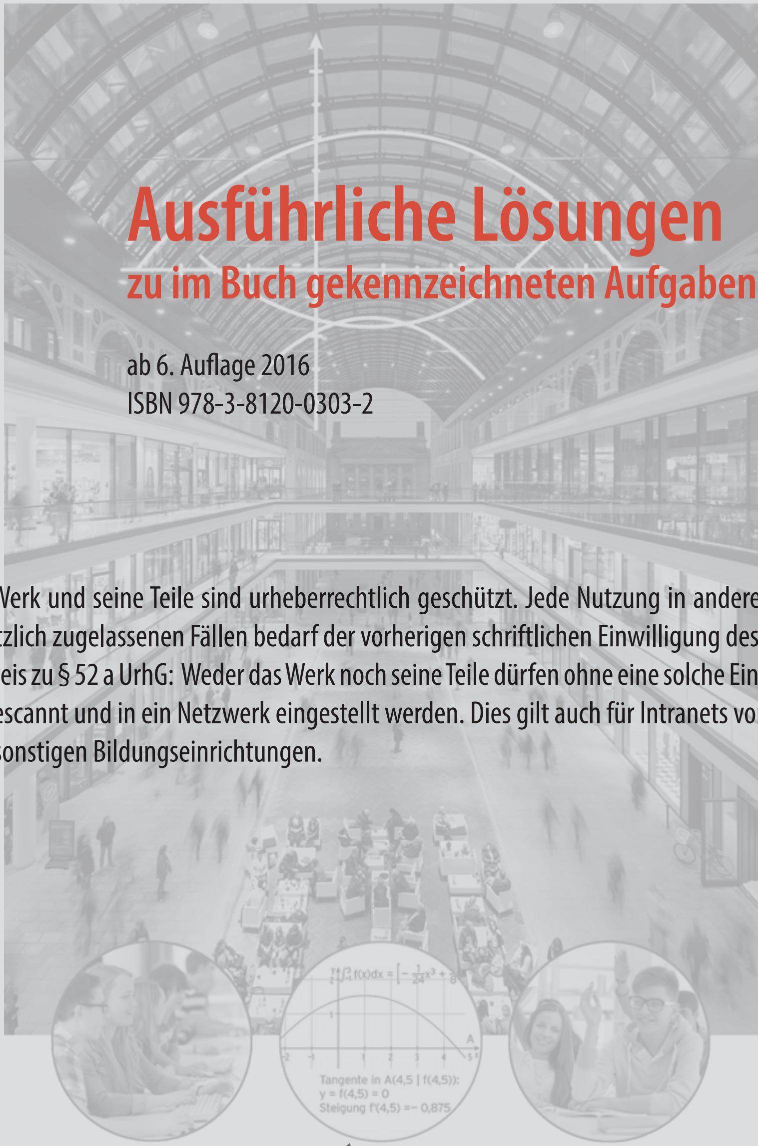
Bohner
Ott
Deusch

Mathematik im Berufskolleg II



Ausführliche Lösungen

zu im Buch gekennzeichneten Aufgaben

ab 6. Auflage 2016
ISBN 978-3-8120-0303-2

Merkur
Verlag Rinteln

Lehrbuch Seite 30

1 d) $f(x) = 4\cos(\pi x) + 3$; $|a| = 4$; $p = \frac{2\pi}{\pi} = 2$; $y = 3$ (Mittellinie)

e) $f(x) = 3 - 6\sin(\frac{x}{2})$; $|a| = 6$; $p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$; $y = 3$

f) $f(x) = -2\cos(\frac{\pi}{2}x) - 3$; $|a| = 2$; $p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$; $y = -3$

Lehrbuch Seite 37

6 a) $3\sin(x) - 2 = 0$ $\sin(x) = \frac{2}{3}$ WTR: $x = 0{,}73$

Mit Hilfe der Sinus-Kurve: $x = \pi - 0{,}73 = 2{,}41$

Weitere Lösungen durch Addition der Periode $p = 2\pi$ liegen nicht im gegebenen Intervall.

Lösungen: $x = 0{,}73$; $2{,}41$

b) $\sin(x) = \frac{1}{3}$ WTR: $x = 0{,}34$

Mit Hilfe der Sinus-Kurve: $x = \pi - 0{,}34 = 2{,}80$

Weitere Lösungen durch Addition der Periode $p = 2\pi$ liegen nicht im gegebenen Intervall.

Lösungen: $x = 0{,}34$; $x = 2{,}80$

c) $\sin(2x) = -\frac{3}{5} = -0{,}6$ WTR: $2x = -0{,}64$

$z = -0{,}64$ $z_1 = -0{,}64$; $z_2 = \pi + 0{,}64 = 3{,}78$

Mit $z = 2x$: $x = -0{,}32$; $1{,}89$

Weitere Lösungen im gegebenen Intervall durch Addition der Periode $p = \pi$:

$x = -0{,}32 + \pi = 2{,}82$; $x = 1{,}89 + \pi = 5{,}03$; $x = -0{,}32 + 2\pi = 5{,}96$

Lehrbuch Seite 40

2 a) $\cos(x) = -0{,}5$ WTR: $x = \frac{2}{3}\pi$

Wegen Symmetrie zur y-Achse: $x = -\frac{2}{3}\pi$

Weitere Lösungen durch Addition der Periode $p = 2\pi$: $x = -\frac{2}{3}\pi + 2\pi = \frac{4}{3}\pi$

$x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi > 6{,}5$

Lösungen: $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{4}{3}\pi$

b) $\cos(x) = 1$ WTR: $x = 0$

Weitere Lösungen durch Addition der Periode $p = 2\pi$: $x = 2\pi$

Lösungen: $x = 0; 2\pi$

c) $\cos(x) = -\frac{1}{4}$ WTR: $x = 1{,}82$

Wegen Symmetrie zur y-Achse: $x = -1{,}82$

Weitere Lösungen durch Addition der Periode $p = 2\pi$: $x = -1{,}82 + 2\pi = 4{,}46$

$x = 1{,}82 + 2\pi > 6{,}5$

Lösungen: $x = 1{,}82; 4{,}46$

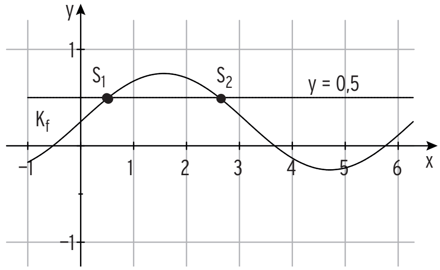
Lehrbuch Seite 45

4 a) $f(x) = 0{,}5\sin(x) + 0{,}25;\quad x \in [-1;\, 2\pi]$

$f(x) = 0$

$\sin(x) = -\frac{1}{2}$

Nullstellen von f: $-\frac{\pi}{6};\ \frac{7}{6}\pi;\ \frac{11}{6}\pi$



b) $f(x) = \frac{1}{2}$

$\sin(x) = \frac{1}{2}$

Schnittstellen: $x_1 = \frac{\pi}{6};\ x_2 = \frac{5}{6}\pi$

Schnittpunkte: $S_1(\frac{\pi}{6}\ |\ 0{,}5);\ S_2(\frac{5}{6}\pi\ |\ 0{,}5)$

c) $f^*(x) = 0{,}5\sin(x+2) + 0{,}25$

Um 2 nach links verschieben heißt x durch (x + 2) ersetzen.

Lehrbuch Seite 56

1 a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & -7 \\ 3 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \cdot(-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & 4 & 10 & 28 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 10 & 40 \end{array}\right)$

$x_3 = 4;\ x_2 = -3;\ x_1 = 2$; Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & 4 & 6 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right)$

$x_3 = 2{,}5;\ x_2 = -1;\ x_1 = 1$; Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 57

7 Es können x_1 ME an W_1, x_2 ME an W_2 und x_3 ME an W_3 hergestellt werden.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 448 \\ 0 & 4 & 1 & 442 \\ 1 & 0 & 3 & 330 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 448 \\ 0 & 4 & 1 & 442 \\ 0 & 1 & -7 & -542 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 448 \\ 0 & 4 & 1 & 442 \\ 0 & 0 & 29 & 2610 \end{array}\right)$$

$x_3 = 90$; $x_2 = 88$; $x_1 = 60$; Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 60 \\ 88 \\ 90 \end{pmatrix}$

Es können 60 ME an W_1, 88 ME an W_2 und 90 ME an W_3 hergestellt werden.

Lehrbuch Seite 63

2 c) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -0{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & -8 & -16 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -0{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & -8 & -16 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_3 = r$; $-8x_2 - 16r = 2 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{4} - 2r$;

$2x_1 + 4(-\frac{1}{4} - 2r) + 6r = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} + r$;

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 + r \\ -0{,}25 - 2r \\ r \end{pmatrix}$

d) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 25 \\ 1 & 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 25 \\ 0 & 5 & -15 & 5 \\ 0 & 2 & -6 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 25 \\ 0 & 5 & -15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_3 = r$; $5x_2 - 15r = 5 \Rightarrow x_2 = 1 + 3r$

$2x_1 + 5(1 + 3r) - r = 0 \Rightarrow x_1 = 10 - 7r$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 - 7r \\ 1 + 3r \\ r \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 64

9 $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$x_3 = r;\quad x_2 + 3r = 2 \Rightarrow x_2 = 2 - 3r$

$2x_1 - (2 - 3r) + r = -2 \Rightarrow x_1 = -2r$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2r \\ 2 - 3r \\ r \end{pmatrix}$

Einsetzen von $\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ -22 \\ 8 \end{pmatrix}$ ergibt z. B. $-15 = -2r$ und $8 = r$

Es gibt also kein r, so dass $\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ -22 \\ 8 \end{pmatrix}$ ein Lösungsvektor ist.

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$: $\quad -2r + 2 - 3r + r = 1 \Leftrightarrow r = 0{,}25$

spezielle Lösung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1{,}25 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 66

2 Es werden x_1, x_2, x_3 g der Präparate P1, P2, P3 genommen.

LGS:
$$\begin{aligned} 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}1x_3 &= 2 \\ 10x_1 + 10x_2 + 20x_3 &= 100 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}25x_3 &= 1{,}2 \end{aligned}$$

LGS in Matrixform: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 20 \\ 10 & 10 & 20 & 100 \\ 1 & 1{,}5 & 2{,}5 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 20 \\ 0 & -5 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$

$x_3 = 1;\quad -5x_2 + 15 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$

$2x_1 + 3 \cdot 3 + 1 = 20 \Rightarrow x_1 = 5$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Mischung enthält 5 g von P_1, 3 g von P_2 und 1 g von P_3.

Lehrbuch Seite 72

4 $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$

a) Mittlere Änderungsrate auf [2; 5]:

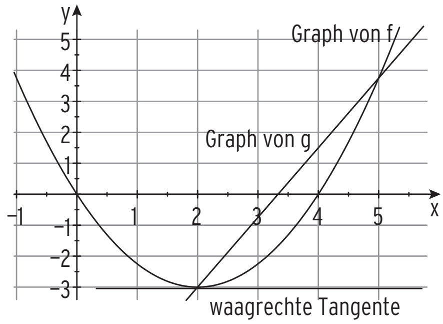
$\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = 2{,}25$

b) Sekante g durch P(2 | − 3) und

Q(5 | 3,75):

g: $y = 2{,}25x - 7{,}5$

Schaubilder von f und g:



c) Momentane Änderungsrate in x = 2:

$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{\frac{3}{4}(2 + h)^2 - 3(2 + h) + 3}{h} =$

$= \frac{3 + 3h + \frac{3}{4}h^2 - 6 - 3h + 3}{h} = \frac{3}{4}h \to 0$ für $h \to 0$

Die Steigung des Graphen von f an der Stelle x = 2 ist null,
waagrechte Tangente.

Lehrbuch Seite 90

4 $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x-3) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2$; $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$

a) Tangente in $W(1 \mid -\frac{1}{2})$: $f'(1) = -\frac{3}{4}$:

Einsetzen in $y = mx + b$: $-\frac{1}{2} = -\frac{3}{4} + b \Rightarrow b = \frac{1}{4}$

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

b) Stellen mit Steigung $\frac{9}{4}$

Bedingung: $f'(x) = \frac{9}{4}$	$\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{9}{4}$
Lösungen:	$x_1 = 3$; $x_2 = -1$
Tangente in $x_1 = 3$:	$y = \frac{9}{4}x - \frac{27}{4}$
Tangente in $x_2 = -1$:	$y = \frac{9}{4}x + \frac{5}{4}$

c) Stellen mit Steigung $-\frac{2}{3}$ (negativer Kehrwert von 1,5)

Bedingung: $f'(x) = -\frac{2}{3}$	
Stellen:	$x_1 = \frac{4}{3}$; $x_2 = \frac{2}{3}$
Tangente in $x_1 = \frac{4}{3}$:	$y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{27}$
Tangente in $x_2 = \frac{2}{3}$:	$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{27}$

d) Punkte mit waagrechter Tangente

Bedingung: $f'(x) = 0$	
Stellen:	$x_1 = 0$; $x_2 = 2$
Punkte:	$O(0 \mid 0)$; $E(2 \mid -1)$

e) Stellen mit Steigung $-\frac{5}{12}$ (negativer Kehrwert von $2{,}4 = \frac{12}{5}$)

Bedingung: $f'(x) = -\frac{5}{12}$	
Stellen:	$x_1 = \frac{5}{3}$; $x_2 = \frac{1}{3}$
Kurvenpunkte:	$P_1(\frac{5}{3} \mid -\frac{25}{27})$; $P_2(\frac{1}{3} \mid -\frac{2}{27})$

Lehrbuch Seite 91

16 $f(x) = 3x - \frac{1}{2}x^2$; $f'(x) = 3 - x$

Steigung in $x = 4$: $f'(4) = -1$

Steigung -1 entspricht einem Steigungswinkel von 135° (bzw. 45°).
Der Geländewagen kommt die Rampe wahrscheinlich nicht hoch.

Lehrbuch Seite 94

3 Gemeinsame Punkte aus der Zeichnung oder durch Berechnung.

$f(x) = g(x)$ $\qquad -\frac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 32) = x^2 - 4$

$-\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2 = 0$

Ausklammern: $\qquad -x^2\left(\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}\right) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $\qquad x_{1|2} = 0$; $x_3 = -2$

Berührpunkt in $S(0\,|\,-4)$: $\qquad f(0) = g(0) = -4$ und $f'(0) = g'(0) = 0$

Schnittpunkt in $S(-2\,|\,0)$: $\qquad f(-2) = g(-2) = 0$

und $f'(-2) = -4{,}5 \neq g'(-2) = -4$

Lehrbuch Seite 97

5 K → C: K hat für $-2 < x < 2$ eine positive Steigung,
C verläuft für $-2 < x < 2$ oberhalb der x-Achse.
K ist der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades,
C eine Parabel.

G → B: G ist steigend.
Die Ableitungsfunktion hat keine Nullstelle, sie nimmt nur positive Werte an.

H → A: H hat in $x \approx 1{,}7$ eine waagrechte Tangente.
Die Ableitungsfunktion hat in $x \approx 1{,}7$ eine Nullstelle.
Die Steigung von H in $x = 0$ ist ca. -2, dies entspricht dem y-Achsenabschnitt von A.

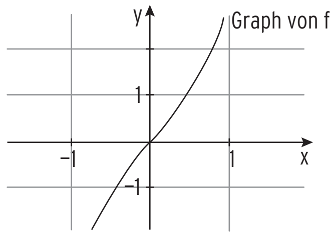
Lehrbuch Seite 103

6 a) $f'(x) > 1$

Die Steigung des Graphen von f ist größer als 1, f ist streng monoton wachsend.

Z. B. $f(x) = x^3 + 2x$

oder z. B. $f(x) = 2x$

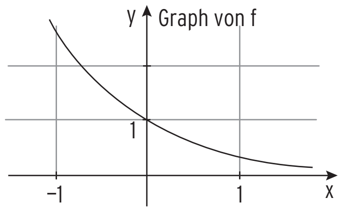


b) $f'(x) \leq 0$

f ist monoton fallend.

Z. B. $f(x) = e^{-x}$

der Graph von f kann z. B. auch eine Parallele zur x-Achse sein.



c) $f'(x) \in [0; 2]$

f ist (streng) monoton wachsend.

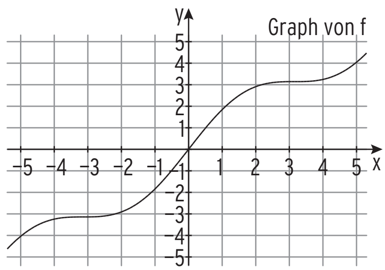
Steigungen zwischen 0 und 2

Z. B. $f(x) = x + \sin(x)$

Waagrechte Tangente in $x = \pm\,\pi$

oder

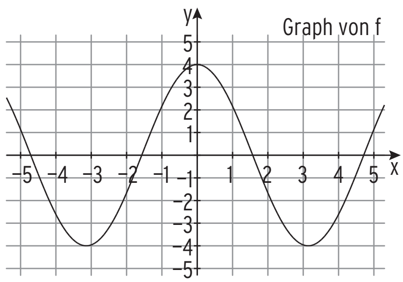
z. B. $f(x) = 1{,}5x$



d) $f(x) \in [-4; 4]$

Funktionswerte zwischen − 4 und 4

Z. B. $f(x) = 4\cos(x)$



Lehrbuch Seite 109

1 a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 2$; $f'(x) = -\frac{1}{2}x + 1$; $f''(x) = -\frac{1}{2} < 0$

Bedingung: $f'(x) = 0$ $\qquad -\frac{1}{2}x + 1 = 0$

$x_1 = 2$

$f''(2) < 0$ und $f(2) = -1$ ergibt $H(2 \mid -1)$.

b) $f(x) = x^3 - 3x$; $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$

Bedingung: $f'(x) = 0$ $\qquad 3x^2 - 3 = 0$

$x_{1|2} = \pm 1$

Mit $f''(-1) = -6 < 0$ und $f(-1) = 2$ erhält man $H(-1 \mid 2)$

Mit $f''(1) = 6 > 0$ und $f(1) = -2$ erhält man $T(1 \mid -2)$

c) $f(x) = 2(e^x - x)$; $f'(x) = 2(e^x - 1)$; $f''(x) = 2e^x$

Bedingung: $f'(x) = 0$ $\qquad 2(e^x - 1) = 0$

$x_1 = 0$

Mit $f''(0) > 0$ und $f(0) = 2$ erhält man $T(0 \mid 2)$.

d) $f(x) = 3\cos(x)$; $x \in]-1; 5[$; $f'(x) = -3\sin(x)$; $f''(x) = -3\cos(x)$

Bedingung: $f'(x) = 0$ $\qquad -3\sin(x) = 0$

$x_1 = 0; \pi; 2\pi; \ldots$

Mit $f''(0) < 0$ und $f(0) = 3$ erhält man $H(0 \mid 3)$.

Mit $f''(\pi) > 0$ und $f(\pi) = -3$ erhält man $T(\pi \mid -3)$.

Hinweis:
Kosinuskurve: $H(0 \mid 1)$; $T(\pi \mid -1)$
Das Schaubild von f erhält man durch Streckung von G: $y = \cos(x)$
in y-Richtung mit Faktor 3:
$H(0 \mid 3)$; $T(\pi \mid -3)$

Lehrbuch Seite 117

4 a) $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{2}x$; $f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{3}{2}$; $f''(x) = \frac{9}{4}x$

$W(0 \mid 0)$; $f'(0) = -\frac{3}{2}$ Wendetangente: $y = -\frac{3}{2}x$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 5$; $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$; $f''(x) = 6x - 6$

$W(1 \mid 2)$; $f'(1) = -4$ Wendetangente: $y = -4x + 6$

c) $f(x) = 2\cos(2x)$; $0 < x < 3$; $f'(x) = -4\sin(2x)$; $f''(x) = -8\cos(2x)$

Wendepunkte: $W_1(\frac{\pi}{4} \mid 0)$; $W_2(\frac{3\pi}{4} \mid 0)$

Wendetangente: $y = -4x + \pi$ $y = 4x - 3\pi$

Lehrbuch Seite 118

19 $f'(x) = 0$ für $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$:

f hat zwei Stellen mit waagrechter Tangente;

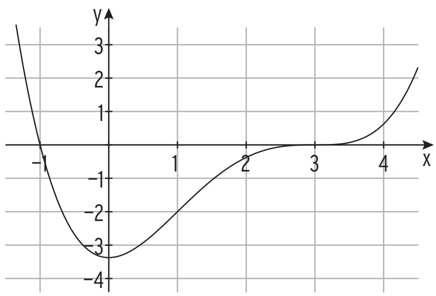
f′ ist eine Polynomfunktion 3. Grades

$f''(3) = 0$
$f''(2{,}9) < 0$;
$f''(3{,}1) > 0$
Die 3 Bedingungen bedeuten: Bei $x_2 = 3$ wechselt $f''(x)$ das Vorzeichen von minus nach plus, x_2 ist Wendestelle.
Bei $x_2 = 3$ liegt ein Krümmungswechsel von Rechtskurve zu Linkskurve vor.
$f'(-1) < 0$ und $f'(1) > 0$:

Zwischen − 1 und 1 liegt eine

Minimalstelle (VZW von $f'(x)$ von −/+)

Tiefpunkt $T(0|\ f(0))$



Lehrbuch Seite 131

4 Ansatz: $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$

Ableitung: $f'(x) = 3a\,x^2 + 2bx + c$

Bedingungen:

geht durch den Ursprung: $f(0) = 0 \quad d = 0$

durch $A\,(2\,|\,1)$: $f(2) = 1$: $\quad 8a + 4b + 2c + d = 1$

an der Stelle $x = 1$ eine waagrechte Tangente: $f'(1) = 0 \quad 3a + 2b + c = 0$

In $x = 3$ eine waagrechte Tangente: $f'(3) = 0 \quad 27a + 6b + c = 0$

LGS ($d = 0$ eingesetzt):
$$8a + 4b + 2c = 1$$
$$3a + 2b + c = 0$$
$$27a + 6b + c = 0$$

In Matrixform: $\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 27 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -46 & -8 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$a = \frac{1}{2}$; $b = -3$; $c = \frac{9}{2}$; $d = 0$ $\qquad$ Funktionsterm: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x$

A ist der Wendepunkt.

(Eine waagrechte Tangente in $x = 1$ bzw. $x = 3$ ergibt die Wendestelle $x_W = 2$.)

5 f mit $f(x) = a\sin(kx) + c$

Man liest ab:

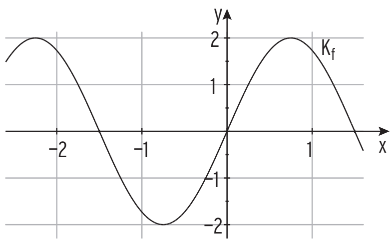
Amplitude $a = 2$

keine Verschiebung in y-Richtung: $c = 0$

Periode $p = \pi$ (Nullstellen bei 0 und $\pm\frac{\pi}{2}$)

also $k = 2$

$f(x) = 2\sin(2x)$



Lehrbuch Seite 132

14 $f(x) = a e^{-x} + bx$; $f'(x) = -a e^{-x} + b$

$h(x) = -x(x-3) = -x^2 + 3x$; $h'(x) = -2x + 3$

Bedingungen: $f(1) = a e^{-1} + b = h(1) = 2$

und $f'(1) = -a e^{-1} + b = h'(1) = 1$

Gleichungssystem: $a e^{-1} + b = 2$

$-a e^{-1} + b = 1$

Addition ergibt: $2b = 3 \Rightarrow b = 1{,}5$

Einsetzen: $a e^{-1} + 1{,}5 = 2$

$a e^{-1} = 0{,}5 \quad | \cdot e \qquad e^{-1} \cdot e = 1$

$a = 0{,}5e$

Ergebnis: $a = 0{,}5e$; $b = 1{,}5$ und $f(x) = 0{,}5e \cdot e^{-x} + 1{,}5x$

Lehrbuch Seite 138

4 Abstand: $d(x) = e^{-2x} + x + 1 - (-x + 1) = e^{-2x} + 2x$

$d'(x) = -2e^{-2x} + 2$; $d''(x) = 4e^{-2x} > 0$

$d'(x) = 0$ $\quad -2e^{-2x} + 2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$d''(0) = 4 > 0$

d wird minimal für $x = 0$.

Minimaler Abstand: $d(0) = 1$

Randwertuntersuchung: $d(-1) = 5{,}39$

$d(1) = 2{,}14$

Der minimale Abstand beträgt 1 m.

6 Abstand: $d(x) = 0{,}021x^2 - 1{,}072x + 25 - 0{,}2x$

$d(x) = 0{,}021x^2 - 1{,}272x + 25;\ 0 \leq x \leq 70$

Ableitungen: $d'(x) = 0{,}042\,x - 1{,}272$; $d''(x) = 0{,}042$

$d'(x) = 0$ $\quad 0{,}042\,x - 1{,}272 = 0 \Rightarrow x = 30{,}3$

Mit $d''(x) > 0$ gilt: d wird minimal für $x = 30{,}3$.

Minimaler Abstand: $d(30{,}3) = 5{,}7$

Randwertuntersuchung: $d(0) = 25$

$d(70) = 38{,}86$

Der minimale Abstand beträgt 5,7 m, die Vorschrift wird eingehalten.

Lehrbuch Seite 141

4 $h(t) = 184 - 184\,e^{-0{,}135t}$; $h'(t) = 24{,}84\,e^{-0{,}135t}$

Langfristig kann der Supermarkt mit 184 wöchentlich verkauften Tuben

rechnen. Das Schaubild von h hat die Asymptote mit der Gleichung $y = 184$.

Momentane Änderungsrate in $t = 1$: $h'(1) = 21{,}7$;

in $t = 20$: $h'(20) = 1{,}7$

Zu Beginn nimmt die Verkaufszahl um 21,7 Tuben pro Woche zu,

nach 20 Wochen ist die Zuwachsrate geringer, mit nur noch 1,7 Tuben pro Woche.

Lehrbuch Seite 144

3 a) Ansatz: $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$; $s'(t) = 3at^2 + 2bt + c$; $s''(t) = 6at + 2b$

Bedingungen:

In $t = 0$ sind Weg und Geschwindigkeit gleich null: $s(0) = 0$

$s'(0) = v(0) = 0$

der Sprinter beschleunigt mit $3\,m/s^2$: $s''(0) = 3$

Bei $t = 7{,}5$ ist die Beschleunigung null: $s''(7{,}5) = 0$

LGS: $d = 0$

$c = 0$

$2b = 3 \Rightarrow b = 1{,}5$

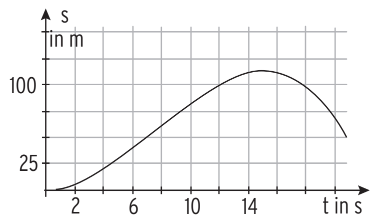
$45a + 2b = 0$

Mit $b = 1{,}5$ ergibt sich $a = -\frac{1}{15}$

$s(t) = -\frac{1}{15}t^3 + \frac{3}{2}t^2$; $v(t) = s'(t) = -\frac{1}{5}t^2 + 3t$

b) Für $t < 7{,}5$ nimmt die Geschwindigkeit zu:

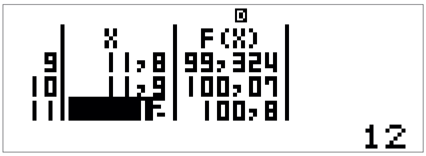
$s''(t) > 0$ (Wendestelle $t = 7{,}5$)



c) Laufzeit $s(t) = 100$ für $t = 11{,}89$ (s)

Z. B. mit einer

verfeinerten Wertetabelle im WTR.



d) Mittlere Geschwindigkeit: $v = \frac{100}{11{,}9} = 8{,}4$

Größte Geschwindigkeit:

$v'(t) = s''(t) = 0$ für $t = 7{,}5$; $v_{max} = v(7{,}5) = 11{,}25$

Die größte Geschwindigkeit nach 7,5 s ist 11,25 $\frac{m}{s}$.

Lehrbuch Seite 156

3 a) $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) + c$; $F(\pi) = 0$ ergibt $c = 0$

$F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x)$

b) $F(x) = x^3 - 3x^2 + c$; $F(0) = -1$ ergibt $c = -1$

$F(x) = x^3 - 3x^2 - 1$

c) $F(x) = -0{,}125\,e^{-2x} + \frac{1}{3}x^3 + 3x + c$;

$F(-1) = 2$ ergibt: $-0{,}125\,e^2 - \frac{1}{3} - 3 + c = 2 \Rightarrow c = 0{,}125\,e^2 + \frac{16}{3}$ (= 6,26)

$F(x) = -0{,}125\,e^{-2x} + \frac{1}{3}x^3 + 3x + 0{,}125\,e^2 + \frac{16}{3}$

d) $F(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + c$; $F(2) = \frac{2}{3}$ ergibt $c = 4$

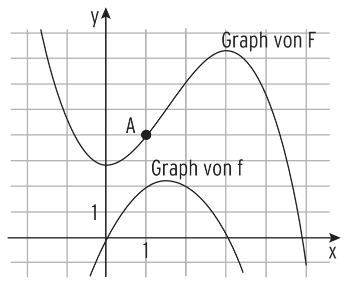
$F(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + 4$

e) $F(x) = 3x^2 + \frac{8}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + c$; $F(-1) = 0$ ergibt $c = -3$

$F(x) = 3x^2 + \frac{8}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 3$

Lehrbuch Seite 160

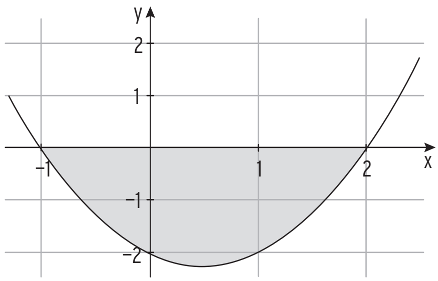
9 Nullstelle von f ≙ Extremstelle von F



Lehrbuch Seite 176

3 a) Nullstellen: − 1; 2

Skizze:



$\int_{-1}^{2} (x-2)(x+1)dx$

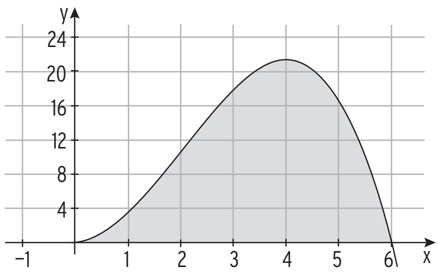
$= \int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)dx = -\frac{9}{2}$

$A = \frac{9}{2}$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$

b) Nullstellen: 0 ; 6

Skizze:

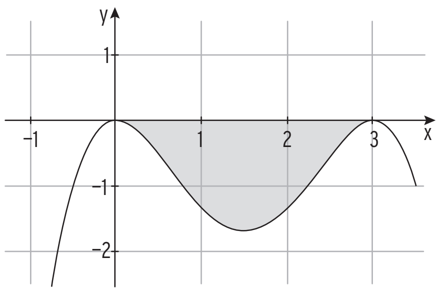


$\int_{0}^{6}(-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2)dx = 72$

$F(x) = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{4}{3}x^3$

c) Nullstellen: 0; 3

Skizze:



$\int_{0}^{3}(-\frac{1}{3}x^4 + 2x^3 - 3x^2)dx = -\frac{27}{10}$

$A = \frac{27}{10}$

$F(x) = -\frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - x^3$

Lehrbuch Seite 178

18 Giebelrand: $f(x) = \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4$

Probe: f(4) = 0; Symmetrie zur y-Achse

$2\int_0^4 f(x)dx = 2\left[\frac{1}{320}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + 4x\right]_0^4 = 17{,}07$

Fläche zum Streichen: 17,07 m^2

Farbverbrauch: $350\ cm^3 \cdot 17{,}07 = 5974{,}5\ cm^3$

$2 \cdot 5974{,}5\ cm^3 = 11{,}949$ Liter

Es müssen mindestens 3 Dosen Farbe geliefert werden. (2 Dosen zu je 5 Liter reichen nicht.)

Lehrbuch Seite 182

4 a) $f(x) = 0{,}5(x^2 - 1)$; $g(x) = -0{,}5x - 1$ kein Schnittpunkt

K verläuft oberhalb von G

$\int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,dx = 4{,}67$;

A = 4,67

b) K: $f(x) = x(x - 2)$; Normalparabelform

G: $g(x) = 2\sin(\frac{\pi}{2}x)$

Schnittstellen: x = 0 und x = 2

K verläuft unterhalb von G auf [0; 2]

$\int_{0}^{2} (f(x) - g(x))\,dx = -3{,}88$

A = 3,88

Lehrbuch Seite 185

1 a) $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = -x + 3$

Schnittstelle von f und g: $x_1 = 1$

$\int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = -\frac{7}{6}$;

$\int_1^2 (f(x) - g(x))\,dx = \frac{11}{6}$ $A = \frac{7}{6} + \frac{11}{6} = 3$

b) $f(x) = x^3 - x$; $g(x) = 3x$

Schnittstellen von f und g: $x_1 = 0$; $x_{2|3} = \pm 2$

$\int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx = -4$

Wegen der Symmetrie der beiden Kurven zum Ursprung: $A = 8$

c) $f(x) = 2\cos(x) + 1$; $g(x) = 1$

Schnittstellen von f und g: $x_{1|2} = \pm 0{,}5\pi$

$\int_0^{0{,}5\pi} (f(x) - g(x))\,dx = 2$

Beide Kurven sind symmetrisch zur y-Achse,

die Fläche besteht aus drei gleichgroßen Teilen: $A = 3 \cdot 2 = 6$

Lehrbuch Seite 192

1 $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$; $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x$; $f''(x) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$; $f'''(x) = \frac{3}{4}$

a) Wendepunkt: $f''(x) = 0$ für $x = 2$

$f'''(2) \neq 0$; $f(2) = 2$ ergibt den Wendepunkt $W(\,2 \mid 2)$;

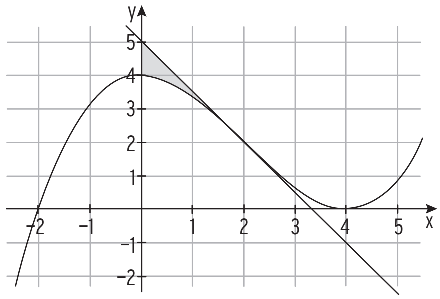
Mit $f'(2) = -\frac{3}{2}$ und Punktprobe mit W in $y = -\frac{3}{2}x + b$:

Wendetangente mit $y = -\frac{3}{2}x + 5$

Fläche zwischen Wendetangente und Kurve:

$\int_0^2 \left(-\frac{3}{2}x + 5 - f(x)\right) dx = \frac{1}{2}$;

$A = \frac{1}{2}$



b) $f(-2) = 0$; $f(6) = 4$ ergibt Steigung $m = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Punktprobe mit $(6 \mid 4)$ in $y = 0{,}5x + b$ ergibt $b = 1$.

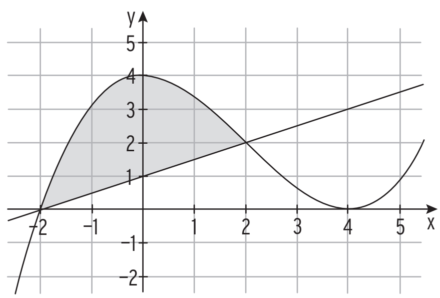
Gerade g mit $g(x) = 0{,}5x + 1$

Schnittstellen:

$x_1 = -2$; $x_2 = 2$; $x_3 = 6$

$\int_{-2}^2 \left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\right) dx = 8$

$A = 8$



c) Fläche setzt sich aus 2 Flächenstücken zusammen.

Dreiecksfläche: $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$

$\int_2^4 f(x)dx = 1{,}5$;

$A = 4 + 1{,}5 = 5{,}5$

Lehrbuch Seite 193

10 Steigung der Tangente $f'(0) = \pi$

Tangente t_1 mit Steigung π durch $(0 \mid 1)$: $t_1(x) = \pi x + 1$

Die Gerade mit $y = t_2(x) = -\pi x + 2\pi + 1$ ist Tangente an K_f an der Stelle

$x_2 = 2$, da $m = f'(2) = -\pi$ und $(2 \mid 1)$ liegt auf K_f und auf der Geraden:

$f(2) = t_2(2) = 1$

Die Fläche ist symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = 1$.

$\int_0^1 (t_1(x) - f(x))dx = \int_0^1 (\pi x + 1 - (2\sin(\frac{\pi}{2}x) + 1))dx = \int_0^1 (\pi x - 2\sin(\frac{\pi}{2}x))dx$

$= \left[\frac{\pi}{2}x^2 + \frac{4}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}x) \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}$

Flächeninhalt: $A = 2(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}) = \pi - \frac{8}{\pi}$

Lehrbuch Seite 197

1 a) $\int_{-4}^{4} (8 - f(x))dx = 34{,}13$; $A = 34{,}13$

Der Wasserquerschnitt ist etwa 34 dm^2 groß.

b) Höhe 3,5: Bedingung: $f(x) = 3{,}5$ $\quad -\frac{1}{32}x^4 + x^2 = 3{,}5$

Durch Substitution erhält man: $\quad x_{1|2} = \pm 2 \quad (x_{3|4} = \pm 5{,}29)$

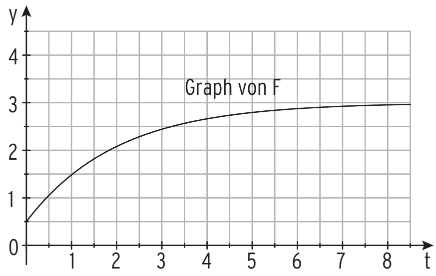
$\int_{-2}^{2} (3{,}5 - f(x))dx = 9{,}07$

Es fließen $\frac{9{,}07}{34{,}13} = 26{,}6$ % der maximalen Wassermenge.

Lehrbuch Seite 202

1 a) Schaubild einer Stammfunktion F von v mit F(0) = 0,5

$F(t) = -2{,}5e^{-0{,}5t} + 3$



b) $\int_0^1 v(t)\,dt$: Höhenzuwachs im 1. Jahr

$\int_1^4 v(t)\,dt$: Höhenzuwachs vom 1. bis zum 4. Jahr

$0{,}5 + \int_0^4 v(t)\,dt$: Höhe nach 4 Jahren

Lehrbuch Seite 203

7 Entnahmegeschwindigkeit in m^3 pro Stunde: $f(x) = 24x - x^2$; $0 \leq x \leq 24$

a) $\int_2^3 f(x)dx = 53{,}67$

Zwischen 2 Uhr und 3 Uhr werden dem Speicher 53,67 m^3 Wasser entnommen.

b) $800 - \int_0^5 f(x)dx = 541{,}67$

$\int_0^5 f(x)dx$ gibt die Entnahme in den ersten 5 Stunden an.

Zu Beginn sind 800 m^3 im Speicher.

Im Wasserspeicher sind nach 5 Stunden noch 541,67 m^3 Wasser.