, wird _______________ erzielt.

8 Die Kostenfunktion eines Produktes lautet $K(x) = x^3 - 12x^2 + 96x + 216$. Die Kapazitätsgrenze liegt bei 10 ME, die derzeitige Produktion bei 6ME.

a) Ermitteln Sie die Grenzkosten, die Stückkosten und die variablen Stückkosten an der Kapazitätsgrenze. Geben Sie jeweils auch die Funktionsgleichungen an.

$K'(x) =$ ______________________

$k(x) =$ ______________________

$k_v(x) =$ ______________________

b) Berechnen Sie das Grenzkostenminimum. Interpretieren Sie den Wert.

Bed.:

c) Ermitteln Sie das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze. Interpretieren Sie die Werte.

Bed.:

9 Die untenstehende Wertetabelle gehört zu einer ganzrationalen Funktion g.

x	− 2	− 1	0	1	2	3	4
g(x)	− 4	0	− 2	− 4	0	16	50
g′(x)	9	0	− 3	0	9	24	45
g″(x)	− 12	− 6	0	3	6	18	24

Das zugehörige Schaubild besitzt ...

die gemeinsamen Punkte mit der x-Achse:

den Schnittpunkt mit der y-Achse:

den Hochpunkt:

den Tiefpunkt:

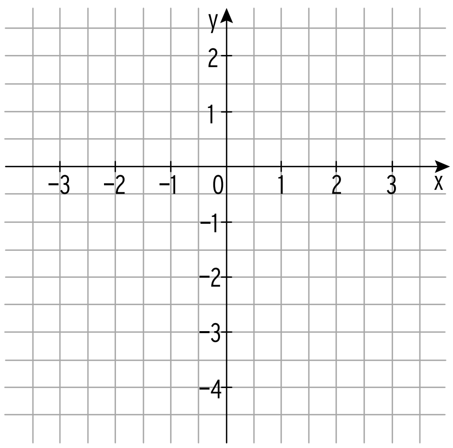
den Wendepunkt:

Die Funktion muss mindestens den Grad ______

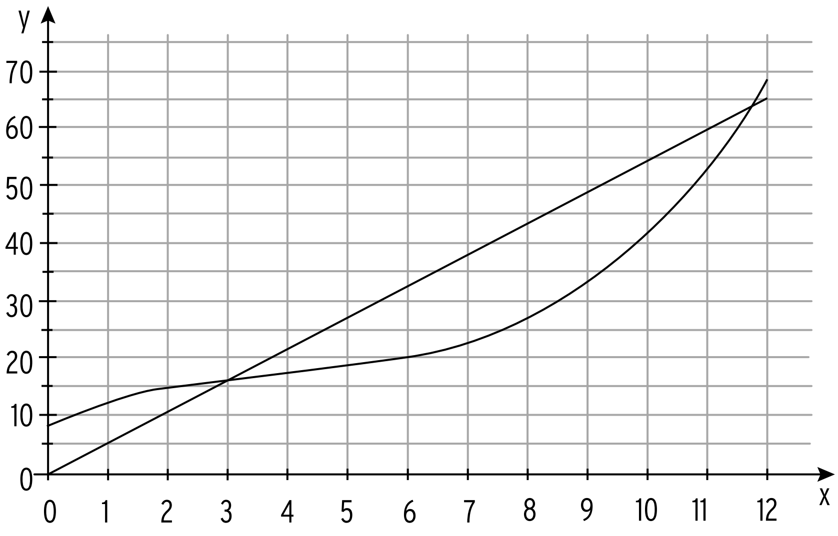
haben, da ______________________________

______________ .

Skizze des zugehörigen Schaubilds:



10 Die Abbildung zeigt den Graph einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion und einer Erlösfunktion.



Beschreiben Sie den Verlauf der beiden Graphen, indem Sie den Lückentext mit folgenden Begriffen sinnvoll ergänzen:

steigen, steigend, monoton, degressiv, progressiv, Wendepunkt, linksgekrümmt, Rechtskrümmung, zu, geringer, geringsten, maximal, Fixkosten, Gewinnzone, Kapazitätsgrenze, ökonomisch sinnvollen, Gewinnschwelle, größten, 3, 8

Der Graph der Gesamtkostenfunktion K mit $K(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 5x + 8$ verläuft im

________________ Definitionsbereich $D_{ök} = [0; 12]$ ________________,

d.h. mit zunehmender Produktionsmenge ____________ die Gesamtkosten.

12 ist die ________________. Der Graph beginnt in (0 | 8). Dies entspricht den

__________ in Höhe von ___ GE. Bis zu einer Produktionsmenge von 4 ME steigt

der Graph __________ an. Es liegt eine __________ vor, d.h. die Gesamtkosten

nehmen ___, aber diese Zunahme wird ____________. Bei einer Produktion von

genau 4 ME steigen die Gesamtkosten am _________, hier liegt ein __________

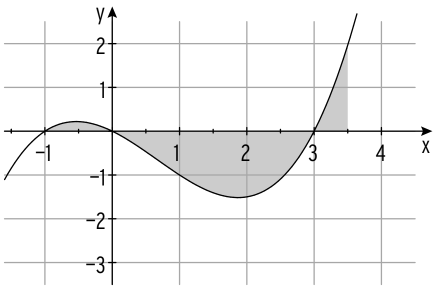
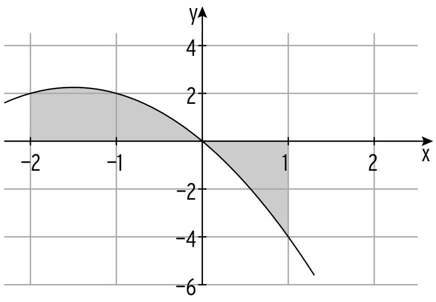
vor. Danach verlaufen die Gesamtkosten __________ steigend, die Gesamtkostenkurve ist __________.

Die Schnittstelle von Kostenkurve und Erlösgerade liegt bei ____ ME und wird als

____________ bezeichnet. Bei etwa 8 ME ist der Abstand der y-Werte von K und E

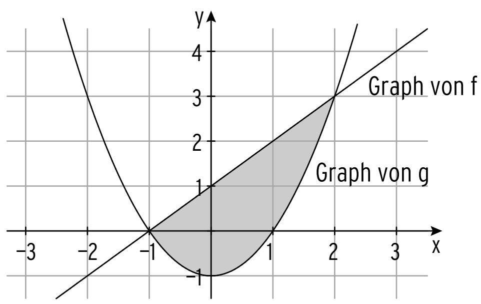
am __________, der Gewinn wird hier ____________.

4 Füllen Sie die Tabelle aus.

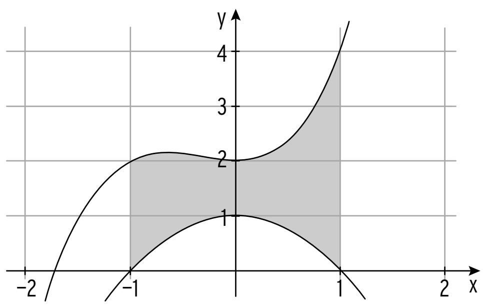
Graph von f	Das größere Flächenstück liegt .... der x-Achse	Integralwert	Inhalt der markierten Fläche
	☐ unterhalb ☐ oberhalb	$\int_{-1}^{3,5} f(x)dx$ ☐ 0 ☐ − 2,21	☐ 2,96 ☐ 2
	☐ unterhalb ☐ oberhalb	$\int_{-2}^{1} f(x)dx$ ☐ $\frac{3}{2}$ ☐ 1	☐ 3,5 ☐ $\frac{31}{6}$

5 Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

K_f: $f(x) = x + 1$; K_g: $g(x) = x^2 - 1$



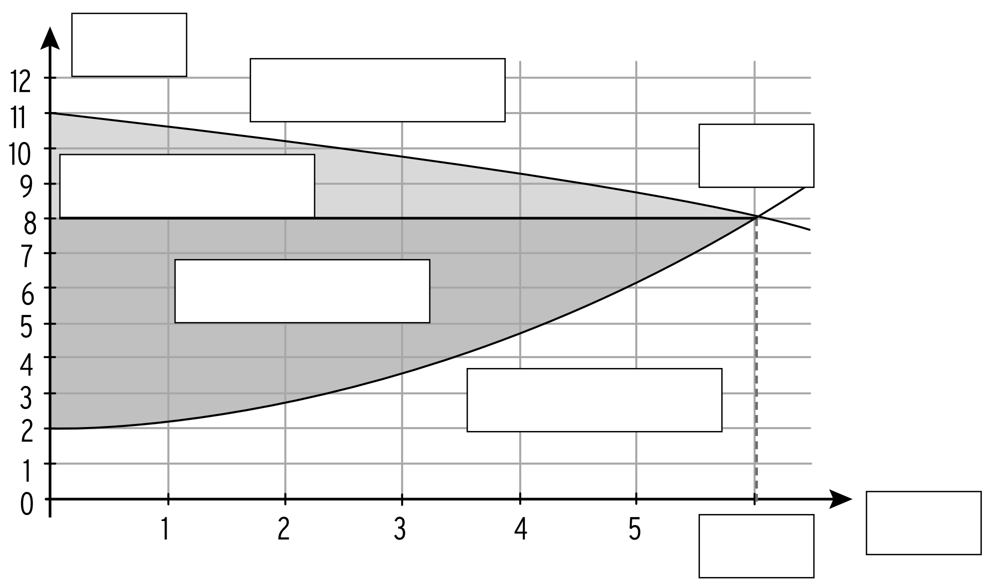
K_f: $f(x) = x^3 + x^2 + 2$; K_g: $g(x) = -x^2 + 1$



6 Die Graphen von f und g begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche.

$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - x^2 + 2x$ $g(x) = 2x$	Schnittstellen: $f(x) = g(x)$ $\quad \frac{1}{8}x^3 - x^2 + 2x = 2x$ Nullform: $\quad \frac{1}{8}x^3 - x^2 = 0$ Ausklammern: $\quad x^2(\frac{1}{8}x - 1) = 0$ Schnittstellen: $\quad x_{1\|2} = 0;\ x_3 = 8$ Integration über $f(x) - g(x) = \frac{1}{8}x^3 - x^2$: $\int_0^8 (\frac{1}{8}x^3 - x^2)\,dx$ $= \left[\frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^8 = -\frac{128}{3}$; $A = \frac{128}{3}$
$f(x) = -x^2(x - 4)$ $g(x) = 4x$	
$f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 4)$ $g(x) = (x - 2)^2$	

7 Beschriften Sie die Abbildung zum Thema Angebot und Nachfrage.



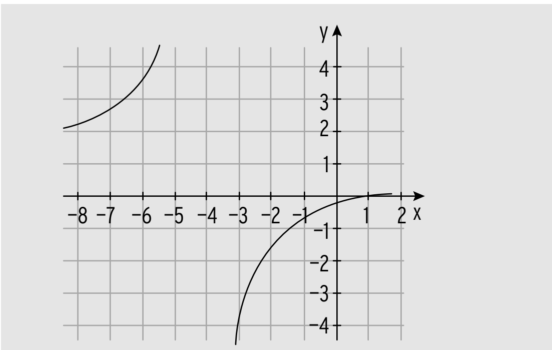
2 Gebrochen-rationale Funktionen

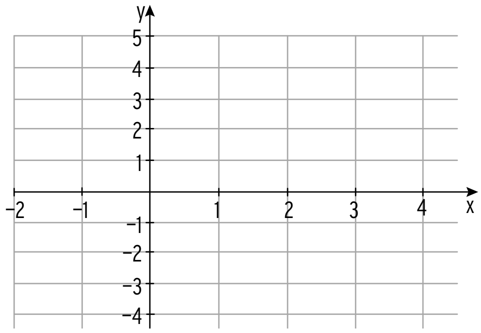
2.1 Schaubilder und Gleichungen

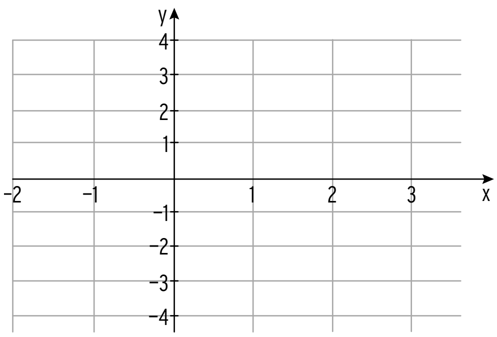
1 Füllen Sie die Tabelle aus. Skizzieren Sie den Graph der Funktion samt Asymptoten.

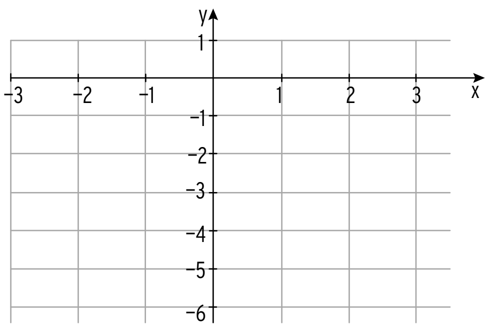
	Definitionslücke x_0	D_{max}	Senkrechte Asymptote	waagrechte Asymptote	Schnittpunkt mit x-Achse y-Achse
a) $f(x) = \frac{x-1}{x+4}$	$x_0 = -4$	$\mathbb{R} \setminus \{-4\}$	$x = -4$	$y = 1$	$N(1 \mid 0)$; $S_y(0 \mid -\frac{1}{4})$
b) $f(x) = \frac{5}{2x-4}$					
c) $f(x) = \frac{5x-2}{1-3x}$					
d) $f(x) = \frac{-5}{(x+1)^2}$					
e) $f(x) = \frac{2}{x^2} - 1$					
f) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$					

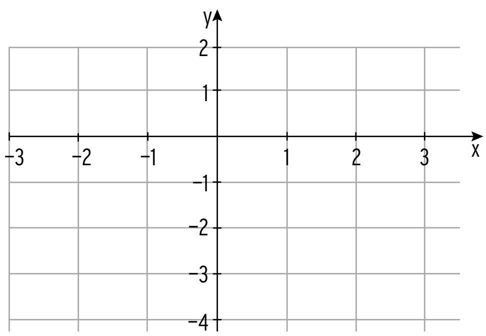
Abbildungen zu a) bis f)

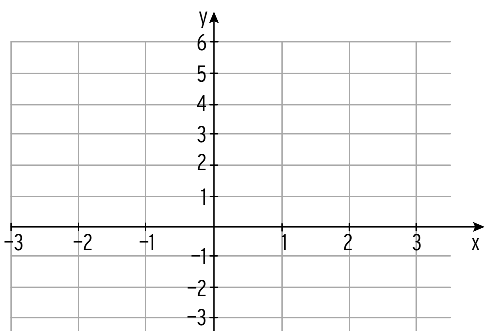
a)


b)


c)


d)


e)


f)


3.2 Lineare Gleichungssysteme

Umformung und Lösung eines linearen Gleichungssystems

1 Lösen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem für x_1, x_2, x_3.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 13 \\ 4 & 3 & 2 & -9 \\ -3 & -4 & -3 & 6 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 13 \\ 4 & 3 & 2 & -9 \\ -3 & -4 & -3 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot 3 \\ \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -8 & -35 \\ 0 & -5 & 9 & 51 \end{array}\right) \cdot 5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -8 & -35 \\ 0 & 0 & -31 & -124 \end{array}\right)$$

$-31x_3 = -124 \Rightarrow x_3 = 4$

Einsetzen in $x_2 - 8x_3 = -35$ ergibt:

$x_2 - 32 = -35 \Rightarrow x_2 = -3$

Einsetzen in $2x_1 + x_2 + 5x_3 = 13$ ergibt:

$2x_1 - 3 + 5 \cdot 4 = 13 \Rightarrow x_1 = -2$

Lösung: $(-2; -3; 4)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 5 \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 & -5 \end{array}\right)$

3 Ein Betrieb fertigt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zunächst die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1, E_2 und E_3. Die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix und die Rohstoff-Endprodukt-Matrix sind gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Kosten in Geldeinheiten (GE) pro ME für die Rohstoffe, die Kosten für die Fertigung der Zwischenprodukte und die Kosten für die Produktion der Endprodukte sind durch folgende Vektoren gegeben:

$$\vec{k}_R = (1 \;\; 2{,}5 \;\; 4)$$
$$\vec{k}_Z = (10 \;\; 10 \;\; 12)$$
$$\vec{k}_E = (50 \;\; 80 \;\; 100).$$

a) Berechnen Sie die variablen Herstellkosten je ME Endprodukt.

Dabei gilt: $\vec{k}_v = \vec{k}_R \cdot C + \vec{k}_Z \cdot B + \vec{k}_E$

Einsetzen ergibt: $\vec{k}_v = (1 \;\; 2{,}5 \;\; 4) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} + (10 \;\; 10 \;\; 12) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + (50 \;\; 80 \;\; 100)$

$\vec{k}_v = (36 \;\; 30 \;\; 28{,}5) + (20 \;\; 52 \;\; 56) + (50 \;\; 80 \;\; 100)$

$\vec{k}_v = (106 \;\; 162 \;\; 184{,}5)$

b) Für einen Auftrag über 20 ME von E1, 10 ME von E2 und 30 ME von E3 betragen die Fixkosten 1200 GE. Berechnen Sie die Gesamtkosten für diesen Auftrag.

$K = \vec{k}_v \cdot \vec{x} + K_{fix} = (106 \;\; 162 \;\; 184{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} + 1200 = 10475$

c) Die Verkaufspreise je ME betragen für E_1 130 GE, für E_2 175 GE und für E_3 210 GE. Berechnen Sie den Gewinn für diesen Auftrag.

Erlös $E = (130 \;\; 175 \;\; 210) \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} = 10650$

Gewinn = Erlös – Kosten = 10650 – 10475 = 175

Der Gewinn für diesen Auftrag beträgt 175 GE.

4 Ein Betrieb fertigt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zunächst die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1, E_2 und E_3. Die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B sind gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Kosten in Geldeinheiten (GE) pro ME für die Rohstoffe, die Kosten für die Fertigung der Zwischenprodukte und die Kosten für die Produktion der Endprodukte sind durch folgende Vektoren gegeben: $\vec{k}_R = (3 \;\; 4 \;\; 6)$;

$$\vec{k}_Z = (14 \;\; 16 \;\; 15);$$

$$\vec{k}_E = (65 \;\; 80 \;\; 75).$$

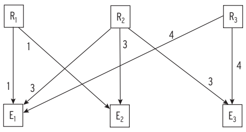
a) Berechnen Sie die variablen Herstellkosten je ME Endprodukt.

Dabei gilt: $\vec{k}_v = \vec{k}_R \cdot C + \vec{k}_Z \cdot B + \vec{k}_E$

b) Für einen Auftrag über 10 ME von E_1, 10 ME von E_2 und 20 ME von E_3 betragen die Fixkosten 700 GE. Berechnen Sie die Gesamtkosten für diesen Auftrag.

c) Die Verkaufspreise je ME betragen für E_1 180 GE, für E_2 190 GE und für E_3 240 GE. Berechnen Sie den Gewinn für diesen Auftrag.

2 Ein Betrieb fertigt drei verschiedene Endprodukte E_1, E_2 und E_3 unter Verwendung von drei verschiedenen Rohstoffen R_1, R_2 und R_3. Das folgende Verflechtungsdiagramm gibt an, wie viele Mengeneinheiten (ME) Rohstoffe für die Produktion von jeweils 1 ME Endprodukten benötigt werden.



Die gesamten Herstellkosten in Geldeinheiten (GE) pro ME der Endprodukte sind durch folgenden Vektor gegeben: $\vec{k}_v = (2 \quad 2{,}5 \quad 3)$.
Die Verkaufspreise in Geldeinheiten (GE) pro ME der Endprodukte sind durch folgenden Vektor gegeben: $\vec{p} = (3 \quad 4 \quad 6)$.
Der Betrieb erhält einen Auftrag über 100 ME E_1, 80 ME E_2 und 50 ME E_3.

a) Geben Sie die zugehörige Verflechtungsmatrix an.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Gesamtkosten für den Auftrag.

$$K = (2 \quad 2{,}5 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 50 \end{pmatrix} = 550$$

c) Berechnen Sieden Gesamterlös für den Auftrag.

$$E = (3 \quad 4 \quad 6) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 50 \end{pmatrix} = 920$$

d) Berechnen Sie den Gewinn für diesen Auftrag.

$$G = E - K = 920 - 550 = 370$$

e) Die Rohstoffkosten betragen 0,1 GE pro ME R_1, 0,05 GE pro ME R_2 und 0,1 GE pro ME R_3. Wie viel Rohstoffkosten stecken in einer ME der Endprodukte? Wie hoch sind die Rohstoffkosten für diesen Auftrag?

$$(0{,}1 \quad 0{,}05 \quad 0{,}1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = (0{,}65 \quad 0{,}25 \quad 0{,}55)$$ Rohstoffkosten je ME Endprodukt

$$(0{,}65 \quad 0{,}25 \quad 0{,}55) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 50 \end{pmatrix} = 112{,}5$$ Gesamtrohstoffkosten für den Auftrag

3 Ein Betrieb fertigt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zunächst die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1, E_2 und E_3. Die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix und die Rohstoff-Endprodukt-Matrix sind gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Kosten in Geldeinheiten (GE) pro ME für die Rohstoffe, die Kosten für die Fertigung der Zwischenprodukte und die Kosten für die Produktion der Endprodukte sind durch folgende Vektoren gegeben: $\vec{k}_R = (1 \quad 2{,}5 \quad 4)$
$\vec{k}_Z = (10 \quad 10 \quad 12)$
$\vec{k}_E = (50 \quad 80 \quad 100)$.

a) Berechnen Sie die variablen Herstellkosten je ME Endprodukt.

Dabei gilt: $\vec{k}_v = \vec{k}_R \cdot C + \vec{k}_Z \cdot B + \vec{k}_E$

Einsetzen ergibt: $\vec{k}_v = (1 \quad 2{,}5 \quad 4) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} + (10 \quad 10 \quad 12) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + (50 \quad 80 \quad 100)$

$\vec{k}_v = (36 \quad 30 \quad 28{,}5) + (20 \quad 52 \quad 56) + (50 \quad 80 \quad 100)$

$\vec{k}_v = (106 \quad 162 \quad 184{,}5)$

b) Für einen Auftrag über 20 ME von E1, 10 ME von E2 und 30 ME von E3 betragen die Fixkosten 1200 GE. Berechnen Sie die Gesamtkosten für diesen Auftrag.

$$K = \vec{k}_v \cdot \vec{x} + K_{fix} = (106 \quad 162 \quad 184{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} + 1200 = 10475$$

c) Die Verkaufspreise je ME betragen für E_1 130 GE, für E_2 175 GE und für E_3 210 GE. Berechnen Sie den Gewinn für diesen Auftrag.

Erlös $E = (130 \quad 175 \quad 210) \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} = 10650$

Gewinn = Erlös − Kosten = 10650 − 10475 = 175

Der Gewinn für diesen Auftrag beträgt 175 GE.

4 Ein Betrieb fertigt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zunächst die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1, E_2 und E_3. Die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B sind gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Kosten in Geldeinheiten (GE) pro ME für die Rohstoffe, die Kosten für die Fertigung der Zwischenprodukte und die Kosten für die Produktion der Endprodukte sind durch folgende Vektoren gegeben: $\vec{k}_R = (3 \quad 4 \quad 6)$;
$\vec{k}_Z = (14 \quad 16 \quad 15)$;
$\vec{k}_E = (65 \quad 80 \quad 75)$.

a) Berechnen Sie die variablen Herstellkosten je ME Endprodukt.

Dabei gilt: $\vec{k}_v = \vec{k}_R \cdot C + \vec{k}_Z \cdot B + \vec{k}_E$

$\vec{k}_v = (3 \quad 4 \quad 6) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + (14 \quad 16 \quad 15) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (65 \quad 80 \quad 75)$

$= (41 \quad 47 \quad 24) + (44 \quad 61 \quad 30) + (65 \quad 80 \quad 75) = (150 \quad 188 \quad 129)$

Die variablen Herstellkosten je ME Endprodukt E_1 betragen 150 GE, für E_2 188 GE und für E_3 129 GE.

b) Für einen Auftrag über 10 ME von E_1, 10 ME von E_2 und 20 ME von E_3 betragen die Fixkosten 700 GE. Berechnen Sie die Gesamtkosten für diesen Auftrag.

Gesamtkosten für den Auftrag: $(150 \quad 188 \quad 129) \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} + 700 = 6660$

Die Gesamtkosten für den Auftrag betragen 6660 GE.

c) Die Verkaufspreise je ME betragen für E_1 180 GE, für E_2 190 GE und für E_3 240 GE. Berechnen Sie den Gewinn für diesen Auftrag.

Erlös für den Auftrag: $(180 \quad 190 \quad 240) \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} = 8500$

Gewinn für den Auftrag: 8500 − 6660 = 1840

Der Gewinn für den Auftrag beträgt 1840 GE.

5 Ein Betrieb fertigt aus den Rohstoffen R_1 und R_2 zunächst die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1 und E_2. Die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B sind gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Kosten für die Rohstoffe, die Kosten für die Fertigung der Zwischenprodukte und die Kosten für die Produktion der Endprodukte betragen in GE pro ME:

R_1	R_2
2	3

Z_1	Z_2	Z_3
3	4	2

E_1	E_2
4	3

Pro Bestellung fallen zudem Fixkosten in Höhe von 50 GE an.
Ein Kunde bestellt 5 ME von E_1 und 4 ME von E_2.

a) Berechnen Sie die hierfür benötigten Zwischenprodukt- und Rohstoffmengen.

$\vec{z} = B \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 8 \\ 31 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{r} = A \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 8 \\ 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 167 \\ 139 \end{pmatrix}$

b) Berechnen Sie die gesamten Kosten für Rohstoffe, Zwischenprodukte und Endprodukte, die für diesen Auftrag anfallen.

$K_R = \vec{k}_R \cdot \vec{r} = (2 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 167 \\ 139 \end{pmatrix} = 751$

$K_Z = \vec{k}_Z \cdot \vec{z} = (3 \quad 4 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 8 \\ 31 \end{pmatrix} = 151$

$K_E = \vec{k}_E \cdot \vec{x} = (4 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 32$

c) Berechnen Sie die gesamten Herstellkosten für die Bestellung.

$K = K_R + K_Z + K_E + K_{fix} = 751 + 151 + 32 + 50 = 984$

Die gesamten Herstellkosten für die Bestellung betragen 984 GE.