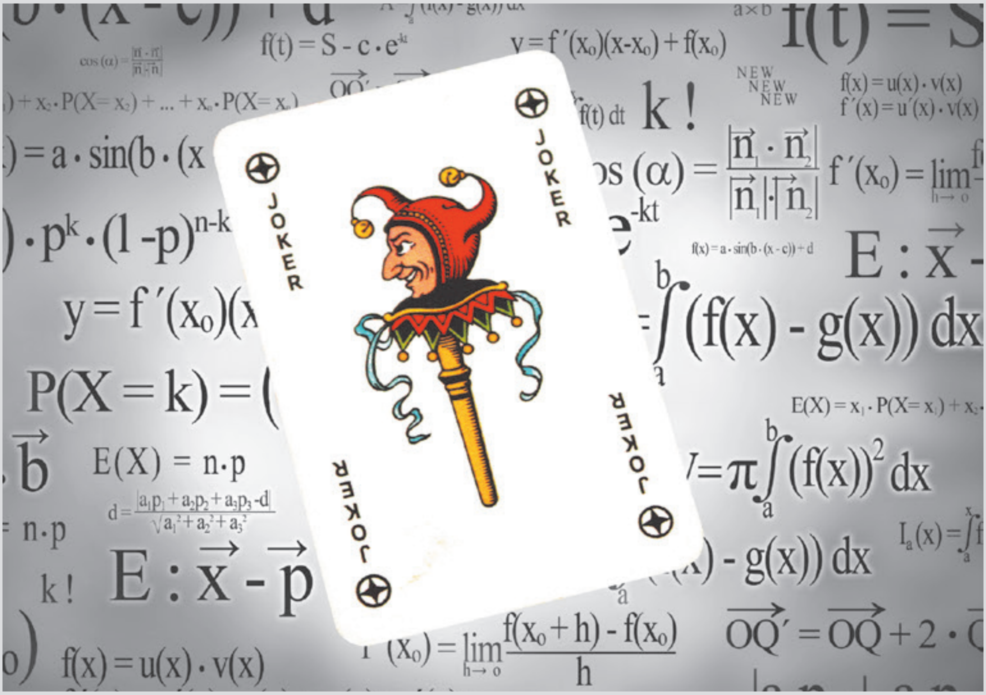
Rosner

Optimale Vorbereitung auf das Abitur in Mathematik

Verständliche Zusammenfassungen zu allen Themen

für alle beruflichen Gymnasien (gA und eA) in Niedersachsen



Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Der Verfasser:

Stefan Rosner
Lehrer für Mathematik in der Oberstufe
stefan_rosner@hotmail.com

Beratende Mitarbeit:
Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

* * * * *

2. Auflage 2020

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de
Merkur-Nr.: 0517-02
ISBN 978-3-8120-1014-6

1. Funktionen

1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

1. Grades (Geraden)

Hauptform : $\boldsymbol{y = mx + b}$

Vorgeben zum Einzeichnen:

$$y = \frac{\textit{hoch / runter}}{\textit{rechts}} \cdot x + \begin{array}{l}\textit{y-Achsen-}\\ \textit{abschnitt}\end{array}$$

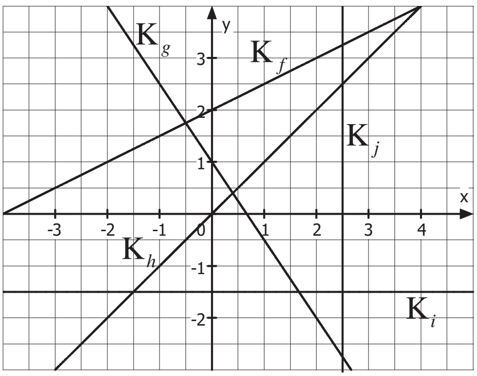
Steigung aus 2 Punkten: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Steigungswinkel aus Steigung bestimmen:
$m = \tan(\alpha)$

Parallele Geraden:
$m_1 = m_2$ (gleiche Steigung)

Senkrechte (orthogonale) Geraden:
Steigungen sind negative Kehrwerte voneinander: $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$ bzw. $m_1 \cdot m_2 = -1$

1. Winkelhalbierende: $y = x \quad (m = 1)$
2. Winkelhalbierende: $y = -x \quad (m = -1)$



K_f: $y = \frac{1}{2}x + 2$ $\quad$ K_g: $y = -\frac{3}{2}x + 1$

K_h: $y = x$ (1. Winkelhalbierende)

K_i: $y = -1{,}5$ $\quad$ K_j: $x = 2{,}5$

2. Grades (Parabeln)

Allg.: $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$

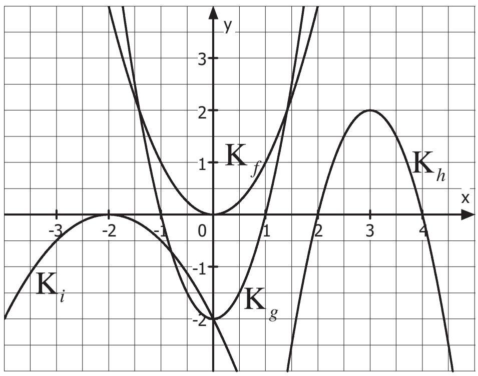
Scheitelpunkt-Ansatz:
$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ mit $S(x_s \mid y_s)$

$a > 0$: nach oben geöffnet bzw. Verlauf von II nach I

$a < 0$: nach unten geöffnet bzw. Verlauf von III nach IV

Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 \mid c)$

Bei Symmetrie zur y-Achse:
$f(x) = ax^2 + c$ (nur gerade Hochzahlen)



K_f: $f(x) = x^2$ $\quad$ K_g: $g(x) = 2x^2 - 2$

K_h: $h(x) = -2(x-3)^2 + 2$

K_i: $i(x) = -0{,}5x^2 - 2x - 2$

mvurl.de/fdub

<table>
<tr><th>3. Grades</th><th>4. Grades</th></tr>
<tr><td>

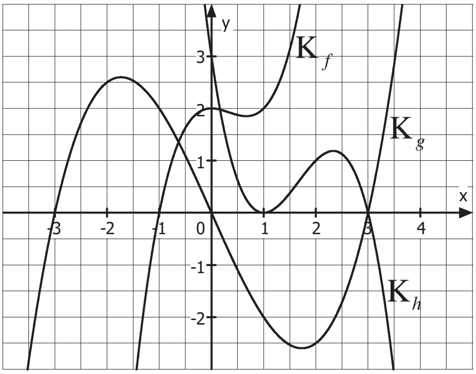
Allg.: $\boldsymbol{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$

$a > 0$: Verlauf von III nach I

$a < 0$: Verlauf von II nach IV

Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 \mid d)$

Ansatz bei Symmetrie zum Ursprung:
$f(x) = ax^3 + cx$ (nur ungerade Hochzahlen)



K_f: $f(x) = x^3 - x^2 + 2$

K_g: $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x$

K_h: $h(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3$

</td><td>

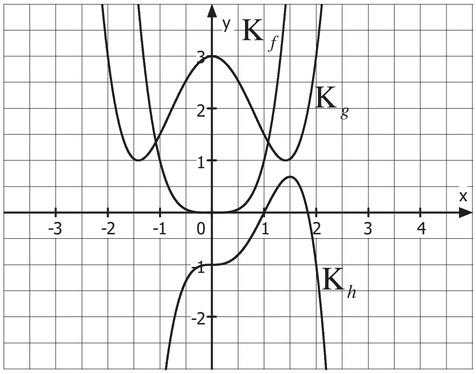
Allg.: $\boldsymbol{f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$

$a > 0$: Verlauf von II nach I

$a < 0$: Verlauf von III nach IV

Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 \mid e)$

Ansatz bei Symmetrie zur y-Achse:
$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ (nur gerade Hochzahlen)



K_f: $f(x) = x^4$

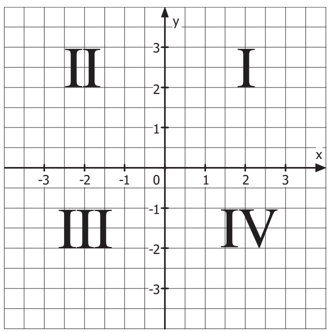
K_g: $g(x) = 0,5x^4 - 2x^2 + 3$

K_h: $h(x) = -x^4 + 2x^3 - 1$

</td></tr>
</table>

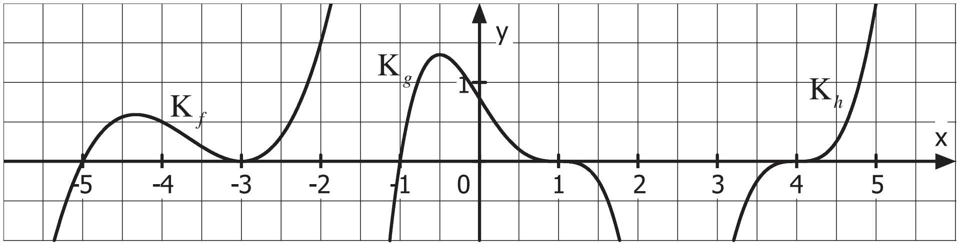
Tipp (für alle ganzrationalen Funktionen)
$\boldsymbol{a > 0}$: Verlauf von ... nach **I** („endet **oben**“)
$\boldsymbol{a < 0}$: Verlauf von ... nach **IV** („endet **unten**“)

Die Quadranten



1.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen

Beispiele



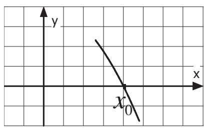
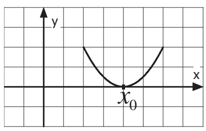
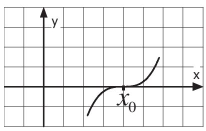
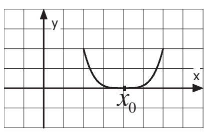
$K_f: f(x) = 0{,}5 \cdot (x+5) \cdot (x+3)^2$ $K_g: g(x) = -0{,}8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$ $K_h: h(x) = 2 \cdot (x-4)^3$

Aufbau des Nullstellenansatzes (am Beispiel)

$$g(x) = -0{,}8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$$

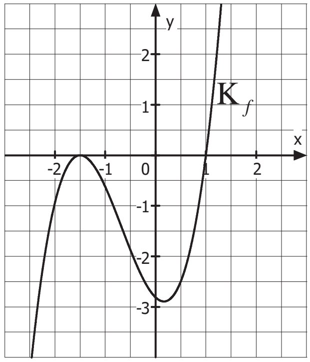
Verlauf von III nach IV	$x_0 = -1$ ist einfache Nullstelle	$x_{1/2/3} = +1$ ist dreifache Nullstelle

Übersicht (für ganzrationale Funktionen)

Vielfachheit Nullstelle	Linearfaktor im Nullstellenansatz	Skizze	Beschreibung
Einfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0) \cdot \ldots$		Schaubild **schneidet** x-Achse (mit Vorzeichenwechsel VZW)
Doppelte Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^2 \cdot \ldots$		Schaubild **berührt** x-Achse (ohne VZW)
Dreifache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^3 \cdot \ldots$		Schaubild **schneidet** und **berührt** x-Achse (mit VZW)
Vierfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^4 \cdot \ldots$		Schaubild **berührt** x-Achse (ohne VZW) („breiter“ geformt als doppelte Nullstelle)

mvurl.de/ehue

Beispiel
Gesucht ist der Funktionsterm zum nebenstehenden Schaubild.



Lösung
Da die Nullstellen $\left(x_{1/2} = -1{,}5;\ \ x_3 = 1\right)$ des Schaubildes ablesbar sind, kann der Nullstellenansatz der Funktion weitgehend aufgestellt werden:
$f(x) = a \cdot (x+1{,}5)^2 \cdot (x-1)$
Dann werden die Koordinaten eines weiteren Punktes, der kein Schnittpunkt mit der x-Achse ist, eingesetzt:

P$(0{,}5\,|\,-2{,}5)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x+1{,}5)^2 \cdot (x-1) \\ -2{,}5 &= a \cdot (0{,}5+1{,}5)^2 \cdot (0{,}5-1) \\ -2{,}5 &= -2a \\ \frac{5}{4} &= a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{5}{4} \cdot (x+1{,}5)^2 \cdot (x-1)$$

4.5 Extrempunkte (Hochpunkte und Tiefpunkte)

Vorgehen zur Ermittlung von Hoch- und Tiefpunkten (am Beispiel)	
1. Schritt: $f'(x)=0$ Stellen mit waagrechter Tangente (Steigung von 0) ermitteln.	$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{11}{6}$ (Beispiel) $f'(x)=x^2-x-2$ $f''(x)=2x-1$ $\boldsymbol{f'(x)=0}$ $x^2-x-2=0$ $x_{1/2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}$ $=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}$ $\Rightarrow \boldsymbol{x_1=-1;\ x_2=2}$
2. Schritt: Einsetzen in $f''(x)$ Falls $\begin{cases} f''(x)<0 \\ f''(x)>0 \end{cases}$ liegt $\begin{cases} \textbf{Hochpunkt} \\ \textbf{Tiefpunkt} \end{cases}$ vor.	$\boldsymbol{f''(-1)}=2\cdot(-1)-1=-3$ **< 0** $\to$ **H** $\boldsymbol{f''(2)}=2\cdot 2-1=3$ **> 0** $\to$ **T**
3. Schritt: Einsetzen in $f(x)$ y-Koordinaten der Hoch- bzw. Tiefpunkte bestimmen.	$\boldsymbol{f(-1)}=\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-\frac{1}{2}\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)+\frac{11}{6}$ $=\boldsymbol{3}$ $\to$ $\boldsymbol{H(-1\mid 3)}$ $\boldsymbol{f(2)}=\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{1}{2}\cdot 2^2-2\cdot 2+\frac{11}{6}$ $=\boldsymbol{-1{,}5}$ $\to$ $\boldsymbol{T(2\mid -1{,}5)}$

Alternative zum 2. Schritt: Untersuchung auf Vorzeichenwechsel

Hat f' eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, dann hat das Schaubild von f hier einen Extrempunkt.

Bei einem Vorzeichenwechsel von $\begin{cases} + \text{ nach } - \\ - \text{ nach } + \end{cases}$ liegt ein $\begin{cases} \text{Hochpunkt} \\ \text{Tiefpunkt} \end{cases}$ vor.

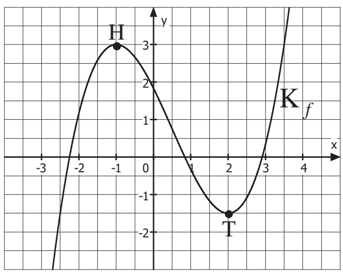
z.B. bei $x_2=2$:

$f'(1)=1^2-1-2=-2\ <0$

$f'(3)=3^2-3-2=4\ >0$

VZW von $-$ nach $+$

$\Rightarrow$ somit Tiefpunkt



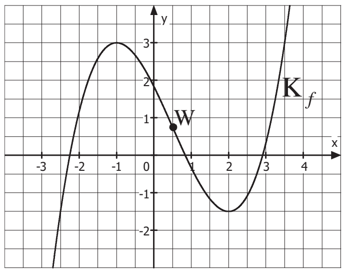
mvurl.de/3vs8

4.6 Wendepunkte

Vorgehen zur Ermittlung von Wendepunkten (am Beispiel)	
1. Schritt: $f''(x)=0$ Stellen „ohne Krümmung“ ermitteln.	$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{11}{6}$ (Beispiel) $f'(x)=x^2-x-2$ $f''(x)=2x-1$ $f'''(x)=2$ $\boldsymbol{f''(x)=0}$ $2x-1=0 \quad \vert +1$ $2x=1 \quad \vert :2$ $\boldsymbol{x=0{,}5}$
2. Schritt: Einsetzen in $f'''(x)$ Wendepunkt, falls $\boldsymbol{f'''(x)\neq 0}$.	$\boldsymbol{f'''(0{,}5)}=2 \quad \boldsymbol{\neq 0} \quad \rightarrow \ \mathbf{W}$
3. Schritt: Einsetzen in $f(x)$ y-Koordinaten der Wendepunkte bestimmen.	$\boldsymbol{f(0{,}5)}=\frac{1}{3}\cdot 0{,}5^3-\frac{1}{2}\cdot 0{,}5^2-2\cdot 0{,}5+\frac{11}{6}$ $=\boldsymbol{0{,}75} \ \rightarrow \ \mathbf{W}(\boldsymbol{0{,}5 \vert 0{,}75})$

Alternative zum 2. Schritt: Untersuchung auf Vorzeichenwechsel
Hat f'' eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, dann hat das Schaubild von f hier einen Wendepunkt.

am Beispiel: $x=0{,}5$:
$f''(0)=2\cdot 0-1=-1 \ <0$
$f''(1)=2\cdot 1-1=1 \quad >0$
VZW
$\Rightarrow$ somit Wendepunkt

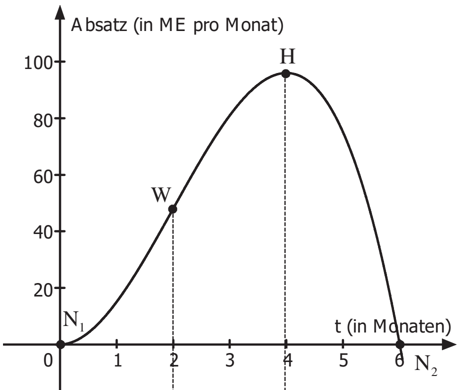


Bemerkungen

- Als **Wendetangente** wird eine Tangente bezeichnet, welche das Schaubild im Wendepunkt berührt. Die **Wendenormale** steht senkrecht zur Wendetangente und verläuft ebenfalls durch den Wendepunkt.
- An einer **Wendestelle** hat das Schaubild entweder die **größte** oder die **kleinste Steigung**. Das Schaubild von f' hat hier deshalb entweder einen Hochpunkt oder einen Tiefpunkt.

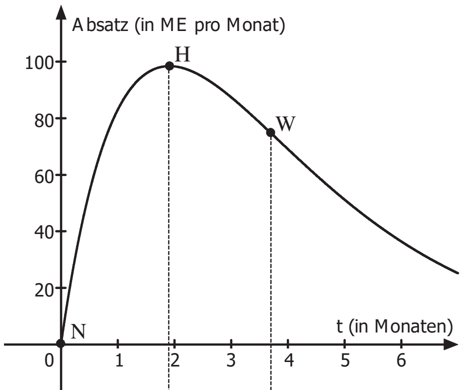
5. Differenzialrechnung (im wirtschaflichen Kontext)

5.1 Der Produktlebenszyklus

<table>
<tr><th>Modellierung mit:
Ganzrationaler Funktion 3. Grades</th><th>Modellierung mit:
Exponentialfunktion (eA)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Beispiel</td></tr>
<tr><td>Für ein Produkt liegt die Absatzfunktion A mit $A(t) = -3t^3 + 18t^2$ vor.</td><td>Für ein Produkt liegt die Absatzfunktion A mit $A(t) = 160 \cdot t \cdot e^{-0,61t}$ vor.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Beschreibung</td></tr>
<tr><td>Absatz beginnt langsam, erreicht Maximum, bricht dann abrupt ein.</td><td>Absatz beginnt stark, erreicht Maximum, läuft dann langsam (asymptotisch) aus.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Am Schaubild</td></tr>
<tr><td>


Absatz wächst immer schneller
progressiv wachsend
$\begin{pmatrix} A'(t) > 0 \\ A''(t) > 0 \end{pmatrix}$

Absatz wächst immer langsamer
degressiv wachsend
$\begin{pmatrix} A'(t) > 0 \\ A''(t) < 0 \end{pmatrix}$

Absatz fällt immer schneller
progressiv fallend
$\begin{pmatrix} A'(t) < 0 \\ A''(t) < 0 \end{pmatrix}$
</td><td>


Absatz wächst immer langsamer
degressiv wachsend
$\begin{pmatrix} A'(t) > 0 \\ A''(t) < 0 \end{pmatrix}$

Absatz fällt immer schneller
progressiv fallend
$\begin{pmatrix} A'(t) < 0 \\ A''(t) < 0 \end{pmatrix}$

Absatz fällt immer langsamer
degressiv fallend
$\begin{pmatrix} A'(t) < 0 \\ A''(t) > 0 \end{pmatrix}$
</td></tr>
</table>

H	**Maximaler Absatz**	H
W	**Maximaler Absatzzuwachs**	N
N_2	**Maximaler Absatzrückgang**	W

mvurl.de/1bzt

5.2 Die ertragsgesetzliche Kostenfunktion

Beteiligte Funktionen

- **K** gibt die **Gesamtkosten** an, die bei der Herstellung von x ME entstehen.
Ansatz: $\mathrm{K}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

- **K′** gibt die **Grenzkosten**, also die Kosten, die bei Herstellung einer zusätzlichen (beliebig kleinen) Mengeneinheit entstehen, an.

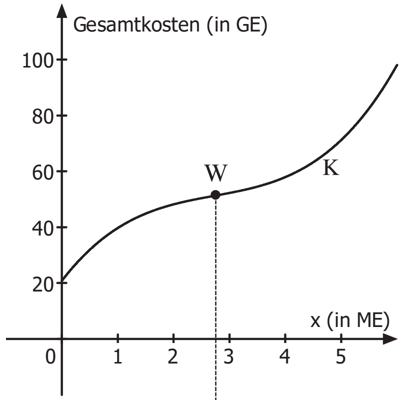
Erläuterungen

Da eine Mehrproduktion stets mit höheren Gesamtkosten verbunden ist, ist K streng monoton steigend bzw. K′ überall positiv ($\mathrm{K}'(x) > 0$).

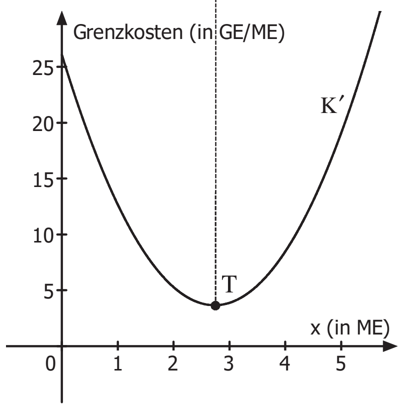
Bis zur Wendestelle fällt K′. Zusätzliche Mengeneinheiten führen zwar zu Mehrkosten, diese jedoch sinken. ($\mathrm{K}''(x) < 0$).
Es liegt **degressives Wachstum** vor.

An der Wendestelle selbst sind die Mehrkosten der nächsten Einheit minimal (Tiefpunkt bei K′).

Ab der Wendestelle steigt K′. Zusätzliche Mengeneinheiten führen zu immer höheren Mehrkosten. ($\mathrm{K}''(x) > 0$).
Es liegt **progressives Wachstum** vor.



Kosten wachsen immer langsamer	Kosten wachsen immer schneller
degressiv wachsend	**progressiv wachsend**
$\mathbf{K'(x) > 0}$ (steigende Kosten)	$\mathbf{K'(x) > 0}$ (steigende Kosten)
$\mathbf{K''(x) < 0}$ abnehmende Grenzkosten (bzw. K ist rechtsgekrümmt)	$\mathbf{K''(x) > 0}$ zunehmende Grenzkosten (bzw. K ist linksgekrümmt)



mvurl.de/i3ge

5.3 Kostenanalyse: Betriebsminimum und kurzfristige Preisuntergrenze

Beispiel: Die Gesamtkostenfunktion K lautet $K(x) = x^3 - 7x^2 + 20x + 40$.
Berechnen Sie das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze.

Beteiligte Funktionen

$K_V(x) = x^3 - 7x^2 + 20x$ (Var. Gesamtkostenfkt; ohne Fixkosten)

$\boldsymbol{k_V(x)} = \frac{K_V(x)}{x} = \frac{x^3 - 7x^2 + 20x}{x} = x^2 - 7x + 20$ (Variable Stückkostenfunktion)

Berechnung: Tiefpunkt des Graphen der variablen Stückkostenfunktion $\boldsymbol{k_v}$

$k_V(x) = x^2 - 7x + 20; \quad k_V'(x) = 2x - 7; \quad k_V''(x) = 2$

$$\begin{aligned} k_V'(x) &= 0 \\ 2x - 7 &= 0 \\ x_{BM} &= 3,5 \end{aligned}$$

$k_V''(3,5) = 2 > 0 \Rightarrow T$

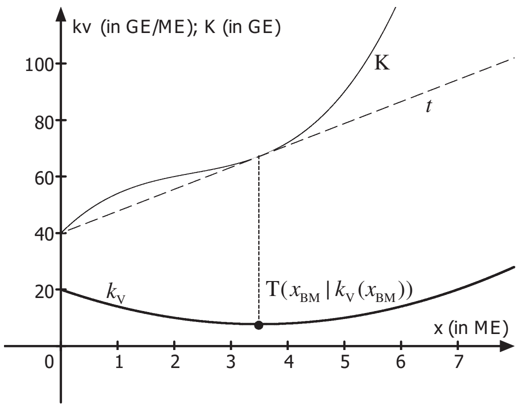
$k_V(3,5) = 3,5^2 - 7 \cdot 3,5 + 20 = 7,75$ (= kurzfr. Preisuntergrenze)

$\rightarrow$ T(3,5 | 7,75) (direkte Berechnung durch GTR/CAS ist möglich)

Wenn der Betrieb $\boldsymbol{x_{BM} = 3,5}$ **ME** produziert, liegen **minimale variable Stückkosten** vor.
Diese betragen **7,75 GE pro ME** und entsprechen der **kurzfristigen Preisuntergrenze**.
Bis zu dieser Grenze könnte der Betrieb den Verkaufpreis kurzfristig senken, da dann noch die variablen Stückkosten gedeckt sind.
Dies ist jedoch nur kurzfristig möglich, da die **Fixkosten** hierbei **nicht gedeckt** sind.

Weitere Informationen

Eine Gerade durch den y-Achsenabschnitt von K, die den Graphen von K tangieren soll, tangiert diesen stets in x_{BM}.
Die Steigung dieser Tangenten entspricht dann den minimalen variablen Stückkosten ($m = 7,75$).
(Tangentengleichung $y = 7,75x + 40$)



mvurl.de/yj3a

5.4 Kostenanalyse: Betriebsoptimum und langfristige Preisuntergrenze

Beispiel : Die Gesamtkostenfunktion K lautet $\mathrm{K}(x) = x^3 - 7x^2 + 20x + 40$.
Berechnen Sie das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze.

Beteiligte Funktionen

$$\boldsymbol{k(x)} = \frac{\mathrm{K}(x)}{x} = \frac{x^3 - 7x^2 + 20x + 40}{x} = x^2 - 7x + 20 + \frac{40}{x} \qquad \text{(Stückkostenfunktion)}$$

Berechnung : Tiefpunkt des Graphen der Stückkostenfunktion *k*

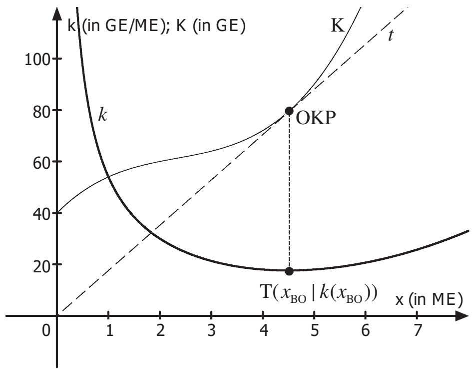
$$k(x) = x^2 - 7x + 20 + \frac{40}{x}$$

Berechnung (stets) durch GTR/CAS:
T(4,49 | 17,64)

Wenn der Betrieb $\boldsymbol{x_{\mathrm{BO}} = 4{,}49}$ **ME** produziert, liegen **minimale Stückkosten** vor.
Diese betragen **17,64 GE pro ME** und entsprechen der **langfristigen Preisuntergrenze**.
Bis zu dieser Grenze könnte der Betrieb den Verkaufspreis langfristig senken, da dann alle Kosten gedeckt sind.

Weitere Informationen

Eine Gerade durch den Ursprung, die den Graphen von K tangieren soll, tangiert diesen stets in x_{BO}.
Die Steigung dieser Tangenten entspricht den minimalen Stückkosten ($m = 17{,}64$).
(Tangentengleichung $y = 17{,}64x$)
Der Berührpunkt heißt **optimaler Kostenpunkt (OKP)**.



mvurl.de/kg7a

7.2 Marktgleichgewicht, Konsumenten- und Produzentenrente (an Exponentialfunktionen)

Beispiel : In einem Markt liegen die Angebotsfunktion p_A mit $p_A(x) = e^{0,5x}$ und die Nachfragefunktion p_N mit $p_N(x) = e^{-0,2x+3,5}$ vor.

a) Berechnen Sie die **Gleichgewichtsmenge** und den **Gleichgewichtspreis** (**Marktgleichgewicht**).

Hier stimmen **Angebot** und **Nachfrage** überein:

$$\boldsymbol{p_A(x) = p_N(x)}$$

$$\begin{aligned} e^{0,5x} &= e^{-0,2x+3,5} && |\ln \\ 0,5x &= -0,2x+3,5 && |+0,2x \\ 0,7x &= 3,5 && |:3,5 \\ x_G &= 5 \text{ (Gleichgewichtsmenge)} \end{aligned}$$

Gleichgewichtspreis : $p_A(5) = e^{0,5\cdot 5} \approx 12,2 \;\rightarrow\; p_G = 12,2$

Markgleichgewicht: MGG$(5 \mid 12,2)$

b) Berechnen Sie die **Konsumentenrente**, also die Summe der Ersparnisse der Nachfrager im Marktgleichgewicht.

$$\textbf{KR} = \int_0^{x_G} \left(\boldsymbol{p_N(x) - p_G}\right) \boldsymbol{dx} = \int_0^5 \left(e^{-0,2x+3,5} - 12,2\right) dx = \left[e^{-0,2x+3,5} \cdot \frac{1}{-0,2} - 12,2x \right]_0^5$$

$$= \left[-5 \cdot e^{-0,2x+3,5} - 12,2x\right]_0^5 = -5 \cdot e^{-0,2\cdot 5+3,5} - 12,2 \cdot 5 - \left(-5 \cdot e^{-0,2\cdot 0+3,5} - 12,2 \cdot 0\right)$$

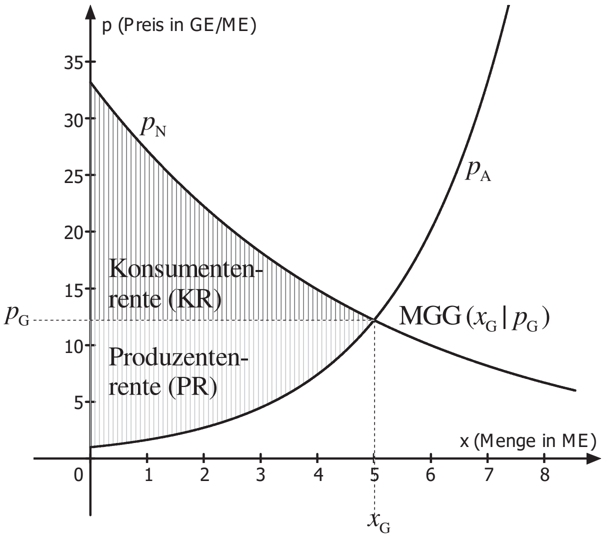
$$\approx 43,66$$

c) Berechnen Sie die **Produzentenrente**, also die Summe der Mehreinnahmen der Anbieter im Marktgleichgewicht.

$$\textbf{PR} = \int_0^{x_G} \left(\boldsymbol{p_G - p_A(x)}\right) \boldsymbol{dx} = \int_0^5 \left(12,2 - e^{0,5x}\right) dx = \left[12,2x - e^{0,5x} \cdot \frac{1}{0,5} \right]_0^5$$

$$= \left[12,2x - 2 \cdot e^{0,5x}\right]_0^5 = 12,2 \cdot 5 - 2 \cdot e^{0,5\cdot 5} - \left(12,2 \cdot 0 - 2 \cdot e^{0,5\cdot 0}\right) \approx 38,64$$

Grafische Darstellung



4. Binomialverteilung

4.1 Bernoulliformel

Zugrunde liegt ein mehrfach ausgeführtes Bernoulli-Experiment, bei dem …
… nur **zwei mögliche Ergebnisse** („Treffer" und „Niete") eintreten können
und
… sich die **Wahrscheinlichkeiten nicht ändern** („Ziehen **mit** Zurücklegen")

Beispiele: Münzwurf („Kopf" oder „Zahl"); Mehrfach würfeln („6" oder „keine 6"); …

Bernoulliformel (allg.)

$$\mathbf{P(X=}\boldsymbol{k}\mathbf{)=}\begin{pmatrix}\boldsymbol{n}\\\boldsymbol{k}\end{pmatrix}\cdot \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{k}}\cdot\mathbf{(1-}\boldsymbol{p}\mathbf{)}^{\boldsymbol{n-k}}$$

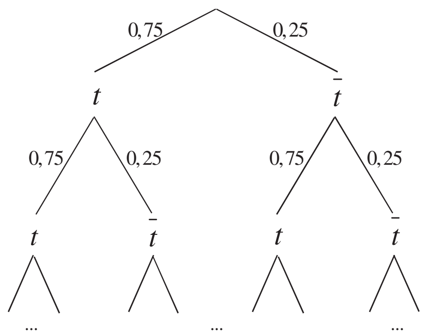
n: Anzahl der Versuche (Durchführungen)
k: Anzahl der „Treffer"
p: Wahrscheinlichkeit für einen „Treffer"

Bernoulliformel (in Worten)

$$\text{P(X = Anz. Treffer)} = \begin{pmatrix}\text{Anz. Versuche}\\\text{Anz. Treffer}\end{pmatrix}\cdot \text{Trefferwahrsch.}^{\text{Anz. Treffer}}\cdot \text{Nietenwahrsch.}^{\text{Anz. Nieten}}$$

Beispiel 1
Ein Basketballspieler trifft (t) erfahrungsgemäß einen Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. Er wirft 8 Mal.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er insgesamt 5 Mal (und 3 Mal nicht)?

$$\text{P(X = 5)} = \begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}\cdot 0,75^5\cdot 0,25^3 \approx 0,2076$$



(8 Stufen)
(alle Pfade mit 5 Mal t und 3 Mal $\bar{t}$ relevant)

Erläuterungen

- Binomialkoeffizient (allg.): $\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$
- $n!$ steht für die Fakultät einer Zahl: $n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1$
- $\text{P(X = 5)} = \begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}\cdot 0,75^5\cdot 0,25^3 = \dfrac{8!}{5!\cdot(8-5)!}\cdot 0,75^5\cdot 0,25^3 = 56\cdot 0,00371 \approx 0,2076.$

Es gibt also 56 mögliche Reihenfolgen für 5 Treffer unter 8 Schüssen ($ttttt\bar{t}\bar{t}\bar{t}$, $\bar{t}ttttt\bar{t}\bar{t}$, ...), von welchen jede eine Einzelwahrscheinlichkeit von ungefähr $0,00371$ aufweist.

mvurl.de/o456

Beispiel 2
Eine faire Münze wird 5 Mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man genau 3 Mal „Zahl“? (Lösen ohne GTR/CAS)

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=10\cdot\frac{1}{32}=\frac{5}{16}$$

$$\left(\text{Nebenrechnung: }\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\cdot(5-3)!}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{(3\cdot2\cdot1)\cdot(2\cdot1)}=\frac{5\cdot4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{(\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1})\cdot(2\cdot1)}=10\right)$$

Beispiel 3
Ein Bauteil ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 4 % defekt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich in einem Karton mit 50 Bauteilen genau 3 defekte Bauteile?

$$P(X=3)=\binom{50}{3}\cdot 0{,}04^3\cdot 0{,}96^{47}\,(\approx 19600\cdot 0{,}000009396)\approx 0{,}184=18{,}4\,\%$$

GTR/CAS:
BV (50, 0.04, 3)
$\rightarrow P\approx 0{,}184$

(Es gibt also 19600 mögliche Reihenfolgen für 3 defekte unter 50 (nacheinander entnommenen) Bauteilen.)

Beispiel 4
Jonas würfelt 24 Mal.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er genau 7 Mal eine 3?

$$P(X=7)=\binom{24}{7}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^7\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{17}\approx 0{,}056$$

GTR/CAS:
BV (24, 1/6, 7)
$\rightarrow P\approx 0{,}056$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er genau 10 Mal eine 2 oder eine 3?

$$\left(\text{Wahrscheinlichkeit für 2 oder 3: }\frac{2}{6}\right)$$

$$P(X=10)=\binom{24}{10}\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^{10}\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^{14}\approx 0{,}114$$

GTR/CAS:
BV (24, 2/6, 10)
$\rightarrow P\approx 0{,}114$

4.5 Prognoseintervalle

Ausgangssituation

Durch Prognoseintervalle können ausgehend von einer (bekannten) Wahrscheinlichkeit Aussagen in Bezug auf die Ergebnisse einer Stichprobe getätigt werden.

Beispiel: Ein von der Mikro AG hergestellter Mikrochip ist erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % fehlerhaft. Ein Kunde bestellt 100 Mikrochips.

a) Berechnen Sie das Prognoseintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit von 90 %.

Prognoseintervall ermitteln

1. Erwartungswert berechnen und Intervallbedingung $\mathrm{P}(a \le X \le b) \approx \gamma$ notieren.

Erwartungswert: $\mu = 100 \cdot 0,2 = 20$ („Mitte“ des Intervalls)

Bedingung: Intervall um $\mu = 20$ mit $\mathrm{P}(a \le X \le b) \approx 0,9 \; (= 90\%)$
Somit sollten die beiden Ränder je ca. 5% Wahrscheinlichkeit (Summe 10 %) aufweisen.

2. Linke Intervallgrenze *a* ermitteln

Gesucht ist der **kleinstmögliche Wert *a***, sodass die kumulierte Wahrscheinlichkeit den Wert 5% **schon überschreitet**: $\mathrm{P}(X \le a) \ge 0,05$

Mit GTR/CAS:
$\mathrm{P}(X \le 13) \approx 0,047 < 0,05$
$\mathrm{P}(X \le 14) \approx 0,080 > 0,05 \qquad \Rightarrow a = 14$

3. Rechte Intervallgrenze *b* ermitteln

Gesucht ist der **größtmögliche Wert *b***, sodass die kumulierte Wahrscheinlichkeit den Wert 95% **noch unterschreitet**: $\mathrm{P}(X \le b) \le 0,95$

Mit GTR/CAS:
$\mathrm{P}(X \le 26) \approx 0,944 < 0,95 \qquad \Rightarrow b = 26$
$\mathrm{P}(X \le 27) \approx 0,966 > 0,95$

4. Prognoseintervall $[a;\, b]$ angeben

Prognoseintervall: $[14;\, 26]$

A: Mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit ca. 90 % sind in der Bestellung mindestens 14 und höchstens 26 Mikrochips fehlerhaft.

b) Der Kunde testet die 100 bestellten Mikrochips. 28 davon sind fehlerhaft.
Ist dieses Stichprobenergebnis mit dem vermuteten Anteil an fehlerhaften Mikrochips verträglich?

A: Da der Wert 28 **nicht im Prognoseintervall** liegt, ist das Stichprobenergebnis **nicht verträglich**, sondern **weist signifikant** vom Erwartungswert **ab**.

Beispiel 2: Apple gibt an, dass 17 % aller Jugendlichen in Deutschland ein iPad besitzen. In einer Stadt werden daraufhin 500 Jugendliche befragt, ob sie ein iPad besitzen.

a) Berechnen Sie das Prognoseintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 75 %.

1. Erwartungswert berechnen und Intervallbedingung $\mathbf{P}(a \le X \le b) \approx \gamma$ notieren.

Erwartungswert: $\mu = 500 \cdot 0{,}17 = 85$ („Mitte“ des Intervalls)

Bedingung: Intervall um $\mu = 85$ mit $P(a \le X \le b) \approx 0{,}75$ $(= 75\,\%)$

Die beiden Ränder sollten je ca. 12,5 % Wahrscheinlichkeit (Summe 25 %) aufweisen.

2. Linke Intervallgrenze *a* ermitteln

Gesucht ist der **kleinstmögliche Wert *a***, sodass die kumulierte Wahrscheinlichkeit den **Wert 12,5 % schon überschreitet**: $P(X \le a) \ge 0{,}125$

Mit GTR/CAS:

$P(X \le 74) \approx 0{,}104 \quad < 0{,}125$

$P(X \le 75) \approx 0{,}128 \quad > 0{,}125 \qquad \Rightarrow a = 75$

3. Rechte Intervallgrenze *b* ermitteln

Gesucht ist der **größtmögliche Wert *b***, sodass die kumulierte Wahrscheinlichkeit den **Wert 87,5 % noch unterschreitet**: $P(X \le b) \le 0{,}875$

Mit GTR/CAS:

$P(X \le 94) \approx 0{,}870 \quad < 0{,}875 \qquad \Rightarrow b = 94$

$P(X \le 95) \approx 0{,}893 \quad > 0{,}875$

4. Prognoseintervall $[a;\, b]$ angeben

Prognoseintervall: $[75;\, 94]$

A: Mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von ca. 75 % haben in der Stichprobe mindestens 75 und höchstens 94 Jugendliche ein iPad.

b) Von den 500 Jugendlichen geben 80 an, eine iPad zu besitzen. Ist dieses Stichprobenergebnis mit den Angaben von Apple verträglich?

A: Da der Wert 80 **im Prognoseintervall** liegt, ist das Stichprobenergebnis **verträglich** mit der Angabe von Apple.

3. Lineare Verflechtungen bei Produktionsprozessen

3.1 Zweistufige Produktionsprozesse

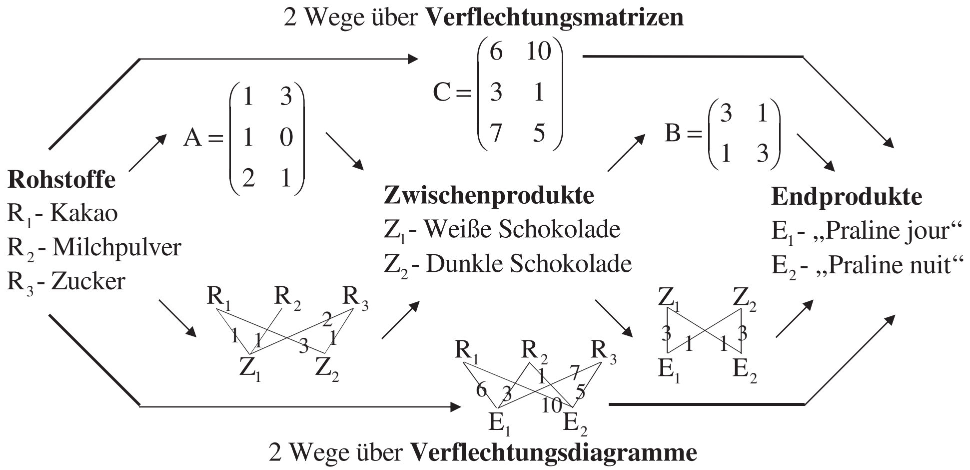
• Schritt 1: Verflechtungsmatrizen und Verflechtungsdiagramme

Beispiel: Der Pralinenhersteller Pralini AG stellt zwei Pralinentypen („Praline jour“ und „Praline nuit“) in einem 2-stufigen Produktionsprozess her. Aus den Rohstoffen (Kakao, Milchpulver, Zucker) werden zunächst Zwischenprodukte (Weiße Schokolade, Dunkle Schokolade) gefertigt, aus welchen dann die Endprodukte („Praline jour“, „Praline nuit“) hergestellt werden.

Benötigte Matrizen

A Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix (Benötigte Rohstoffe für die Zwischenprodukte)
B Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix
C Rohstoff-Endprodukt-Matrix

im Beispiel:



Formel: $\mathbf{A \cdot B = C}$

Beschreibung (jeweils nur anhand der 1. Spalte)

• 1. Spalte von Matrix A: Für 1 Einheit Z_1 (Weiße Schokolade) benötigt man 1 EH R_1 (Kakao), 1 EH R_2 (Milchpulver) und 2 EH R_3 (Zucker).

• 1. Spalte von Matrix B: Für 1 EH E_1 („Praline jour“) benötigt man 3 EH Z_1 (Weiße Schokolade) und 1 EH Z_2 (Dunkle Schokolade).

• 1. Spalte von Matrix C: Für 1 EH E_1 („Praline jour“) benötigt man 6 EH R_1 (Kakao), 3 EH R_2 (Milchpulver) und 7 EH R_3 (Zucker).

Bei A, B und C
Spalte - „nehmen“
Zeile - „geben“

mvurl.de/brq4

Schritt 2: Produktionsvektoren

Beispiel: Wie viele Rohstoffe müssen eingekauft werden, wenn 17 „Pralines jour“ und 21 „Pralines nuit“ hergestellt werden sollen?

Benötigte Vektoren		im Beispiel
$\vec{r}$	verwendete Rohstoffeinheiten (in ME R)	
$\vec{z}$	hergestellte Zwischenprodukteinheiten (in ME Z)	
$\vec{p}$	hergestellte Endprodukteinheiten (in ME P)	$\vec{p}=\begin{pmatrix}17\\21\end{pmatrix}$

Formeln: $\vec{r}=\mathbf{A}\cdot\vec{z}$ $\quad\vec{z}=\mathbf{B}\cdot\vec{p}$ $\quad\vec{r}=\mathbf{C}\cdot\vec{p}$ (siehe Merkhilfe)

im Beispiel:

$\vec{r}=\mathrm{C}\cdot\vec{p}$

$\vec{r}=\mathrm{A}\cdot\vec{z}$ $\qquad \vec{z}=\mathrm{B}\cdot\vec{p}$

Rohstoffe
R_1 - Kakao
R_2 - Milchpulver
R_3 - Zucker

Zwischenprodukte
Z_1 - Weiße Schokolade
Z_2 - Dunkle Schokolade

Endprodukte
E_1 - „Praline jour“
E_2 - „Praline nuit“

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}1&3\\1&0\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}72\\80\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}312\\72\\224\end{pmatrix}\quad\boxed{2}$$

$$\vec{z}=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}17\\21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}72\\80\end{pmatrix}\quad\boxed{1}$$

$$\boxed{3}\quad\vec{r}=\begin{pmatrix}6&10\\3&1\\7&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}17\\21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}312\\72\\224\end{pmatrix}$$

Beschreibung

Ausgehend von den benötigten Endprodukten (17 „Pralines jour“ und 21 „Pralines nuit“) wird „von rechts nach links“ gerechnet.

$\boxed{1}$ Über $\vec{z}=\mathrm{B}\cdot\vec{p}$ wird ermittelt, dass hierfür 72 EH Weiße Schokolade und 80 EH Dunkle Schokolade an Zwischenprodukten hergestellt werden müssen.

$\boxed{2}$ Die Rohstoffmengen, die wiederum hierfür eingekauft werden müssen, werden über $\vec{r}=\mathrm{A}\cdot\vec{z}$ errechnet. Man benötigt 312 EH Kakao, 72 EH Milchpulver und 224 EH Zucker.

$\boxed{3}$ Über $\vec{r}=\mathrm{C}\cdot\vec{p}$ kann direkt (Zwischenprodukte werden rechnerisch „übersprungen“) aus den bestellten Endprodukten die hierfür benötigten Rohstoffmengen berechnet werden.

Schnelle Berechnung
durch
GTR / CAS

mvurl.de/vz6k

4. Das Leontief-Modell

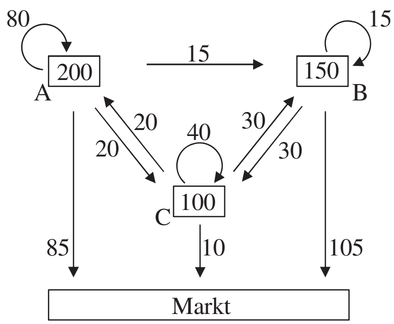
4.1 Input-Output-Tabelle, Gozintograph und Leontief-Annahme

Drei Zweigwerke eines Unternehmens beliefern sich gegenseitig und den Markt nach dem Leontief-Modell. Die Verflechtung kann durch die **Input-Output-Tabelle** oder durch ein **Verflechtungsdiagramm** (Gozintograph) dargestellt werden.

Input-Output-Tabelle

	(nach) Betrieb A	(nach) Betrieb B	(nach) Betrieb C	Markt $\vec{y}$	Produktion $\vec{x}$
(von) Betrieb A	80	15	20	85	200
(von) Betrieb B	0	15	30	105	150
(von) Betrieb C	20	30	40	10	100

Verflechtungsdiagramm



Beschreibung (am Beispiel: Betrieb A)

Betrieb A **gibt** 80 Mengeneinheiten (ME) an sich, 15 ME an B und 20 ME an C ab (der innerbetriebliche Absatz von A lautet also: $80+15+20=115$ ME)

Betrieb A gibt 85 ME an den Markt/Konsum ab.

Insgesamt muss Betrieb A also 200 ME ($=115+85$) herstellen.

Hinweise

Zeile : „geben“
Spalte : „nehmen“

- Interpretation der Spalte von A: Betrieb A **nimmt** 80 ME von sich selbst, keine Waren von B und 20 ME Waren von C.

- Ablesen aus Tabelle: Marktabgabevektor $\vec{y}=\begin{pmatrix}85\\105\\10\end{pmatrix}$ und Produktionsvektor $\vec{x}=\begin{pmatrix}200\\150\\100\end{pmatrix}$.

- **Leontief-Annahme**: „Die Lieferungen an einen Betrieb steigen oder fallen im gleichen Verhältnis wie die Produktion des Betriebes“.
Beispiel: Wenn Betrieb A statt 200 ME nun die doppelte Menge von 400 ME produzieren müsste, würde er hierfür 160 ME von sich und 40 ME von C, also die doppelten Mengen, benötigen.

mvurl.de/hxxn

4.2 Inputmatrix (Technologiematrix)

Die Inputmatrix gibt an, wie die Betriebe untereinander **technisch verflochten** sind. Sie ändert sich – im Gegensatz zur Input-Output-Tabelle - nicht, wenn die Betriebe im nächsten Jahr andere Menge produzieren.

Berechnung der Inputmatrix T:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{80}{200} & \frac{15}{150} & \frac{20}{100} \\ \frac{0}{200} & \frac{15}{150} & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{200} & \frac{30}{150} & \frac{40}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Vorgehen: **Spalte jedes Betriebs** durch <u>**seine**</u> **Produktion** teilen (z.B. Spalte von A durch 200 usw.).

Interpretation der Einträge von A (Inputkoeffizienten):

Beispielsweise gibt der Wert 0,3 (Eintrag in 2. Zeile, 3. Spalte) an:
Um 1 ME seines Produktes zu produzieren, benötigt der Betrieb C von Betrieb B 0,3 ME von dessen Produkt.

4.3 Leontief-Gleichung

Herleitung: Marktabgabe = Produktion − innerbetrieblicher Absatz

$$\vec{y} = \vec{x} \quad T \cdot \vec{x}$$

Gleichung: $\boldsymbol{\vec{y} = (E - T) \cdot \vec{x}}$

im Beispiel:

$$\vec{y} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \right) \cdot \vec{x}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,1 & -0,2 \\ 0 & 0,9 & -0,3 \\ -0,1 & -0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

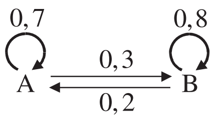
Bezeichnungen:
$\vec{y}$: Marktabgabe- bzw. Konsumvektor
$\vec{x}$: Produktionsvektor
T: Inputmatrix bzw. Technologiematrix

5. Übergangsprozesse (nur eA)

5.1 Stochastische Austauschprozesse

Beispiel: In Kaffhausen eröffnen zeitgleich zwei Discos A und B. Die Betreiber rechnen mit einer festen Anzahl an Jugendlichen, welche an jedem Samstag eine der beiden Discos besuchen.
Ein Besucher der Disco A besucht am Samstag der darauf folgenden Woche mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % wieder Disco A (und mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 % Disco B.)
Ein Besucher der Disco B besucht am Samstag der darauf folgenden Woche mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % wieder Disco B (und mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % Disco A.)

Darstellungsmöglichkeiten

<table>
<tr><th>Diagramm</th><th>Tabelle</th><th>Übergangsmatrix</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td><table>
<tr><td></td><td>nach A</td><td>nach B</td></tr>
<tr><td>von A</td><td>0,7</td><td>0,3</td></tr>
<tr><td>von B</td><td>0,2</td><td>0,8</td></tr>
</table></td>
<td>$A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$
• Stochastische Matrix mit **Wahrscheinlichkeiten**
• **Zeilensumme = 1**</td>
</tr>
</table>

Merkmale:
Eine **feste Anzahl** an beteiligten Objekten (z.B. Jugendliche), bewegen sich („tauschen“) gemäß **fester Wahrscheinlichkeiten** schrittweise (z.B. von Woche zu Woche) zwischen verschiedenen Zuständen (Discos).

Formel: $\overrightarrow{\boldsymbol{x}_{\text{alt}}}^{T} \cdot \mathbf{A} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}_{\text{neu}}}^{T}$ bzw. $\overrightarrow{\boldsymbol{x}_{\text{neu}}}^{T} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}_{\text{alt}}}^{T} \cdot \mathbf{A}$ (Reihenfolge je nach Aufgabenstellung)

Berechnung der Entwicklung

$\overrightarrow{x_0}^T$ (Anfangszustand)

$\overrightarrow{x_1}^T = \overrightarrow{x_0}^T \cdot A$

$\overrightarrow{x_2}^T = \overrightarrow{x_1}^T \cdot A = \overrightarrow{x_0}^T \cdot A \cdot A = \overrightarrow{x_0}^T \cdot A^2$

$\overrightarrow{x_3}^T = \overrightarrow{x_2}^T \cdot A = \overrightarrow{x_0}^T \cdot A^3$

...

Abkürzungen

$\overrightarrow{x_{...}}^T$: proz. Verteilung bzw. Anzahl im Zeitschritt ...

A : enthält Übergangswahrscheinlichkeiten von einem Zeitschritt zum nächsten

A^2 : enthält Übergangswahrscheinlichkeiten von einem Zeitschritt zum übernächsten

...

- Durch Multiplikation mit A erfolgt die Berechnung „von Zustand zu Folgezustand“.
- Bei „Springen“ über mehrere Zustände erhält A eine entsprechende Hochzahl.

Beispiel (Disco)

a) Am Eröffnungstag befinden sich 20 % der Jugendlichen in Disco A und 80 % der Jugendlichen in Disco B. Berechnen Sie die Verteilung für den ersten (auf den Eröffnungstag folgenden) Samstag. **(„Vorwärts")**

$\overrightarrow{x_0}^T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$; $\quad \overrightarrow{x_1}^T = \overrightarrow{x_0}^T \cdot A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$ **(Formel)**

Am (auf den Eröffnungstag folgenden) ersten Samstag besuchen 30 % der Jugendlichen Disco A und 70 % die Disco B.

b) Berechnen Sie die Verteilung für den zweiten Samstag. **(„Vorwärts")**

$\overrightarrow{x_2}^T = \overrightarrow{x_1}^T \cdot A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$ **(Formel)**

Alternativ $\overrightarrow{x_2}^T$ durch $\overrightarrow{x_2}^T = \overrightarrow{x_0}^T \cdot A^2$ berechnen:

$A^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{x_2}^T = \overrightarrow{x_0}^T \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$

c) Interpretieren Sie die Einträge der Matrix A^2.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$

Rechnen
„Vorwärts": Einsetzen in **Formel**
„Rückwärts": LGS (oder Inverse)

Z.B. 1. Zeile: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Jugendlicher, der heute Disco A besucht, in 2 Wochen wieder Disco A besucht, beträgt 55 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass er in 2 Wochen Disco B besucht, beträgt 45 %.

d) An einem Samstag besuchen 70 Jugendliche die Disco A und 130 Jugendliche die Disco B. Berechnen Sie hieraus die Besuchszahlen in der Vorwoche. **(„Rückwärts")**

Einsetzen in $\overrightarrow{x_{alt}}^T \cdot A = \overrightarrow{x_{neu}}^T$. Hierbei $\overrightarrow{x_{alt}}^T = \begin{pmatrix} x_1 & 200 - x_1 \end{pmatrix}$ da insg. 200 Jugendliche:

$\overrightarrow{x_{alt}}^T \cdot A = \overrightarrow{x_{neu}}^T \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & 200 - x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 & 130 \end{pmatrix}$

Ausmultiplizieren ergibt ein **LGS**. Da nur eine Unbekannte vorhanden ist, wird nur der erste Eintrag berücksichtigt: $0,7x_1 + (200 - x_1) \cdot 0,2 = 70 \Rightarrow 0,5x_1 = 30 \Rightarrow x_1 = 60$

Berechnung von x_2: $x_2 = 200 - x_1 = 200 - 60 = 140$

In der Vorwoche waren 60 Jugendliche in Disco A und 140 in Disco B.

Hinweis: Alternativer Lösungsweg durch $\overrightarrow{x_{alt}}^T = \overrightarrow{x_{neu}}^T \cdot A^{-1}$ (mit **inverser Matrix**, S. 140)

IV. Grundlagen Vektorgeometrie

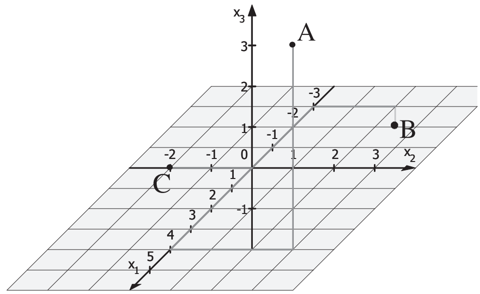
1. Punkte und Vektoren

1.1 Punkte (im $\mathbb{R}^3$)

Beispiel: $A(4|3|5)$

Vom **Ursprung** geht man
4 Einheiten nach vorne, 3 nach rechts und 5 Einheiten nach oben.

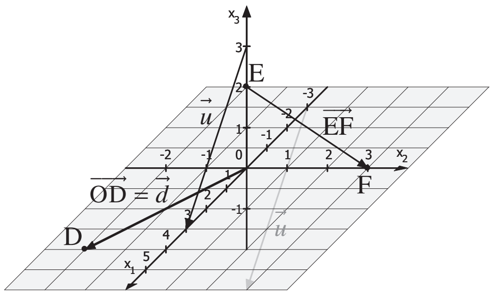
$B(-3|2|-0{,}5)$; $C(0|-2|0)$



1.2 Vektoren (im $\mathbb{R}^3$)

Beispiel: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Von einem beliebigen **Anfangspunkt** geht man
3 Einheiten nach vorne und
3 Einheiten nach unten.



Bemerkungen

- **Verbindungsvektor** zwischen 2 Punkten:

Beispiel: $E(0|0|2)$ und $F(0|3|0) \rightarrow \overrightarrow{EF} = \vec{f} - \vec{e} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 3-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

„Verbindungsvektor = Endpunkt − Startpunkt“

- **Spezielle Vektoren**

Nullvektor $\vec{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; Einheitsvektoren: $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

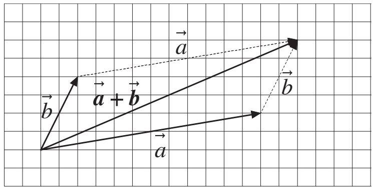
mvurl.de/pfct

2. Rechnen mit Vektoren

Addition und Subtraktion von Vektoren

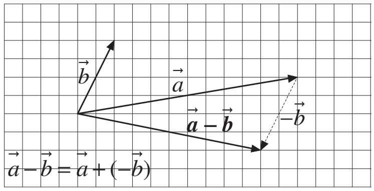
$$\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a_1}\\\boldsymbol{a_2}\\\boldsymbol{a_3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{b_1}\\\boldsymbol{b_2}\\\boldsymbol{b_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{b_1}\\\boldsymbol{a_2}+\boldsymbol{b_2}\\\boldsymbol{a_3}+\boldsymbol{b_3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}\quad\text{(Beispiel)}$$



$$\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a_1}\\\boldsymbol{a_2}\\\boldsymbol{a_3}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\boldsymbol{b_1}\\\boldsymbol{b_2}\\\boldsymbol{b_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a_1}-\boldsymbol{b_1}\\\boldsymbol{a_2}-\boldsymbol{b_2}\\\boldsymbol{a_3}-\boldsymbol{b_3}\end{pmatrix}$$

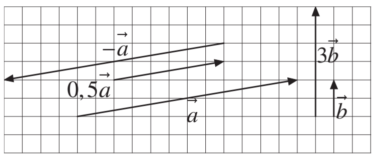
$$\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix}\quad\text{(Beispiel)}$$



Hinweis: Grafisch wird bei der Subtraktion der Gegenvektor $-\vec{b}$ addiert.

Skalare Multiplikation (Zahl · Vektor)

$$\boldsymbol{k}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a_1}\\\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a_2}\\\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a_3}\end{pmatrix}\ (k\in\mathbb{R})\qquad\text{Beispiel: }2\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\-8\end{pmatrix}$$



Bemerkungen

- Der Vektor $\boldsymbol{k}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}$ hat die $|k|$-fache Länge von $\vec{a}$ und ist **parallel (kollinear)** zu $\vec{a}$. Man nennt die beiden Vektoren auch **linear abhängig**.
- Der **Gegenvektor** $-\vec{\boldsymbol{a}}$ ist parallel und besitzt die gleiche Länge wie $\vec{a}$, ist jedoch entgegengesetzt gerichtet.

Beispiel: $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix};\ -\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$