Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Norbert Lengersdorf
Oberstudienrat am Berufskolleg für Wirtschaft und Verwaltung in Herzogenrath

Umschlag: Kreis links: www. adpic.de
Kreis rechts: Robert Kneschke – Fotolia.com

* * * * *

15. Auflage 2023

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0478-15
ISBN 978-3-8120-1049-8

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung enthält auf die neue Prüfungsordnung für das Berufskolleg mit gymnasialer Oberstufe in Nordrhein-Westfalen abgestimmte Aufgaben zur Vorbereitung auf das Abitur 2024 an beruflichen Gymnasien im Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung. **Alle Aufgaben sind entspechend den Abiturvorgaben 2024 ausgewählt worden.**
Die zentrale Abiturprüfung 2024 besteht aus zwei Teilen, einem hilfsmittelfreien Prüfungsteil A und einem Prüfungsteil B mit Hilfsmittel (GTR/CAS).
Die Aufgaben für den Grundkurs sind gegliedert nach den Prüfungsgebieten:
Analysis mit Anwendungen, Stochastik und Lineare Algebra.

Im Analysis-Teil werden als thematischer Schwerpunkt die ganzrationalen Funktionen und die Exponentialfunktionen und die Modellierung von berufsbezogenen Anwendungen mit Hilfe dieser Funktionstypen verlangt. Dabei handelt es sich um das Modell des Angebotsmonopols sowie die Absatz-/Umsatzentwicklung.
Die Stochastik behandelt fokussiert die bedingte Wahrscheinlichkeit, die Binomialverteilung mit Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung und den einseitigen Hypothesentest.
Die Lineare Algebra hat den Schwerpunkt Lineare Gleichungssysteme sowie mehrstufige Produktionsprozesse als ökonomische Anwendung.

Die Einteilung nach Prüfungsgebieten ermöglicht ein gezieltes Üben.
Die Aufgaben sind als Übungsaufgaben zu verstehen, sowohl im Umfang als auch in den Fragestellungen. Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.
Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.

Da die Aufgabensammlung allen Schüler/innen bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben.
An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.
Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung 2024

Grundkurs

Aufgabenteil A Bearbeitung ohne Hilfsmittel				Aufgabenteil B Bearbeitung mit Hilfsmittel	
Pflichtaufgaben		Wahlaufgaben (zwei aus vier, davon eine Analysis)		Pflichtaufgaben	
Analysis	5	Analysis	5	Analysis	25
Stochastik	5	Analysis	5	Stochastik	25
Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	5	Stochastik	5	Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	25
		Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	5		
Summe	15	Summe	10	Summe	75
Gesamtsumme: 100 BE + 5 BE (Darstellungsleistung) = **105 BE**					

Mindestens zwei der Teilaufgaben im Aufgabenteil A haben **Anwendungsbezug.**

Die Aufgaben sowohl im Teil A als auch im Teil B bestehen jeweils aus Teilaufgaben.

Organisation

Zu Beginn der Bearbeitungszeit erhält der Prüfling die beiden zu bearbeitenden Aufgabenteile A und B. Die zugelassenen Hilfsmittel (GTR, CAS, Formelsammlung) werden noch nicht ausgegeben.

Der Prüfling gibt individuell nach Bearbeitung den Aufgabenteil A und seine Ausarbeitungen zum Aufgabenteil A ab und erhält im Gegenzug Zugang zu den zugelassenen Hilfsmitteln.

SchülerIn bearbeitet alle Aufgaben.

Die Gesamtbearbeitungszeit für beide Prüfungsteile beträgt im Grundkurs einschließlich Auswahlzeit 255 Minuten.

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist in beiden Prüfungsteilen der Klausur zugelassen.

I Hilfsmittelfreier Teil A der Zentralen Abiturprüfung

Dieser Teil der Abiturprüfung enthält 3 Aufgaben entsprechend den Abiturvorgaben, davon mindestens zwei mit Anwendungsbezug.

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis

Lösungen Seite 19

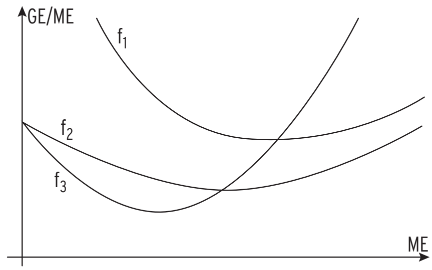
Aufgabe 1 **Punkte**

Zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a, c, d > 0$, $b < 0$,

x in ME, K(x) in GE,

sind in der nebenstehenden Abbildung die Graphen der Grenzkostenfunktion, der Stückkostenfunktion und der variablen Stückkostenfunktion dargestellt.

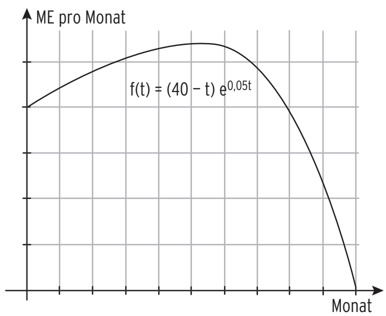


1.1 Ordnen Sie dem jeweiligen Graphen die entsprechende ökonomische Funktion begründet zu. 3

1.2 Beweisen Sie, dass die betriebsminimale Ausbringungsmenge bei $x = -\frac{b}{2a}$ liegt. 3

Aufgabe 2

Die monatlichen Absatzzahlen eines Produkts werden mit $f(t) = (40 - t)e^{0,05t}$, (t in Monaten, f(t) in ME/Monat) modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



2.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, bis zu dem das Produkt auf dem Markt abgesetzt werden kann. 2

2.2 Zeigen Sie, dass der Zeitpunkt des maximalen monatlichen Absatzes bei t = 20 liegt. 4

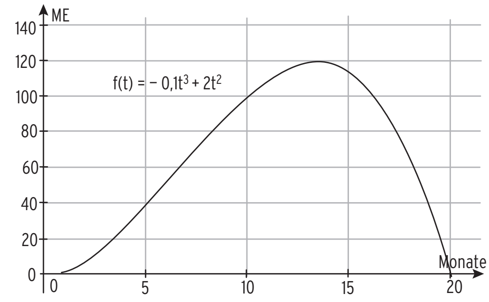
($f''(t) = -\frac{1}{400}\, t\, e^{0,05t}$ kann verwendet werden.)

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis

Lösungen Seite 20

Aufgabe 3

Punkte

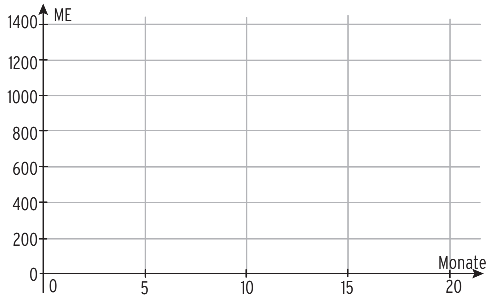


Die monatlichen Absatzzahlen eines neuartigen Produkts werden mit

$f(t) = -\frac{1}{10}t^3 + 2t^2$

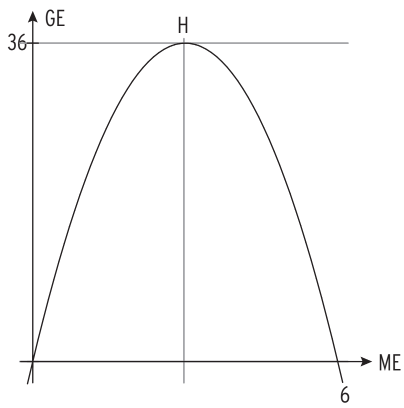
(t in Monaten, f(t) in ME/Monat) modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.

3.1 Bestimmen Sie die in den ersten 20 Monaten insgesamt abgesetzte Menge. 3



3.2 Skizzieren Sie in das nebenstehende Koordinatensystem den Graphen der Funktion, die den Gesamtabsatz in Abhängigkeit von der Zeit angibt. 3

Aufgabe 4



a) Bestimmen Sie den Funktionsterm für die Erlösfunktion unter der Voraussetzung, dass es sich um eine ganzrationale Funktion 2. Grades handelt.

b) Ergänzen Sie den Graphen der 1. Ableitung in das Koordinatensystem. Beschreiben Sie den Verlauf des Ableitungsgraphen mathematisch und ökonomisch.

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis

Lösungen Seite 21

Aufgabe 5

Punkte

Die folgende Tabelle gibt die Stückkosten k, die variablen Stückkosten k_v und die Grenzkosten K′ zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K an (x in ME; K(x) in GE):

x	1	2	3	4	5	6	7	8
k(x)	201,0	124,0	97,0	84,0	77,8	76,0	77,6	82,0
$k_v(x)$	57,0	52,0	49,0	48,0	49,0	52,0	57,0	64,0
K′(x)	51,0	44,0	43,0	48,0	59,0	76,0	99,0	128,0

Beurteilen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussagen allein unter Zuhilfenahme der Tabellenwerte:

1.1 Das Betriebsminimum liegt bei 4 ME. 2

1.2 Die Kosten steigen zwischen 0 und 4 ME degressiv. 2

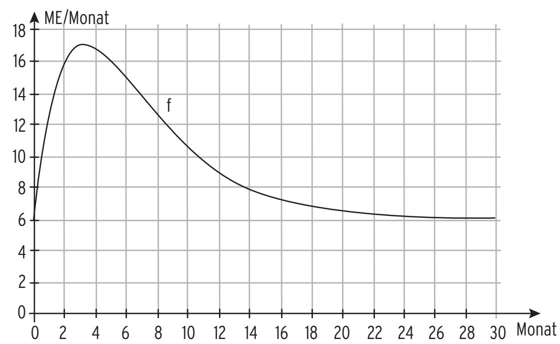
1.3 Die Fixkosten belaufen sich auf 144 GE. 2

Aufgabe 6

Die Absatzentwicklung eines Produktes wird durch die folgende Funktion beschrieben:

$f(t) = 9t \cdot e^{-0{,}3t} + 6$

dabei steht $t > 0$ für die Monate und f(t) für den Absatz in ME pro Monat.



2.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die monatlichen Absatzzahlen maximal werden (notwendiges Kriterium genügt). 4

2.2 Nehmen Sie mit Hilfe des Graphen Stellung zu der folgenden Aussage:
In der zweiten Hälfte des ersten Jahres liegt der Zeitpunkt des maximalen Absatzrückganges. 2

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis **Lösungen Seite 22**

Aufgabe 7

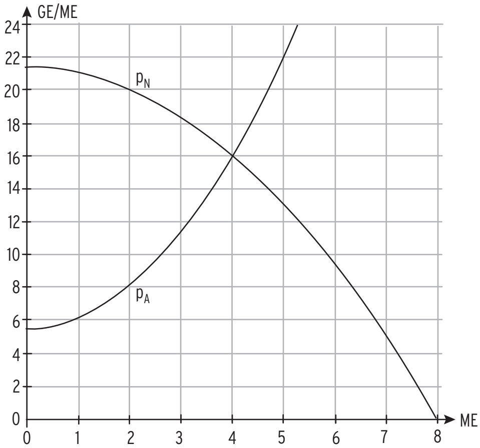
Punkte

Gegeben sind folgende Angebotsfunktion p_A und Nachfragefunktion p_N:

$p_A(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{3}$

$p_N(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{64}{3}$

x in ME, p(x) in GE/ME

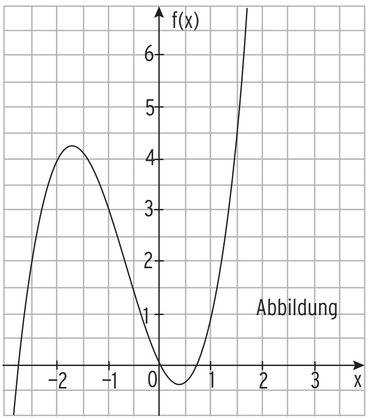


7.1 Berechnen Sie das Marktgleichgewicht. 4

7.2 Begründen Sie anhand der Graphen, dass die Konsumentenrente geringer ist als die Produzentenrente. 2

Aufgabe 8

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x$. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f.



8.1 Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion f.

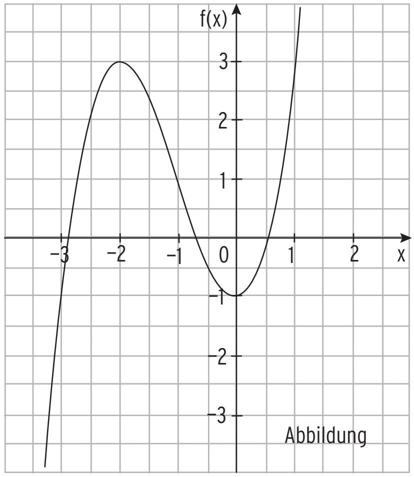
8.2 Entscheiden Sie begründet mit Hilfe einer Zeichnung in der Abbildung, ob die Gerade g mit $y = \frac{1}{2}x + 5$ eine Tangente am Graphen von f im Punkt P (− 2 | 4) ist. 6

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis Lösungen Seite 23

Aufgabe 9 **Punkte**

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$. Die Koordinaten des lokalen Hochpunktes und des lokalen Tiefpunktes sind ganzzahlig.

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f.

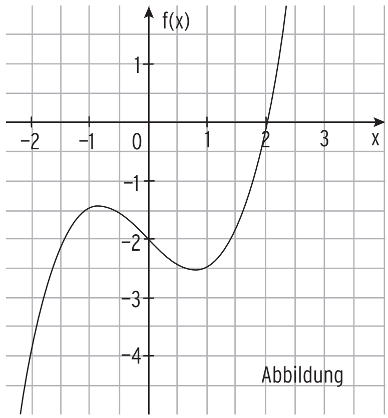


(1) Entscheiden Sie begründet, ob der Graph der Ableitungsfunktion f′ eine nach oben oder nach unten geöffnete Parabel ist.

(2) Geben Sie alle Werte für den Parameter c an, so dass die Funktion g_c mit der Gleichung $g_c(x) = f(x) + c$ genau zwei Nullstellen besitzt. Begründen Sie Ihre Angabe. 6

Aufgabe 10

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x - 2$. Der Graph ist in der Abbildung dargestellt.



(1) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die in der Zeichnung erkennbare Nullstelle tatsächlich eine Nullstelle ist.

(2) Gegeben ist die Funktion g_a mit der Gleichung $g_a(x) = f(x + a)$; $a \geq 0$. Geben Sie an, wie sich der Graph von g_a verändert, wenn man für a immer größere Zahlen einsetzt.

Geben Sie außerdem einen Wert für a an, so dass die Funktion g_a die Nullstelle $x = -1$ besitzt. 6

Hilfsmittelfreier Teil – Lineare Algebra Lösungen

Aufgabe 14 **Aufgaben Seite 36**

a) Es gilt der Zusammenhang (RE) = (RZ) · (ZE)

Man berechnet den Teil der Rohstoff-Endprodukt-Matrix, der R_3 betrifft:

$$(6 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (40 \quad 28 \quad 52) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 120$$

Man benötigt 120 ME von R_3, um jeweils eine ME von E_1, E_2 und E_3 herzustellen.

b) Ist x die Anzahl der ME von Z_1, so werden $6 \cdot x + 2 \cdot 1{,}5 \cdot x$ ME von R_3 benötigt:

$6 \cdot x + 2 \cdot 1{,}5 \cdot x = 54$ für $x = 6$

Anzahl der ME von Z_2: $1{,}5 \cdot 6 = 9$

Aufgabe 15

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a + 4c & 7b + 4d \\ 2a & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Vergleich ergibt a = 0; b = 0,5

Einsetzen ergibt: $c = \frac{1}{4}$ und aus $7 \cdot 0{,}5 + 4d = 0$: $d = -\frac{7}{8}$

Möglichkeit 2: B ist die Inverse von A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -8 & -2 & 7 \end{array}\right) \qquad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

b) Die Anzahl der Spalten von C ist 2, die Anzahl der Zeilen 1 oder mindestens 3.

Aufgabe 16 **Aufgaben Seite 37**

a) $M_{BE} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 45 \\ 30 \end{pmatrix}$ Für den Auftrag werden 40 Stück von B1, 45 Stück von B2 und 30 Stück von B3 benötigt.

b) Mit x: Stückzahl der benötigten E1 ergibt sich $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 20 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 80 \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix}$

Multiplikation ergibt: $x + 40 \leq 80$ $\quad 3x + 20 \leq 80$ $\quad 40 \leq 40$

Alle Ungleichungen sind erfüllt für $x \leq 20$.

Es können maximal 20 Endprodukte E1 hergestellt werden.

Aufgabe 17

a) Materialkosten pro Rasentrimmer T1, T2, T3: $(8 \ \ 11 \ \ 15) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (75 \ \ 49 \ \ 94)$

Die Materialkosten für einen Rasentrimmer T1 betragen 75 GE, für einen T2 sind es 49 GE und für einen T3 betragen sie 94 GE.

b) Es muss gelten: $(1 \ \ 1 \ \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 3x \\ 5x \\ 4x \end{pmatrix} = 20x \leq 8000 \quad \Leftrightarrow x \leq 400$

Es können also maximal 1200 Rasentrimmer T1, 2000 Rasentrimmer T2 und 1600 Rasentrimmer T3 hergestellt werden.

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik

Lösungen Seite 51

Aufgabe 1

Punkte

Bei der Produktion eines Elektrobauteils kommt es bei durchschnittlich 20 % der Bauteile zu statischen Aufladungen, die Probleme beim weiteren Verarbeitungsprozess bewirken können.

X ist die binomialverteilte Zufallsgröße, die die Anzahl problematischer Elektrobauteile bei einer Tagesproduktion von 50 Bauteilen angibt.

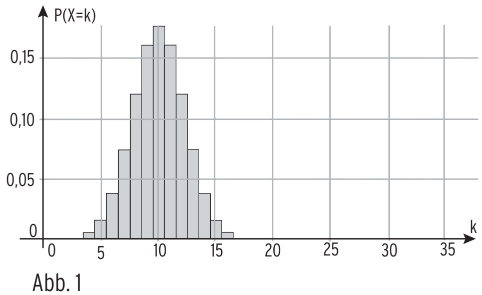


Abb. 1

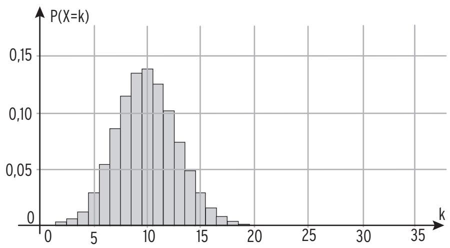


Abb. 2

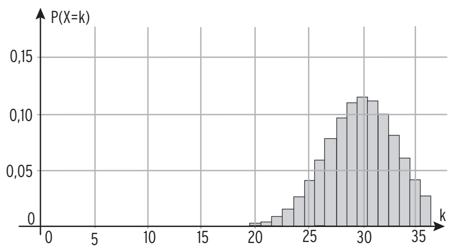


Abb. 3

1.1 Prüfen Sie, welche der obigen Abbildungen die zu X gehörige Verteilung ist. 2

1.2 Bestimmen Sie mit der von Ihnen ausgewählten Graphik näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl statisch aufgeladener Elektroteile um weniger als zwei vom Erwartungswert E(X) abweicht. 4

Aufgabe 2

Eine Firma fertigt Liegestühle in zwei verschiedenen Städten. In der Stadt A werden $\frac{1}{5}$ ihrer Waren hergestellt und der Rest in der Stadt B.

Leider passieren auch Produktionsfehler. So sind $\frac{1}{10}$ der Liegestühle aus A und $\frac{1}{100}$ der Stühle aus B defekt.

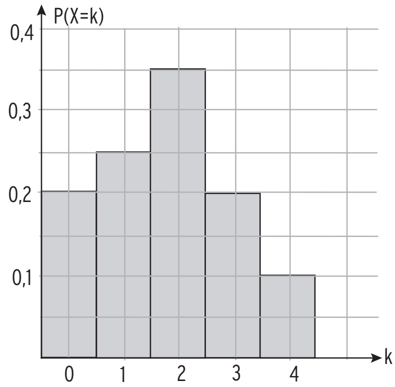
2.1 Ein Prüfer wählt aus der Gesamtproduktion zufällig einen Stuhl aus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Stuhl defekt ist. 3

2.2 Die Firmenchefin wählt aus der Gesamtproduktion einen offensichtlich defekten Stuhl aus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Stuhl in der Stadt A hergestellt worden ist. 3

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik **Lösungen Seite 51**

Aufgabe 3 **Punkte**

Ein Unternehmen macht mit seinem Produkt einen Gewinn zwischen 0 und 4 Geldeinheiten. Es liegen unterschiedliche Angaben zu den Gewinnwahrscheinlichkeiten vor.

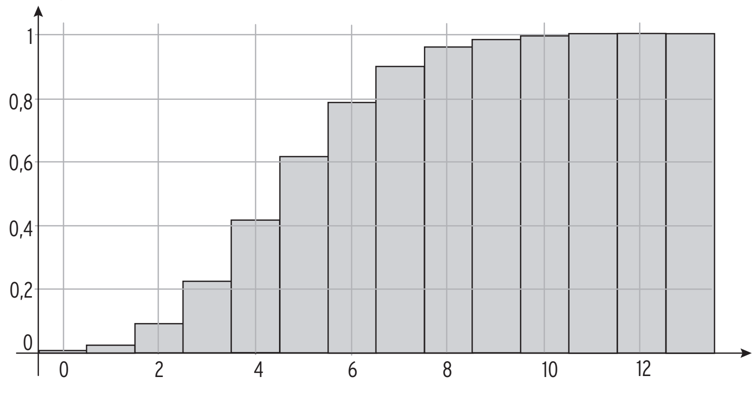


3.1 Erklären Sie, warum der obige Graph nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer ganzzahligen Zufallsgröße beschreiben kann. 2

3.2 Die ZufallsgrößeX gibt den Gewinn, den das Unternehmen mit seinem Produkt macht, an. Die obige Graphik stellt für einen Gewinn von 0 GE, 3 GE und 4 GE die Wahrscheinlichkeiten richtig dar. Es ist bekannt, dass der erwartete Gewinn bei 1,7 GE liegt. Ermitteln Sie die korrekten Wahrscheinlichkeiten für X = 1 und X = 2. 4

Aufgabe 4 **Lösungen Seite 52**

25 % der Mitarbeiter/-innen eines Großunternehmens klagen über eine zu hohe Arbeitsbelastung. Das Balkendiagramm gibt die kumulierte Binomialverteilung für eine Stichprobe von n = 20 an.



4.1 Geben Sie allein unter Zuhilfenahme des Diagramms die ungefähren Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse an:

A: Genau 6 Mitarbeiter/-innen sind unzufrieden.

B: Weniger als 8 Mitarbeiter/-innen fühlen sich überlastet.

C: Mindestens 15 Mitarbeiter/-innen sind zufrieden. 3

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik

Aufgabe 4 Fortsetzung **Punkte**

4.2 Nach Einführung eines neuen Arbeitszeitmodells beklagen nur noch zwei von 20 Personen die Arbeitsbelastung. Beurteilen Sie mit Hilfe des Diagramms, ob mit 90 % Sicherheitswahrscheinlichkeit von einer geringeren Unzufriedenheit als 25 % ausgegangen werden kann. 3

Aufgabe 5 **Lösungen Seite 52**

Eine Textilfabrik stellt unter anderem weiße T-Shirts her. Von diesen werden 50 % gefärbt und 50 % bestickt. Beim Färben sind 10 % der T-Shirts nicht farbecht, 20 % der anderen Hälfte sind fehlerhaft bestickt.

5.1 Stellen Sie den Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar. 3

5.2 Die Herstellungskosten für alle T-Shirts betragen im Mittel 0,2 GE pro Stück. Die korrekt gefärbten T-Shirts werden zu einem Preis von 2 GE pro Stück, die fehlerhaft gefärbten T-Shirts werden als 2. Wahl zu einem Preis von 1 GE pro Stück verkauft. Die korrekt bestickten T-Shirts erzielen einen Erlös von 2,5 GE pro Stück, wohingegen die fehlerhaft bestickten T-Shirts zusätzliche Kosten in Höhe von 1 GE pro Stück verursachen. Berechnen Sie den durchschnittlich zu erwartenden Stückdeckungsbeitrag. 3

Aufgabe 6

Eine verbeulte Münze wird mehrfach geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Wurf „Wappen“ fällt, beträgt p.

6.1 Geben Sie jeweils einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse A und B an: 3

A: Bei fünf Würfen fällt genau dreimal „Wappen“.

B: Bei 5 Würfen fällt genau dreimal „Wappen“, darunter bei den ersten beiden Würfen zweimal.

6.2 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 3 Würfen dreimal „Wappen“ fällt, ist 0,216. Untersuchen Sie, ob das Ergebnis „Wappen“ wahrscheinlicher ist als das Ergebnis „Zahl“. 2

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik **Lösungen Seite 52**

Aufgabe 7 **Punkte**

Bei der Herstellung eines Produktes sind durchschnittlich 20 % der Teile fehlerhaft.

Zu Testzwecken werden der laufenden Produktion einige Teile entnommen.

7.1 Es sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der entnommenen Teile angibt, die fehlerhaft sind. Begründen Sie, warum man die Zufallsvariable X als binomialverteilt annehmen kann. 3

7.2 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die ersten beiden entnommenen Teile nicht fehlerhaft sind. 1

7.3 Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis A und ein Ereignis B an, so dass gilt:

$P(A) = 0{,}2^{10}$ $\qquad P(B) = \binom{50}{40} \cdot 0{,}2^{10} \cdot 0{,}8^{40}$ 2

Aufgabe 8 **Lösungen Seite 53**

Von den 100 Schülerinnen und Schülern einer Jahrgangsstufe wählt die eine Hälfte als Naturwissenschaft Physik, die andere Hälfte Biologie.

Die Jahrgangsstufe umfasst insgesamt 60 Mädchen. 30 % sind Jungen und haben Physik gewählt.

8.1 Stellen Sie den gegebenen Sachverhalt in einer Vierfeldertafel dar. 3

8.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten,

- dass eine zufällig ausgewählte Schülerin Physik gewählt hat,
- dass ein zufällig ausgewählter Teilnehmer des Biologie-Kurses männlich ist. 3

Aufgabe 9

Die Zürla-Kohlin GmbH bezieht von einem Zulieferer seit Jahren selbstsichernde Muttern in großen Mengen, bei denen zwei Fehlerarten auftreten: Falsche Form und fehlerhaftes Gewinde.

Insgesamt sind nur 90 % aller Muttern fehlerfrei, d. h. sie haben weder eine falsche Form noch ein fehlerhaftes Gewinde. 5 % der Muttern haben eine falsche Form. 40 % der Muttern mit falscher Form haben auch ein fehlerhaftes Gewinde. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Mutter mit fehlerhaftem Gewinde auch ein falsche Form? 5

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik **Lösungen Seite 54**

Aufgabe 10 **Punkte**

Ein Supermarkt verwendet für die Bearbeitung zurückgegebener Pfandflaschen eine Maschine. Diese soll einwandfreie Flaschen von deformierten Flaschen unterscheiden. Zurückgegebene Flaschen werden entweder von der Maschine abgewiesen oder angenommen. Dabei unterlaufen dem Gerät auch Fehler: Es werden manchmal auch einwandfreie Flasche abgewiesen oder deformierte Flasche angenommen. Eine Übersicht über Wahrscheinlichkeiten in diesem Zusammenhang liefert die noch unvollständige Vierfeldertafel (Tabelle).

	Flasche angenommen	Flasche abgewiesen	
Flasche einwandfrei	0,9405	0,0095	0,95
Flasche deformiert	0,0015	0,0485	0,05
	$\boxed{}$	$\boxed{}$	

10.1 In den beiden doppelt umrandeten Kästchen der letzten Zeile fehlen zwei Wahrscheinlichkeiten in dem vorliegenden Sachzusammenhang. Berechnen Sie beide Wahrscheinlichkeiten und geben Sie diese in den Kästchen an.

10.2 Geben Sie die Bedeutung der beiden Wahrscheinlichkeiten aus 8.1 in dem vorliegenden Sachzusammenhang an.

10.3 Eine Flasche wird abgewiesen. Ermitteln Sie einen Term, um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass die Flasche in Ordnung ist.

6

Hinweis: Die konkrete Berechnung wird nicht verlangt.

Aufgabe 11

Erfahrungsgemäß sind 4 % der produzierten Smartphones eines Herstellers defekt. Ein Lieferant erhält ein Paket mit 50 Smartphones des Herstellers.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für höchstens ein defektes Smartphone?
Geben Sie einen Term an. 3

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik

Lösungen Seite 54

Aufgabe 12

a) Ein Fußballspieler verwandelt erfahrungsgemäß 80 % aller Strafstöße.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwandelt er von vier Strafstößen

- nur den letzten?
- mindestens einen?

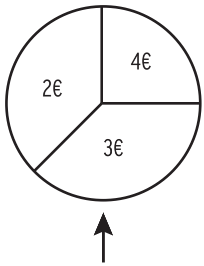
b) Für ein Ereignis C gilt: $P(C) = \binom{10}{k} \cdot 0{,}8^b \cdot a^2$

Geben Sie geeignete Werte für a, b und k an.

Beschreiben Sie das Ereignis C in Worten.

Aufgabe 13

Bei einem Glücksspiel wird das abgebildete Glücksrad benutzt. Als Einsatz bezahlt man 3 €. Das Glücksrad wird einmal gedreht. Man erhält den Betrag ausbezahlt, dessen Sektor über dem Pfeil zu stehen kommt. Bestimmen Sie den Erwartungswert für den Gewinn.



Aufgabe 14

Lösungen Seite 55

Eine Urne enthält 5 rote, 3 weiße und 2 gelbe Kugeln.

a) Es werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man keine gelbe Kugel?

b) Nun werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die beiden Kugeln die gleiche Farbe?

Aufgabe 15

Bei einer Lotterie führen 5 % der Lose zu einem Gewinn. Nils kauft 14 Lose. Geben Sie jeweils eine Aufgabenstellung an, deren Lösung auf die folgende Weise berechnet wird.

a) $P(A) = \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

b) $P(B) = \binom{14}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{12} + \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

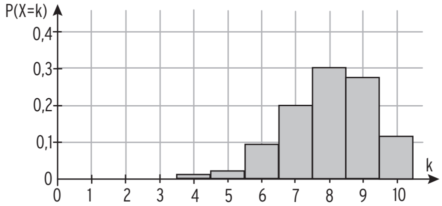
c) $P(C) = 1 - \binom{14}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{14}$

d) $14 \cdot 0{,}05$

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik **Lösungen Seite 55**

Aufgabe 16 **Punkte**

Ein Basketballspieler wirft 10 Freiwürfe. Die Anzahl seiner Treffer wird mit k bezeichnet und durch die Zufallsgröße X beschrieben. Die Zufallsgröße X wird als binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,8 angenommen. In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

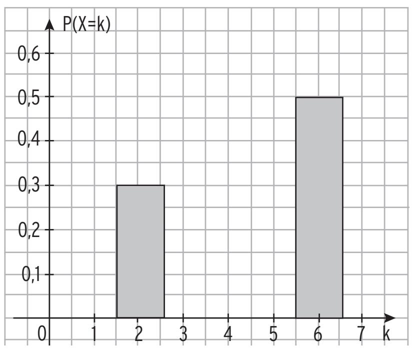


a) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Basketballspieler mindestens 8-maltrifft. 2

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, keinen Treffer zu erzielen, kleiner als $\frac{1}{1\,000\,000}$ ist. 3

Aufgabe 17

Für ein Zufallsexperiment wird eine Zufallsgröße X festgelegt, welche die drei Werte 2, 4 und 6 annehmen kann. In der Abb. ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X unvollständig dargestellt.



a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit P(X = 4) an. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

b) Das Zufallsexperiment wird zweimal unter gleichen Bedingungen durchgeführt. Dabei wird jeweils der Wert der Zufallsgröße notiert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Produkt dieser beiden Werte den Wert 12 ergibt. 6

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik **Lösungen Seite 56**

Aufgabe 18 **Punkte**

In einer Urne befinden sich zu Beginn eines Zufallsexperiments drei schwarze Kugeln (S) und zwei weiße Kugeln (W), siehe Abbildung 1. Aus der Urne werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Zu dem Zufallsexperiment wurde das Baumdiagramm aus Abbildung 2 erstellt.

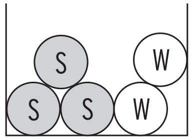


Abbildung 1

(1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei dem Zufallsexperiment mindestens eine schwarze Kugel gezogen wird. 3

(2) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X. 3

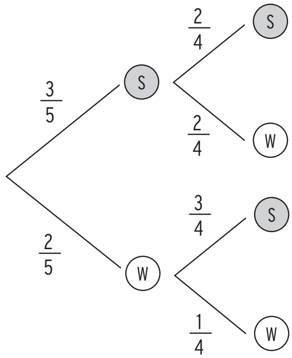


Abbildung 2

Aufgabe 19

In den Urnen U1 und U2 befinden sich Kugeln, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden: U1 : 6 rote und 4 blaue Kugeln

U2 : 1 rote und 4 blaue Kugeln

1.1 Aus der Urne U1 werden zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen zufällig gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben. 2

1.2 Es wird eine der beiden Urnen zufällig ausgewählt. Aus dieser wird eine Kugel zufällig gezogen. Die gezogene Kugel ist rot. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Kugel aus der Urne U1 stammt. 3

Aufgabe 20

Von acht Karten sind zwei mit „1“, zwei mit „2“, zwei mit „3“ und zwei mit „4“ beschriftet. Die Karten werden gemischt und nacheinander verdeckt abgelegt.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden zuerst abgelegten Karten mit „1“ beschriftet sind. 2

b) Die Karten werden nacheinander aufgedeckt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass spätestens die dritte aufgedeckte Karte mit einer geraden Zahl beschriftet ist. 3

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik Lösungen

Aufgabe 1 **Aufgaben Seite 43**

1.1 Da $E(X) = n \cdot p = 10$ $(50 \cdot 0{,}2 = 10)$ ganzzahlig ist, muss der maximale Wert $P(X = 10)$ sein.

Abbildung 3 erfüllt dies nicht. Nur für $p = 0{,}5$ ist die Binomialverteilung symmetrisch, so dass für $p = 0{,}2$ nur Abbildung 2 möglich ist.

1.2 Da $E(X) = n \cdot p = 10$, sind die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von 9, 10 oder 11 statisch aufgeladenen Elektrobauteilen aufzusummieren.

Aus der Abb. 2 liest man

$0{,}14 + 0{,}14 + 0{,}13 = 0{,}41$ ab, also ca. 40 % Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 2

2.1 Wahrscheinlichkeit, dass der Stuhl defekt ist.

$$P(\text{defekt}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{50} + \frac{4}{500} = \frac{7}{250}$$

Die Wahrscheinlichkeit einen defekten Stuhl ausgewählt zu haben beträgt $\frac{7}{250}$.

2.2 Wahrscheinlichkeit, dass der Stuhl in der Stadt A hergestellt worden ist.

$$P_d(A) = \frac{P(A \cap d)}{P(d)} = \frac{\frac{1}{50}}{\frac{7}{250}} = \frac{5}{7}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der defekte Stuhl aus A kommt, beträgt $\frac{5}{7}$.

Aufgabe 3 **Aufgaben Seite 44**

3.1 Die Summe der Wahrscheinlichkeiten beträgt

$0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}35 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1{,}1 > 1$.

3.2 Mit $a = P(X = 1)$ und $b = P(X = 2)$ ergibt sich

Summe Einzelwahrscheinlichkeiten: I. $0{,}2 + a + b + 0{,}2 + 0{,}1 = 1$

Erwartungswert: II. $a + 2b + 0{,}6 + 0{,}4 = 1{,}7$

Vereinfachung: I. $a + b = 0{,}5$

II. $a + 2b = 0{,}7$

II. − I. ergibt $b = 0{,}2$

einsetzen ergibt $a = 0{,}3$

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik Lösungen

Aufgabe 4 Aufgaben Seite 44

4.1 X gibt die Anzahl unzufriedener Mitarbeiter/-innen an.

A: $P(X = 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 5) = 0{,}78 - 0{,}62 = 0{,}16$

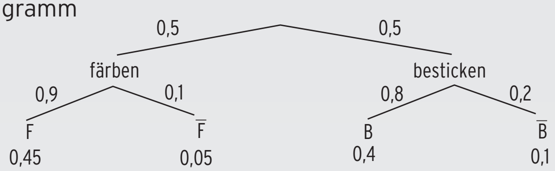
B: $P(X < 8) \approx 0{,}9$

C: $P(X \leq 5) \approx 0{,}62$

4.2 Da die Wahrscheinlichkeit maximal 2 unzufriedene Mitarbeiter/-innen bei $p = 0{,}25$ zu haben mit $P(X \leq 2) \approx 0{,}1$ ungefähr 10 % beträgt, kann mit 90 % Sicherheitswahrscheinlichkeit davon ausgegangen werden, dass die Zufriedenheit gesteigert wurde.

Aufgabe 5 Aufgaben Seite 45

5.1 Baumdiagramm



F = Färbung ok, $\overline{F}$ = Färbung fehlerhaft, B = Korrekt bestickt, $\overline{B}$ = fehlerhaft bestickt

5.2 Durchschnittlich zu erwartender Stückdeckungsbeitrag

Sei X die Zufallsgröße, die den Stückdeckungsbeitrag beschreibt.

$E(X) = 2 \cdot 0{,}45 + 1 \cdot 0{,}05 + 2{,}5 \cdot 0{,}4 - 1 \cdot 0{,}1 - 0{,}2 = 1{,}65$

Der zu erwartende Stückdeckungsbeitrag beträgt 1,65 GE.

Aufgabe 6

6.1 Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: $\binom{5}{3} p^3 \cdot (1 - p)^2$

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B: $p^2 \cdot \binom{3}{1} p \cdot (1 - p)^2$

6.2 Das Ergebnis "Wappen" ist wahrscheinlicher, da gilt: $0{,}216 > 0{,}5^3 = 0{,}125$ oder $\sqrt[3]{0{,}216} = 0{,}6$.

Aufgabe 7 Aufgaben Seite 46

7.1 Die Zufallsvariable ist binomialverteilt:

Für jedes Teil gibt es nur zwei Möglichkeiten, nämlich entweder defekt oder nicht defekt. Es wird zwar ohne Zurücklegen gezogen, aber da die Grundgesamtheit sehr groß und die Stichprobe verhältnismäßig klein ist, bleibt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Zug gleich.

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik Lösungen

Aufgabe 7 Fortsetzung **Aufgaben Seite 46**

7.2 $P(E) = 0{,}8^2 = 0{,}64$

7.3 A: die ersten zehn Teile sind fehlerhaft.

B: es werden 50 Teile gezogen, davon sind genau 10 fehlerhaft. $\left(\binom{50}{40} = \binom{50}{10}\right)$

Aufgabe 8

8.1 Es ergibt sich die Vierfeldertafel:

	weiblich	männlich	
Physik	0,2	0,3	0,5
Biologie	0,4	0,1	0,5
	0,6	0,4	1

8.2 Mit dem Satz von Bayes ergibt sich:

$P_w(Ph) = \frac{P(Ph \cap w)}{P(w)} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3}$

$P_{Bio}(m) = \frac{P(Bio \cap m)}{P(Bio)} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = \frac{1}{5}$

Alternativ können die gesuchten Wahrscheinlichkeiten aus einem Baumdiagramm entnommen werden.

Aufgabe 9

FF: falsche Form; RF: richtige Form

FG: fehlerhaftes Gewinde; RG: fehlerfreies Gewinde

Gegeben: $P(FF) = 0{,}05$; $P_{FF}(FG) = 0{,}4$; $P(RF \cap RG) = 0{,}90$

Gesucht: $P_{FG}(FF)$

$P_{FF}(FG) = 0{,}4$ $\qquad P_{FF}(FG) = \frac{P(FF \cap FG)}{P(FF)} = 0{,}4$

$P(FF \cap FG) = 0{,}05 \cdot 0{,}4 = 0{,}02$

Aufstellen einer Vierfeldertafel:

Nach Aufgabe: 0,90; 0,05

40 % von 0,05 $\triangleq$ 0,02

	FF	RF	gesamt
FG	0,02	0,05	0,07
RG	0,03	0,90	0,93
gesamt	0,05	0,95	1

$P_{FG}(FF) = \frac{P(FF \cap FG)}{P(FG)} = \frac{0{,}02}{0{,}07} = \frac{2}{7}$

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik Lösungen

Aufgabe 10 **Aufgaben Seite 47**

10.1 0,9405 + 0,0015 = 0,942 und 0,0095 + 0,0485 = 0,058 .

	Flasche angenommen	Flasche abgewiesen	
Flasche einwandfrei	0,9405	0,0095	0,95
Flasche deformiert	0,0015	0,0485	0,05
	0,9420	0,058	1

10.2 Mit einer Wahrscheinlichkeit von 94,2 % wird eine Flasche von der Maschine angenommen und mit einer Wahrscheinlichkeit von 5,8 % wird eine Flasche von der Maschine abgewiesen.

10.3 Man teilt den Anteil der abgewiesenen einwandfreien Flaschen durch den Anteil aller abgewiesenen Flaschen. Das ergibt: $\frac{0{,}0095}{0{,}0095 + 0{,}0485}$.

Aufgabe 11

X: Anzahl der defekten Smartphones unter 50 Smartphones;

X ist $B_{50;0,04}$- verteilt

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$$= \binom{50}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}04^1 \cdot 0{,}96^{49}$$

Aufgabe 12 **Aufgaben Seite 48**

a) P(nur den letzten) = $0{,}2^3 \cdot 0{,}8 = \frac{4}{625} = 0{,}0064$

P(mindestens einen) = 1 – P(keinen) = $1 - 0{,}2^4 = 0{,}9984$

b) $P(C) = \binom{10}{k} \cdot 0{,}8^b \cdot a^2$ für k = 8; a = 0,2; b = 8

Ereignis C: Der Spieler hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von 80 % und verwandelt 8 von 10 Strafstößen.

Aufgabe 13

x_i	2 €	3 €	4 €
Gewinn	- 1 €	0 €	1 €
$P(X = x_i)$	0,375	0,375	0,25

Erwartungswert für den Gewinn: $E(X) = -1 \cdot 0{,}375 + 1 \cdot 0{,}25 = -0{,}125$

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik Lösungen

Aufgabe 14

Aufgaben Seite 48

a) 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

$P(\text{keine gelbe Kugel}) = 0{,}8^3 = \frac{64}{125} = 0{,}512$

b) 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen

$P(\text{gleiche Farbe}) = P(rr) + P(ww) + P(gg) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{14}{45} \approx 0{,}31$

Aufgabe 15

a) $P(A) = \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$ A: Nils zieht genau 3 Gewinnlose.

b) $P(B) = \binom{14}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{12} + \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

B: Nils zieht 2 oder 3 Gewinnlose.

c) $P(C) = 1 - \binom{14}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{14}$ C: Nils zieht mindestens ein Gewinnlos.

d) $14 \cdot 0{,}05$ Durchschnittlich zu erwartende Anzahl von Gewinnlosen unter 14 Losen

Aufgabe 16

Aufgaben Seite 49

X ist binomialverteilt mit n = 10; p = 0,8

a) $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

Ablesen ergibt den Näherungswert: $0{,}30 + 0{,}27 + 0{,}11 = 0{,}68$

b) $P(X = 0) = 0{,}2^{10}$

Abschätzung: $0{,}2^{10} = \left(\frac{2}{10}\right)^{10} = \frac{2^{10}}{10^{10}} = \frac{1024}{10\,000\,000\,000} = \frac{1{,}024}{10\,000\,000}$

$$0{,}2^{10} = \frac{0{,}1024}{1\,000\,000} < \frac{1}{1\,000\,000}$$

Aufgabe 17

a) $P(X = 4) = 1 - 0{,}3 - 0{,}5 = 0{,}2$

Erwartungswert von X: $E(X) = 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}5 = 4{,}4$

b) Das Produkt 12 kann hier auf zwei Möglichkeiten erreicht werden: 2;6 und 6;2.

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit:

$P(12) = 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}30$

Hilfsmittelfreier Teil – Stochastik Lösungen

Aufgabe 18 **Aufgaben Seite 50**

(1) P(„mindestens eine schwarze Kugel") = 1 − P(„keine schwarze Kugel")

P(„mindestens eine schwarze Kugel") = $1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der mindestens eine schwarze Kugel gezogen wird, beträgt 90%.

(2) Anhand der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X kann der Erwartungswert $\mu = E(X)$ berechnet werden:

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}1$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = 0{,}6$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0{,}3$

$\mu = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}3 = 1{,}2$

Der Erwartungswert μ der Zufallsgröße X beträgt 1,2.

Aufgabe 19

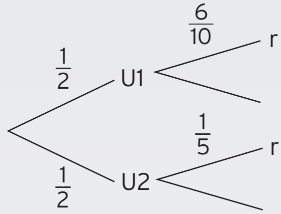
1.1 P („beide Kugeln haben die gleiche Farbe") = P(rr) + P(bb)

$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{15}$$

1.2 Mithilfe eines Baumdiagramms erhält man:

$$P(E_2) = \frac{P(U1 \wedge r)}{P(r)}$$

$$P(E_2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{3}{4}$$



Aufgabe 20

a) Ziehen ohne Zurücklegen; $P = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7}$

b) Berechnung über das Gegenereignis: keine der drei aufgedeckten Karten ist mit einer geraden Zahl beschriftet; Ziehen ohne Zurücklegen

$P = 1 - \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6}$

II Teil B der Abiturprüfung mit Hilfsmittel – GTR/CAS

Stichwortverzeichnis

Sie finden folgende Themen u. a. in der angegebenen Aufgabe zur Abiturvorbereitung im Aufgabenteil II bis Aufgabenteil IV ab Seite 57

1 Analysis

Mathematische Formeln Wirtschaft und Verwaltung

Gesamtkostenfunktion K mit	$K(x) = K_v(x) + K_f$
Ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit	$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ a > 0;\ x \geq 0$
K wächst degressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) < 0$
K wächst progressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) > 0$
Funktion der variablen Gesamtkosten	$K_v(x)$
Funktion der gesamten Stückkosten k	$k(x) = \frac{K(x)}{x}$
Funktion der variablen Stückkosten k_v (k_{var})	$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$
Grenzkostenfunktion	$K'(x)$ Kostenzuwachs
Grenzstückkostenfunktion	$k'(x)$
Betriebsoptimum (Minimalstelle von k)	x_{BO}
Langfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BO})$
Betriebsminimum (Minimalstelle von k_v)	x_{BM}
kurzfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BM})$
Nachfragefunktion (Preis-Absatz-Funktion)	$p_N(x)$
Angebotsfunktion	$p_A(x)$
Gleichgewichtsmenge (Schnittstelle von p_N und p_A)	x_G
Gleichgewichtspreis	$p_G = p_N(x_G) = p_A(x_G)$
Marktgleichgewicht MG	$MG(x_G \mid p_G)$
Konsumentenrente	$KR = \int_0^{x_G} p_N(x)dx - x_G \cdot p_G$
Produzentenrente	$PR = x_G \cdot p_G - \int_0^{x_G} p_A(x)\,dx$
Erlösfunktion	$E(x) = p \cdot x$; p Preis pro ME $E(x) = p_N(x) \cdot x$ $p_N(x)$; Preis abhängig von x
Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x)$
Grenzgewinnfunktion	$G'(x)$
Gewinnschwelle	x_{GS} 1. positive Nullstelle von G
Gewinngrenze	x_{GG} 2. positive Nullstelle von G
gewinnmaximale Ausbringungsmenge Maximalstelle von G(x)	x_{max}
Cournot'scher Punkt	$C(x_{max} \mid p_N(x_{max}))$
Stückdeckungsbeitrag d = dB	$dB(x) = p - k_v(x)$
Deckungsbeitrag D = DB	$DB(x) = G(x) + K_f = E(x) - K_v(x)$

Bezeichnungen: $\mathbb{R}^* = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $\mathbb{R}^*_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^{>0}$

$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\} = \mathbb{R}^{\geq 0}$

Produktregel der Ableitung: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Analysis

Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Lösung Seite 76**

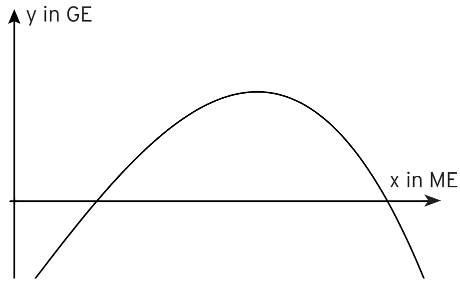
Das Unternehmen Bio-Kosmetic führt eine Pflegeserie für Frauen ein und tritt damit in Konkurrenz zu weiteren Anbietern.

1 Das Unternehmen geht von einem ertragsgesetzlichen Kostenverlauf aus.
die Grenzkostenfunktion K′ lautet: $K'(x) = 3{,}75x^2 - 40x + 120$.
Die Fixkosten betragen 250 GE.
Leiten Sie die Kostenfunktion her.

2 Die Marketingabteilung hat in einer Marktforschung festgestellt, dass bei Produktion und Verkauf von 4 ME Erlöse und Kosten übereinstimmen.
Bestimmen Sie den Preis pro ME und die Erlösfunktion.

3 Das Unternehmen geht von folgender Erlösfunktion aus: $E(x) = 122{,}5x$
Zeigen Sie, dass die Gewinnfunktion G der neuen Pflegeserie lautet:
$G(x) = -1{,}25x^3 + 20x^2 + 2{,}5x - 250$
Berechnen Sie, in welchem Produktionsintervall das Unternehmen mit Gewinn produzieren kann.
Ermitteln Sie die gewinnmaximale Ausbringungsmenge und den maximalen Gewinn.

4 Begründen Sie anhand der dargestellten Gewinnfunktion, welche Auswirkungen eine Veränderung der Fixkosten auf die Gewinnzone, die gewinnmaximale Ausbringungsmenge und den maximalen Gewinn hat.



5 Für die Absatzentwicklung (in ME pro Tag) stehen zwei Prognosefunktionen zur Diskussion:
$A_1(t) = 40 - 0{,}15t - 40e^{-0{,}05t}$
$A_2(t) = 1{,}5t\,e^{-0{,}02t}$,
wobei t die Zeit in Verkaufstagen darstellt.

5.1 Welche Funktionen prognostiziert einen höheren maximalen Absatz?
Wie groß ist der Unterschied?

5.2 Bestimmen Sie den von A_1 prognostizierten Absatz in ME/Tag zum Zeitpunkt $t = 16$ und $t = 130$. Vergleichen Sie.

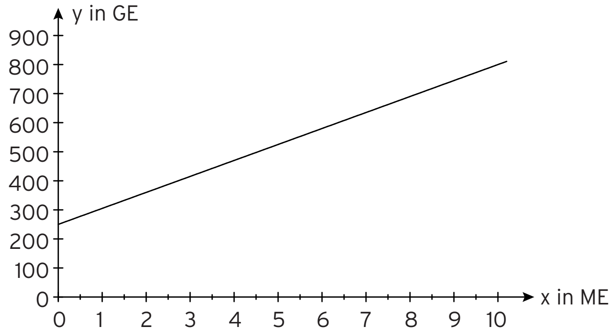
5.3 Der maximale Absatzrückgang sollte frühestens nach 150 Tagen eintreten.
Wird diese Vorgabe jeweils eingehalten?
Wie hoch ist der maximale Absatzrückgang jeweils?

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Analysis

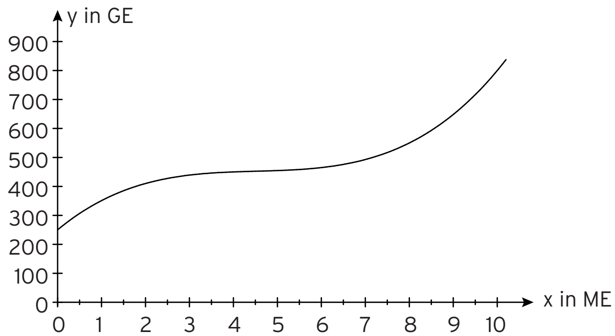
Aufgabe 1 **Seite 2/2**

6 In den folgenden Diagrammen sehen Sie die Graphen von drei Funktionen. Begründen Sie, welcher Graph dem einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion entspricht und welcher nicht.

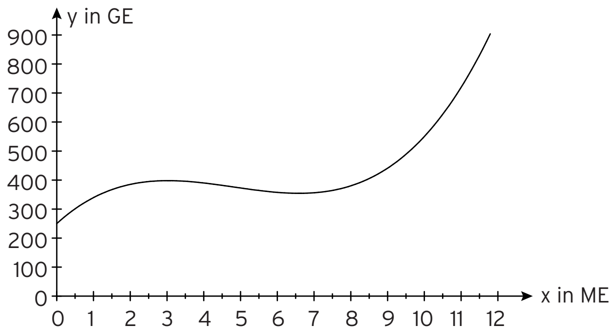
Graph 1



Graph 2



Graph 3



(Teile aus Berufskolleg NRW 2010.)

Lösung Aufgabe 15 **Aufgabe Seite 75**

a) Marktgleichgewicht: $p_N(x) = p_A(x) \quad \Rightarrow x = x_G \approx 2{,}97$

Gleichgewichtspreis: $p_G = p_A(x_G) \approx 8{,}84$

Konsumentenrente:

$$K_R = \int_0^{x_G} p_N(x)dx - x_G \cdot p_G \approx 75{,}90 - 2{,}97 \cdot 8{,}84 = 49{,}65$$

Interpretation: Die Konsumentenrente beträgt etwa 49,65 GE. Die Konsumenten geben tatsächlich 49,65 GE weniger aus, als sie theoretisch dafür vorgesehen haben.

Stammfunktion zu $p_N(x) = 16(x + 1)e^{1-x}$

P_N ist eine Stammfunktion von p_N, wenn $P'_N(x) = p_N(x)$

$P'_N(x) = -16e^{1-x} + 16(x + 2)e^{1-x} = (16x + 16)e^{1-x} = 16(x + 1)e^{1-x} = p_N(x)$

P_N ist eine Stammfunktion zu p_N.

b) Untersuchung der Marktsituation:

Der neue Preis liegt oberhalb des Marktgleichgewichts. Daher kommt es nicht zu einer vollständigen Markträumung.

Vergleich zwischen Angebots- und Nachfragemenge

Angebotsmenge: $p_A(x) = 12$ $\quad x^2 = 12 \Rightarrow x_A \approx 3{,}46 \; (x > 0)$

Nachfragemenge: $p_{N,4}(x) = 12$ $\quad 16(x + 1)e^{1-x} = 12 \Rightarrow x_N \approx 2{,}56 \; (x > 0)$

Vergleich: $x_N < x_A$; $d = x_A - x_N = 0{,}9$

Bei einem Preis von 12 GE/ME existiert ein Angebotsüberschuss (Vorratsmenge) von 0,9 ME, d. h. der Anbieter kann nur 2,56 ME verkaufen.

Marktgleichgewicht für Düsseldorf: MG (2,97 | 8,84)

Ermittlung des Spendenbeitrages:

$(p_{fest} - p_G)\, x_{N;4} = (12 - 8{,}84) \cdot 2{,}56 = 8{,}09$

Der Anbieter von Sommerbrise spenden bei der Benefizveranstaltung einen Betrag in Höhe von 8,09 GE.

Aufgabe 16 **Aufgabe Seite 75**

1.1 Kurzfristige Preisuntergrenze

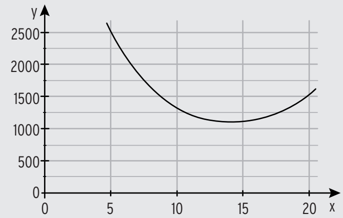
$k_v(x) = 10\,x^2 - 240x + 1920$; $k_v'(x) = 20x - 240$; $k_v''(x) = 20 > 0$

Notwendige und hinreichende Bedingung: $k_v'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 12$

(Bei einer Parabel mit a = 10 liegt dann immer eine Minimalstelle vor)

Mit $k_v(12) = 480$ gilt: Die Kurzfristige Preisuntergrenze liegt bei 480 GE/ME.

Langfristige Preisuntergrenze



$k(x) = 10\,x^2 - 240x + 1920 + \frac{7840}{x}$

Grafische Lösung ergibt:

Tiefpunkt der Stückkostenkurve: T(14 | 1080)

Langfristige Preisuntergrenze: 1080 GE/ME

Der Preis von 700 GE/ME kann kurzfristig, aber nicht langfristig unterschritten werden.

1.2 Aufgrund der anteiligen Fixkosten sind im Betriebsoptimum die variablen Stückkosten geringer als die Stückkosten (Langfristige Preisuntergrenze).
Die kurzfristige Preisuntergrenze als Minimum der variablen Stückkosten liegt somit stets unter der langfristigen Preisuntergrenze.
(Die kurzfristige Preisuntergrenze als Minimum der variablen Stückkosten ist kleiner als die variablen Stückkosten im Betriebsoptimum.)
$k_v(x_{BM}) < k_v(x_{BO}) < k(x_{BO})$

2.1 Die Gewinnschwelle liegt bei 7 ME, also gilt mit $E(x) = p \cdot x$: $K(7) = E(7)$

$12950 = 7p \Leftrightarrow p = 1850$

Der Preis beträgt 1850 GE/ME.

2.2 **Die Gewinnzone hat eine Breite von ca. 15 ME.**

$G(x) = E(x) - K(x) = -10x^3 + 240x^2 - 70x - 7840$

Bedingung: $G(x) = 0$ $x_1 = 7$; $x_2 \approx 22{,}07$ (positive Lösungen)

Gewinnzone: 7 ME bis ca. 22,07 ME

Somit umfasst die Gewinnzone tatsächlich ca. 15 ME.

Der größtmögliche Gewinn liegt unter 10000 GE.

$G(x) = 10000$ $x_1 \approx 13{,}15$; $x_2 \approx 18{,}28$

Für Ausbringungsmengen zwischen 13,15 ME und 18,28 ME wird ein höherer Gewinn als 10000 € erzielt. Die Aussage ist also falsch.

Alternativ: $G'(x) = 0$ $x_1 \approx 15{,}85$ Maximalstelle

Maximaler gewinn: $G(15{,}85) \approx 11525{,}14 > 10000$

Der maximale Stückgewinn beträgt 770 GE/ME.

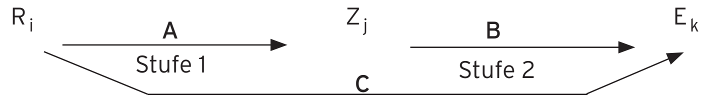
Stückgewinnfunktion g mit $g(x) = \frac{G(x)}{x}$; $x \in \,]0; 25]$

Der Graph von g hat den Hochpunkt H(14 | 770). Die Aussage ist also richtig.

2 Lineare Algebra

Formelsammlung

Lineare Verflechtung – Mehrstufige Produktionsprozesse



R_i: Rohstoffe; Z_j: Zwischenprodukte; E_k: Endprodukte

Verflechtungsmatrizen

Rohstoff-Zwischenprodukt ; Zwischenprodukt-Endprodukt; Rohstoff-Endprodukt-Matrix

A B C

Es gilt der Zusammenhang: $\boxed{C = A \cdot B}$

Verbrauchs-, Produktionsvektoren

$\vec{r}$: Rohstoffvektor $\vec{z}$: Zwischenproduktvektor $\vec{x}$: Endproduktvektor

Es gilt: $\boxed{A \cdot \vec{z} = \vec{r} \qquad B \cdot \vec{x} = \vec{z} \qquad C \cdot \vec{x} = \vec{r}}$

Kostenvektoren (variable Kosten pro Einheit)

Rohstoffkosten: $\vec{k}_R$ Fertigungskosten in Stufe 1: $\vec{k}_Z$ Fertigungskosten in Stufe 2: $\vec{k}_E$

Kostenvektoren sind Zeilenvektoren.

Die **Gesamtkosten für die Produktion $\vec{x}$** setzen sich zusammen aus
Rohstoffkosten + Fertigungskosten in Stufe 1 + Fertigungskosten in Stufe 2 + fixe Kosten

K_R K_Z K_E K_f

Es gilt: $\boxed{K_R = \vec{k}_R \cdot \vec{r} \qquad K_Z = \vec{k}_Z \cdot \vec{z} \qquad K_E = \vec{k}_E \cdot \vec{x}}$

Variable Herstellungskosten $\vec{k}_v$ pro Einheit eines Endproduktes: $\boxed{\vec{k}_v = \vec{k}_R \cdot C + \vec{k}_Z \cdot B + \vec{k}_E}$

Gesamtkosten K für die Produktion $\vec{x}$ gilt bei Fixkosten K_f:

$$\boxed{\begin{aligned} K &= K_v + K_f = \vec{k}_v \cdot \vec{x} + K_f \\ K &= \vec{k}_R \cdot C \cdot \vec{x} + \vec{k}_Z \cdot B \cdot \vec{x} + \vec{k}_E \cdot \vec{x} + K_f \\ K &= \vec{k}_R \cdot \vec{r} + \vec{k}_Z \cdot \vec{z} + \vec{k}_E \cdot \vec{x} + K_f \end{aligned}}$$

Inverse Matrix

Existenz: Die **quadratische** Matrix A ist **invertierbar** (die Inverse A^{-1} existiert), wenn

$Rg(A) = n$ **oder** das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist **eindeutig lösbar.**

Berechnung: Umformung von $(A \mid E)$ in $(E \mid A^{-1})$

Eigenschaften: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ $\qquad (A^{-1})^{-1} = A$

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ $\qquad (r \cdot A)^{-1} = \frac{1}{r} \cdot A^{-1}$

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra

Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Lösung Seite 111**

Das Ein-Liter-Auto ist kaum noch ein Thema. Niemand dürfte bereit sein, mehrere 10 000 Euro für ein eigenes Gefährt zu zahlen. Eine mögliche Zwischenlösung wird künftig wohl in einem Zwei- oder Drei-Liter-Auto gesehen.
Insgesamt gilt: ME gleich Mengeneinheiten und GE gleich Geldeinheiten.
Der Autozulieferbetrieb Dynamik baut unter anderem für ein Zwei-Liter-Auto in einem zweistufigen Produktionsprozess aus verschiedenen elektronischen Bauteilen (B1, B2 und B3) Fahrdynamikregelung, Motorsteuergerät und Bordcomputer (E1, E2, E3).
Die folgenden Listen geben Auskunft über die Zusammenhänge zwischen den Bauteilen und den Zwischen- bzw. Endprodukten in ME.

	Z1	Z2	Z3
B1	1	0	3
B2	5	2	12
B3	50	15	95

	E1	E2	E3
Z1	2	3	2
Z2	0	4	3
Z3	1	5	1

Kosten der Bauteile in GE/ME			Fertigungskosten der Zwischenprodukte in GE/ME			Fertigungskosten der Endprodukte in GE/ME		
B1	B2	B3	Z1	Z2	Z3	E1	E2	E3
0,03	0,02	0,01	1,5	2,5	2,5	10	15	20

1.1 Aus den obigen Angaben ergibt sich die folgende Bauteile-Endproduktmatrix:

$$M_{BE} = \begin{pmatrix} 5 & 18 & 5 \\ 22 & 83 & b \\ 195 & a & 240 \end{pmatrix}$$

1.1.1 Berechnen Sie die Werte für a und b. 5

1.1.2 Erläutern Sie die Bedeutung der Elemente a und b im Sachzusammenhang. 5

Im Folgenden sei a = 685 und b = 28.

1.2 Die Fixkosten der Wochenproduktion betragen 7 525 GE. 8
Berechnen Sie die Gesamtkosten für eine Wochenproduktion von 750 ME von E1, 900 ME von E2 und 500 ME von E3.

1.3 Kurz vor den Betriebsferien meldet das Lager einen Bestand an Zwischenprodukten von Z1 mit 4 300 ME, Z2 mit 4 250 ME und Z3 mit 4 950 ME.

1.3.1 Untersuchen Sie, wie viele Endprodukte mit diesem Lagerbestand noch vor den Betriebsferien produziert werden können. 8

1.3.2 Begründen Sie, dass es trotz höheren Rechenaufwands sinnvoll sein kann, zunächst die Inverse der Verflechtungsmatrix M_{ZE} zu bestimmen. 5

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra

Aufgabe 1 **Seite 2/2** **Punkte**

1.4 Das Unternehmen Dynamik staffelt seine Preise der Endprodukte nach Auftrag und Kunde. Den Kunden werden bestimmte Rabattkategorien r mit $r \in \mathbb{N}$ zugeordnet – guten Kunden wird eine höhere Kategorie zugeordnet.
Es gilt folgender Preisvektor:
$e_r^T = (26{,}54 - 0{,}5r \quad 69{,}55 - 1{,}5r \quad 49{,}61 - r)$

1.4.1 Berechnen Sie, für welche $r > 0$ die einzelnen Preise ökonomisch sinnvoll sind. 7

1.4.2 Die Gesamtkosten in Höhe von 85 055 GE bei der Wochenproduktion von 750 ME von E1, 900 ME von E2 und 500 ME von E3 sollen trotz Rabatt mindestens gedeckt werden. 7
Leiten Sie den Bereich für r her, der dieser Anforderung genügt.
(Berufskolleg NRW 2011.) 45

Aufgabe 2 **Seite 1/2** **Lösung Seite 112**

Punkte

BioKosmetiKuss stellt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus pflanzlichen Rohstoffen (R1, R2 und R3) Zwischenprodukte (Z1, Z2 und Z3) und aus diesen wiederum verschiedene Parfums (E1, E2 und E3) her.
Die folgenden Matrizen geben die benötigten pflanzlichen Rohstoffe je Zwischenprodukt bzw. Zwischenprodukte je Endprodukt (Parfum) in ME an.

$$A_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 4 & 1 & b \end{pmatrix} \qquad B_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & c \end{pmatrix} \text{ ; } a, b, c \geq 0$$

Für die Rohstoff-Endprodukt-Matrix gilt in der aktuellen Produktionsperiode:

$$C_{RE} = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 7 \\ 15 & 23 & 13 \\ 10 & 17 & 7 \end{pmatrix}$$

3.1 Bei der Produktion der Zwischenprodukte und der Parfums treten produktionsbedingte Parameter a, b und c auf, die in den einzelnen Produktionsperioden variieren können.

3.1.1 Berechnen Sie die Werte für a, b und c für die aktuelle Produktionsperiode. 5

3.1.2 Deuten Sie Ihre Ergebnisse aus 3.1.1 im Sachzusammenhang. 3

3.1.3 Stellen Sie die betriebliche Materialverflechtung in Form eines Gozintographen (Verflechtungsdiagramm) dar. 5

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra

Aufgabe 2 **Seite 2/2** **Punkte**

Im Folgenden seien a = 4, b = 2 und c = 0.

3.2 Folgende Kosten fallen an:

Kosten der pflanzlichen Rohstoffe in GE/ME			Fertigungskosten der Zwischenprodukte in GE/ME			Fertigungskosten der Endprodukte in GE/ME		
R1	R2	R3	Z1	Z2	Z3	E1	E2	E3
4,5	2,8	3,2	8,5	5	6,5	3	2,5	4

Die fixen Kosten einer Wochenproduktion betragen 5000 GE.

3.2.1 Bestimmen Sie die variablen Kosten je ME der Parfums E1, E2 und E3. 8

3.2.2 Aus produktionstechnischen Gründen werden die Parfums E1, E2 und E3 im Verhältnis 1 : 2 : 4 hergestellt. Ermitteln Sie, wie viele ME der Parfums E1, E2 und E3 produziert werden, wenn die Gesamtkosten 47 232 GE pro Woche betragen. (Berufskolleg NRW 2013.) 5

Aufgabe 3 **Seite 1/2** **Lösung Seite 114**

Das Unternehmen Argoline produziert Spielzeug. Ganz neu zum Sortiment gehört das Stecksystem Argoline3D, das den leichten Zusammenbau auch komplexer Modelle ermöglicht.

Das Spielsystem Argoline3D besteht im wesentlichen aus den Grundelementen V1 (Verbindungswürfel), S1 (Stecker), P1 (Platte) und R1 (Rohr).

1 In einem zweistufigen Produktionsprozess werden aus den Grundelementen V1, S1, P1 und R1 die Wandteile W1 und W2 gefertigt und die Beutel B mit 100 Steckern S1 gepackt, da man viele Stecker S1 benötigt, um Wände zusammenzusetzen.
In der zweiten Produktionsstufe werden daraus die häufig nachgefragten Modelle Haus und Turm hergestellt.

Grundelement - Zwischenprodukt

	W1	W2	B
V1	12	9	0
S1	34	24	100
R1	17	12	0
P1	6	4	0

Zwischenprodukt - Endprodukt

	Haus	Turm
W1	12	12
W2	16	34
B	3	4

1.1 Berechnen Sie die Matrix, die die Anzahl der Grundelemente je Endprodukt Haus und Turm angibt.

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra

Aufgabe 3 **Seite 2/2**

1.2 Zum Osterfest bestellt ein Warenhaus 800 Stück des Modells Haus und 500 Stück des Modells Turm.
Berechnen Sie die Anzahl der für diesen Auftrag zu produzierenden Zwischenprodukte und den Bedarf an Grundelementen.

1.3 Berechnen Sie mit Hilfe der unten angegebenen Kosten- und Preisangaben den Gewinn des Osterauftrags.

Produktionskosten je Grundelement in EUR			
V1	S1	R1	P1
0,04	0,01	0,03	0,02

Produktionskosten je Zwischenprodukt in EUR		
W1	W2	B
0,30	0,20	0,05

Verpackungskosten pro Modell in EUR		Fixkosten in EUR	Verkaufspreis in EUR	
Modell Haus	Modell Turm	1500,00	Modell Haus	Modell Turm
0,50	0,60		50,00	75,00

2 Nach dem Osterverkauf soll das Lager wegen Renovierungsarbeiten kurzfristig geräumt werden. Es befinden sich noch 600 Stück W1, 1340 Stück W2 und 180 Beutel B im Lager.

2.1 Erläutern Sie allgemein, wie man anhand der Rangkriterien auf die Anzahl der Lösungen bei einem inhomogenen linearen Gleichungssystem schließen kann.

2.2 Beurteilen Sie, ob der Lagerbestand durch die Produktion der Modelle Haus und Turm aufgebraucht werden kann.

3 Ein Einzelhändler möchte kurzfristig eine größere Menge der Modelle Haus und Turm bestellen. Dabei sollen doppelt so viele Exemplare des Modells Turm wie des Modells Haus geliefert werden. Zum Zeitpunkt der Bestellung besteht mit 40500 Stück ein Lagerengpass an Rohren (R1). Von den anderen Grundelementen, Verbindungswürfel (V1), Platten (P1) und Stecker (S1), sind noch ausreichende Mengen vorhanden.
Zeigen Sie, dass unter den gegebenen Bedingungen maximal ein Erlös von 5000,00 € erzielt werden kann, wenn weiterhin für das Modell Haus ein Verkaufspreis von 50,00 € und für das Modell Turm von 75,00 € gilt.
(Nach Berufskolleg NRW 2010.)

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra

Aufgabe 4 **Seite 1/2** **Lösung Seite 116**

Punkte

Die Bio-Kosmetic ist ein Unternehmen der Kosmetikbranche, das aus ökologisch produzierten Grundstoffen hochwertige Pflegeprodukte herstellt. Sie beliefert Bioläden und eine große Drogeriekette. Insgesamt gilt: ME gleich Mengeneinheiten, GE gleich Geldeinheiten. Das Unternehmen Bio-Kosmetic stellt aus den Rohstoffen Milch, Lanolin, Rosenöl und Jojobaöl drei Grundkomponenten (G1 bis G3) her. Aus diesen werden zwei Markencremes hergestellt: Handcreme (H) und Faltencreme (F).

1 Bio-Kosmetic erhält von einer großen Drogeriekette den Auftrag, 100 ME von der Handcreme und 150 ME von der Faltencreme zu liefern. 5

Es gelten folgende Mengenbeziehungen:

	G1	G2	G3
Milch	20	15	10
Lanolin	1	2	0,5
Rosenöl	3	0	2
Jojobaöl	0	1	2

	H	F
G1	1	3
G2	5	0
G3	2	5

Der Betrieb hat einen Lagerbestand von 30000 ME Milch, 2000 ME Lanolin, 3000 ME Rosenöl und 4000 ME Jojobaöl. Prüfen Sie, ob mit diesem Lagerbestand der Auftrag erfüllt werden kann und bestimmen Sie gegebenenfalls, wie viele Mengeneinheiten der einzelnen Rohstoffe nachbestellt werden müssen.

2 Die Drogeriekette zahlt für jede ME der Handcreme 300 GE und für jede ME der Faltencreme 500 GE. 7

Dem Unternehmen Bio-Kosmetic entstehen folgende Kosten je ME bei der Herstellung:

Rohstoffkosten je ME				Fertigungskosten je ME der Grundkomponenten			Fertigungskosten je ME der Handcreme bzw. Faltencreme	
Milch	Lanolin	Rosenöl	Jojobaöl	G1	G2	G3	Handcreme	Faltencreme
0,2 GE	1 GE	15 GE	8 GE	0,5 GE	1 GE	3 GE	2,5 GE	2 GE

Zusätzlich fallen noch fixe Kosten in Höhe von 15750 GE an. Berechnen Sie den Gewinn für den Auftrag der Drogeriekette über 100 ME der Handcreme und 150 ME der Faltencreme.

3 Der leitende Chemiker will eine neue Rezeptur für die Grundkomponenten ausprobieren und den Anteil der Milch in den Grundkomponenten verändern, während der Gesamtmilchgehalt gleich bleiben soll, also:

	G1	G2	G3
Milch	a	b	c
Lanolin	1	2	0,5
Rosenöl	3	0	2
Jojobaöl	0	1	2

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra

Aufgabe 4 **Seite 2/2** **Punkte**

3 Die anderen Mengenbeziehungen bleiben unverändert, also:

	H	F
G1	1	3
G2	5	0
G3	2	5

	H	F
Milch	115	110
Lanolin	12	5,5
Rosenöl	7	19
Jojobaöl	9	10

3.1 Zeigen Sie, dass die benötigten Milchmengen pro Grundkomponente durch das folgende lineare Gleichungssystem bestimmen werden können: 4

$$\begin{aligned} & a + 5b + 2c = 115 \\ \wedge\ & 3a + \phantom{5b +{}} 5c = 110 \end{aligned}$$

3.2 Beurteilen Sie die Lösbarkeit des Gleichungssystem mithilfe des Rangkriteriums. 5

3.3 Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems. 5

3.4 Eine mögliche Schreibweise des Lösungsvektors des Gleichungssystems lautet: 5

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{110}{3} \\ \frac{47}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{15}t \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Leiten Sie den produktionstechnisch sinnvollen Bereich für t her.

(Berufskolleg NRW 2010.)

Aufgabe 5 **Seite 1/3** **Lösung Seite 117**

Die PlantGrow AG stellt in einem zweistufigen Produktionsprozess Blumensamenmischungen für den Direktvertrieb an Endverbraucher her.

1.1 In einer ersten Produktionsstufe werden aus vier Samenarten S1, S2, S3 und S4 drei verschiedene Tütenmischungen T1, T2 und T3 hergestellt, die in der zweiten Produktionsstufe zu zwei verschiedenen Verkaufsverpackungen V1 und V2 zusammengestellt werden. Die Mengeneinheiten (ME) der Samenarten und Tütenmischungen, die jeweils für eine ME der Tütenmischungen bzw. Verkaufsverpackungen benötigt werden, sind in den unten stehenden Matrizen A_{ST}, B_{TV} und C_{SV} angegeben.

$$A_{ST} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ b & 0 & 6 \end{pmatrix},\ B_{TV} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ c & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } C_{SV} = \begin{pmatrix} 10 & 28 \\ 5 & 13 \\ 10 & 16 \\ 13 & 34 \end{pmatrix} \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra

Aufgabe 5 **Seite 2/3** **Punkte**

1.1.1 Berechnen Sie die Zahlenwerte für a, b und c. 6

1.1.2 Ergänzen Sie die graphische Darstellung des zweistufigen Produktionsprozesses (Gozintograph) in Anlage 1 mit den entsprechenden Zahlenwerten. 5

1.3 Zur Sommersaison sollen doppelt so viele Verkaufsverpackungen von V1 wie von V2 je Woche hergestellt werden. Gleichzeitig stehen durch einen Engpass bei den Samenarten von S1 nur 1 500 ME und von S2 nur 550 ME je Woche zur Verfügung. Von S3 und S4 sind genügend Mengeneinheiten im Lager vorrätig. Ermitteln Sie, wie viele Mengeneinheiten der Verkaufsverpackungen von V1 und V2 unter diesen Bedingungen maximal je Woche hergestellt werden können. 8

1.2 Aus Kostengründen ist das Mischungsverhältnis der Tütenmischungen geändert worden, so dass jetzt nur noch die drei Samenarten S1, S2 und S3 zu drei Tütenmischungen T1, T2 und T3 verarbeitet werden, aus denen die beiden Verkaufsverpackungen V1 und V2 produziert werden.

Für die neuen Mengenangaben gelten folgenden Matrizen: $\overline{A}_{ST} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; $\overline{C}_{SV} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 6 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$

Für die Inverse von $\overline{A}_{ST}$ gilt: $\overline{A}_{ST}^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 16 & -4 \\ -1 & -6 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

Die Kosten je ME in GE lassen sich der folgenden Tabelle entnehmen:

Kosten für Samenarten			Fertigungskosten 1. Stufe zu Tüten			Fertigungskosten 2. Stufe zu Verkaufsverpackungen	
S1	S2	S3	T1	T2	T3	V1	V2
2	1	0,5	3	2	3,5	4	3

Für die Verkaufspreise in GE je ME gilt:

Verkaufspreise	
V1	V2
70	65

1.2.1 Leiten Sie aus den obigen Matrizen die Matrix $\overline{B}_{TV} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ her,

die den Verbrauch an Tütenmischungen je ME der Verkaufsverpackungen angibt. 8

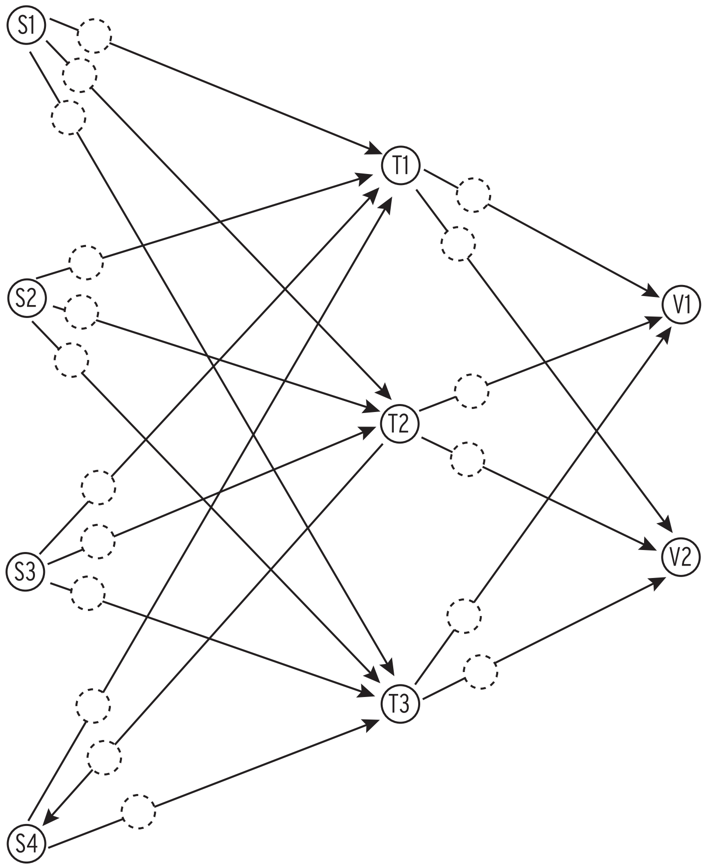
1.2.2 Berechnen Sie den Stückdeckungsbeitrag in GE/ME der Verkaufsverpackungen V1 und V2. 10

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra

Aufgabe 5 **Seite 3/3** **Punkte**

1.2.3 Zur Sommersaison sollen doppelt so viele Verkaufsverpackungen von V1 wie von V2 je Woche hergestellt werden. Gleichzeitig stehen durch einen Engpass bei den Samenarten von S1 nur 1 500 ME und von S2 nur 550 ME je Woche zur Verfügung. Von S3 sind genügend Mengeneinheiten im Lager vorrätig.
Ermitteln Sie, wie viele Mengeneinheiten der Verkaufsverpackungen von V1 und V2 unter diesen Bedingungen maximal je Woche hergestellt werden können. 8

Anlage 1



Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra

Aufgabe 6

Lösung Seite 119

Punkte

Das Unternehmen BIOSAFT produziert Smoothies in einem zweistufigen Produktionsprozess zunächst aus den Rohstoffen Obst (R1), Gemüse (R2) und Wasser (R3) die Zwischenprodukte Obstbasis (Z1), Gemüsebasis (Z2) und eine fruchtige Wasserbasis (Z3), die in einem zweiten Produktionsschritt zu den Endprodukten Obst-Smoothie (E1), Grüner-Smoothie (E2) und Obst-Gemüse-Smoothie (E3) verarbeitet werden.
Folgende Produktionsmengen in Mengeneinheiten (ME) seien bekannt:

$$B_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad C_{RE} = \begin{pmatrix} 34 & 18 & 26 \\ 11 & 28 & 21 \\ 8 & 18 & 36 \end{pmatrix}.$$

1.1 Interpretieren Sie das Element b_{31} der Matrix B_{ZE} anwendungsbezogen.
Bestimmen Sie die fehlende Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A_{RZ}.
Stellen Sie den gesamten Produktionsprozess in einem Verflechtungsdiagramm dar. 8

1.2 Der Discounter OLDI überlegt die Smoothies von BIOSAFT in sein Sortiment aufzunehmen und bietet dem Produzenten je Mengeneinheit Obst-Smoothie einen Preis von 30 Geldeinheiten (GE) und je Mengeneinheit Grüner-Smoothie einen Preis von 27 GE an. Der Auftrag umfasst 500 ME Obst-Smoothie und 200 ME Grüner-Smoothie. BIOSAFT möchte den Auftrag kalkulieren. Folgende Informationen bezüglich der Produktionskosten sind bekannt:

Rohstoffkosten in GE/ME		Herstellungskosten in GE/ME		Verarbeitungskosten in GE/ME	
R1	0,6	Z1	0,5	E1	0,9
R2	0,4	Z2	0,5	E2	0,8
R3	0,1	Z3	0,2	E3	1,1

Bestimmen Sie die variablen Stückkosten je Endprodukt.
Berechnen Sie die variablen Kosten für diesen Auftrag.
Begründen Sie nachvollziehbar, ob BIOSAFT den Auftrag annehmen sollte, wenn die Fixkosten für diesen Auftrag 550 GE betragen. 8

(Berufskolleg NRW 2016.)

Aufgaben zur Abiturvorbereitung – Lineare Algebra Lösungen

Lösung Aufgabe 1 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 102**

1.1.1 Bauteile-Zwischenprodukt-Matrix M_{BZ}

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix M_{ZE}; Bauteile-Endprodukt-Matrix M_{BE}

Es gilt: $M_{BZ} \cdot M_{ZE} = M_{BE}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 12 \\ 50 & 15 & 95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 18 & 5 \\ 22 & 83 & b \\ 195 & a & 240 \end{pmatrix}$

Für a und b gilt dann: $a = 50 \cdot 3 + 15 \cdot 4 + 95 \cdot 5 = 685$

$b = 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 12 \cdot 1 = 28$

Die exemplarische Überprüfung stimmt mit der Vorgabe überein.

1.1.2 a gibt die Anzahl der Bauteile B3 im Endprodukt E2 (Motorsteuergerät) an.

b gibt die Anzahl der Bauteile B2 im Endprodukt E3 (Bordcomputer) an.

1.2 Wochenproduktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 750 \\ 900 \\ 500 \end{pmatrix}$

Bauteilekosten je Endprodukt: $(0{,}03 \quad 0{,}02 \quad 0{,}01) \begin{pmatrix} 5 & 18 & 5 \\ 22 & 83 & 28 \\ 195 & 685 & 240 \end{pmatrix} = (2{,}54 \quad 9{,}05 \quad 3{,}11)$

Fertigungskosten je Endprodukt: $(1{,}5 \quad 2{,}5 \quad 2{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (5{,}5 \quad 27 \quad 13)$

Fertigungskosten der Endprodukte: $(10 \quad 15 \quad 20)$

Für die variablen Kosten je Endprodukt gilt:

$(2{,}54 \quad 9{,}05 \quad 3{,}11) + (5{,}5 \quad 27 \quad 13) + (10 \quad 15 \quad 20) = (18{,}04 \quad 51{,}05 \quad 36{,}11)$

Für die Gesamtkosten einer Wochenproduktion gilt:

$(18{,}04 \quad 51{,}05 \quad 36{,}11) \begin{pmatrix} 750 \\ 900 \\ 500 \end{pmatrix} + 7525 = 85055$

Die Gesamtkosten einer Wochenproduktion betragen 85 055 GE.

1.3 Ansatz: $M_{ZE} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4300 \\ 4250 \\ 4950 \end{pmatrix}$

Lösung des Gleichungssystems mit dem Gaußverfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 4300 \\ 0 & 4 & 3 & 4250 \\ 1 & 5 & 1 & 4950 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 4300 \\ 0 & 4 & 3 & 4250 \\ 0 & 7 & 0 & 5600 \end{array}\right) * \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 800 \\ 0 & 0 & 1 & 350 \end{array}\right) **$$

Durch Rückwärtseinsetzen aus * oder Gaußverfahren bis ** ergibt sich: Es können noch 600 ME von E1, 800 ME von E2 und 350 ME von E3 produziert werden.

1.3.2 Die Berechnung der Inversen hat genau dann einen Vorteil, wenn die Produktionsmengen nicht nur für einen Lagerbestand, sondern für unterschiedliche Lagerbestände bestimmt werden sollen. So reduziert sich der weitere Rechenaufwand lediglich auf eine einfache Multiplikation der Inversen von M_{ZE} mit den Vektoren der jeweiligen Lagerbestände. Das Lösen von Gleichungssystemen ist dann nur einmal notwendig.

Lösung Aufgabe 1 **Seite 2/2**

1.4.1 Die Preise müssen mit Rabattgewährung größer als Null sein:

$26{,}54 - 0{,}5r > 0 \quad \Leftrightarrow \quad r < 53{,}08$

$69{,}55 - 1{,}5r > 0 \quad \Leftrightarrow \quad r < 46{,}37$

$49{,}61 - r > 0 \quad \Leftrightarrow \quad r < 49{,}61$

Die Rabattgewährung r soll nur ganzzahlig ($\in \mathbb{N}$) sein; es gilt somit $0 \leq r \leq 46$.

1.4.2 Sinnvoller Bereich für r:

Es gilt: $G \geq 0$ mit $G = E - K$

$$G = e_r^T \cdot \vec{x} - K = \begin{pmatrix} 26{,}54 - 0{,}5r & 69{,}55 - 1{,}5r & 49{,}61 - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 750 \\ 900 \\ 500 \end{pmatrix} - 85055 \geq 0$$

$$19905 - 375r + 62595 - 1350r + 24805 - 500r - 85055 \geq 0$$

$$22250 - 2225r \geq 0$$

$$r \leq 10$$

Für die Wahl der Rabattkategorie r gilt: $0 \leq r \leq 10$

Lösung Aufgabe 2 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 103**

3.1 $A_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 4 & 1 & b \end{pmatrix}$; $B_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & c \end{pmatrix}$; $a, b, c \geq 0$; $C_{RE} = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 7 \\ 15 & 23 & 13 \\ 10 & 17 & 7 \end{pmatrix}$

3.1.1 Es gilt: $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$

Daraus folgt: $\begin{pmatrix} 1 & a & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 15 \qquad 1 + 2a + 6 = 15 \quad \Leftrightarrow a = 4$

$\begin{pmatrix} 4 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 10 \qquad 4 + 2 + 2b = 10 \quad \Leftrightarrow b = 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ c \end{pmatrix} = 7 \qquad 1 + 6 + c = 7 \quad \Leftrightarrow c = 0$

3.1.2 Deutung im Sachzusammenhang:

a= 4: Für eine ME des Zwischenproduktes Z2 werden 4 ME des pflanzlichen Rohstoffs R2 benötigt.

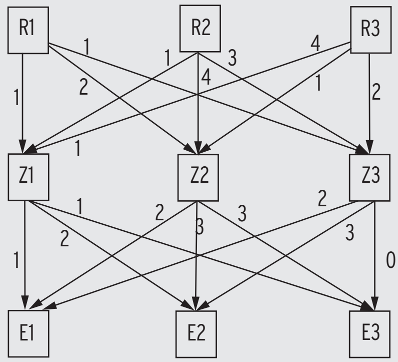
b = 2: Für eine ME des Zwischenproduktes Z3 werden 2 ME des pflanzlichen Rohstoffs R3 benötigt.

c = 0: Für eine ME des Endproduktes E3 werden keine ME des Zwischenproduktes Z3 verbraucht.

Lösung Aufgabe 2 **Seite 2/2**

3.1.3 Materialverflechtung

Gozintograph



3.2.1 **Variable Kosten je ME der Endprodukte E1, E2 und E3**

Materialkosten:

$$(4{,}5\quad 2{,}8\quad 3{,}2)\cdot C_{RE} = (4{,}5\quad 2{,}8\quad 3{,}2)\cdot\begin{pmatrix}7 & 11 & 7\\ 15 & 23 & 13\\ 10 & 17 & 7\end{pmatrix} = (105{,}5\quad 168{,}3\quad 90{,}3)$$

Fertigungskosten Zwischenprodukte:

$$(8{,}5\quad 5\quad 6{,}5)\cdot B_{ZE} = (8{,}5\quad 5\quad 6{,}5)\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix} = (31{,}5\quad 51{,}5\quad 23{,}5)$$

Variable Kosten je ME der Endprodukte:

$$(105{,}5\quad 168{,}3\quad 90{,}3) + (31{,}5\quad 51{,}5\quad 23{,}5) + (3\quad 2{,}5\quad 4)$$

$$= (140\quad 222{,}3\quad 117{,}8)$$

Die variablen Kosten für eine ME von E1 betragen 140 GE, für eine ME E2 222,3 GE und 117,8 GE für eine ME E3.

3.2.2 **Produktionszahlen der Endprodukte**

Zu lösen ist: $(140\quad 222{,}3\quad 117{,}8)\begin{pmatrix}x\\ 2x\\ 4x\end{pmatrix} + 5000 = 47232$

$140x + 444{,}6x + 471{,}2x + 5000 = 47232 \quad\Leftrightarrow\quad x = 40$

Vom Endprodukt E1 können 40 E, von E2 80 ME und von E3 160 ME hergestellt werden.

Lösung Aufgabe 3 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 104**

1.1 Das Element $a_{2;3}$ der Grundelement-Zwischenprodukt-Tabelle ist 100.

Ein Beutel B enthält 100 Stecker S1.

A: Grundelement-Zwischenprodukt-Matrix: $A = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 0 \\ 34 & 24 & 100 \\ 17 & 12 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

B: Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix: $B = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 16 & 34 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

C: Grundelement-Endprodukt-Matrix; $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 288 & 450 \\ 1092 & 1624 \\ 396 & 612 \\ 136 & 208 \end{pmatrix}$

1.2 Bedarf an Zwischenprodukten für den Auftrag $\vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 500 \end{pmatrix}$

$B \cdot \vec{x} = \vec{z} = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 16 & 34 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 800 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15600 \\ 29800 \\ 4400 \end{pmatrix}$

Bedarf an Grundelementen (Rohstoffen) für den Auftrag, also für $\vec{z} = \begin{pmatrix} 15600 \\ 29800 \\ 4400 \end{pmatrix}$

$A \cdot \vec{z} = \vec{r} = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 0 \\ 34 & 24 & 100 \\ 17 & 12 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15600 \\ 29800 \\ 4400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 455400 \\ 1685600 \\ 622800 \\ 212800 \end{pmatrix}$

Alternative: Die Grundelemente lassen sich auch mit $C \cdot \vec{x} = \vec{r}$ berechnen.

Für den Auftrag braucht man 455400 V1, 1685600 S1, 622800 R1, 212800 P1 und muss 15600 W1, 29800 W2 und 4400 B herstellen.

1.3 Produktionskosten Grundelemente: $(0{,}04 \quad 0{,}01 \quad 0{,}03 \quad 0{,}02) \begin{pmatrix} 455400 \\ 1685600 \\ 622800 \\ 212800 \end{pmatrix} = 58012$

Produktionskosten Zwischenprodukte: $(0{,}30 \quad 0{,}20 \quad 0{,}05) \begin{pmatrix} 15600 \\ 29800 \\ 4400 \end{pmatrix} = 10860$

Verpackungskosten: $(0{,}50 \quad 0{,}60) \begin{pmatrix} 800 \\ 500 \end{pmatrix} = 700$

Mit Fixkosten von 1500 EUR erhält man die

Gesamtkosten: 58012 + 10860 + 700 + 1500 = 71072

Erlös: $(50 \quad 75) \begin{pmatrix} 800 \\ 500 \end{pmatrix} = 77500$

Gewinn = Erlös – Kosten = 77500 – 71072 = 6428

Der Gewinn für diesen Auftrag beträgt 6428 EUR.

Lösung Aufgabe 3 **Seite 2/2**

2.1 Ein inhomogenes LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist genau dann lösbar, wenn $Rg(A) = Rg(A \mid \vec{b})$ gilt.

Für den Fall, dass $Rg(A) = Rg(A; \vec{b}) = n$ ist (n ist die Anzahl der Unbekannten), existiert genau eine Lösung.

Für den Fall, dass $Rg(A) = Rg(A; \vec{b}) < n$ ist (n ist die Anzahl der Unbekannten), gibt es unendlich viele Lösungen.

2.2 Bedingung für die Produktionsmengen der Endprodukte: $B \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 600 \\ 1340 \\ 180 \end{pmatrix}$

Einsetzen ergibt das LGS für p_1 und p_2: $\left(\begin{array}{cc|c} 12 & 12 & 600 \\ 16 & 34 & 1340 \\ 3 & 4 & 180 \end{array}\right)$

Umformung mit dem Gaußverfahren : $\left(\begin{array}{cc|c} 12 & 12 & 600 \\ 0 & 18 & 540 \\ 0 & 1 & 30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 12 & 12 & 600 \\ 0 & 18 & 540 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$Rg(A) = Rg(A; \vec{b}) = 2$ (Anzahl der Unbekannten = 2), es existiert genau eine Lösung.

$p_1 = 20$; $p_2 = 30$

Der Lagerbestand kann durch die Produktion von 20 Modellen Haus und 30 Modellen Turm vollständig aufgebraucht werden.

3 Bestellvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} z \\ 2z \end{pmatrix}$

Für diese Bestellung nötige Grundelemente R1:

Multiplikation der 3. Zeile der Grundelemente-Endprodukt-Matrix mit $\vec{b}$:

$(396 \quad 612)\begin{pmatrix} z \\ 2z \end{pmatrix} = 1620z$

Bedingung für z: $1620z \leq 40500 \quad \Leftrightarrow z \leq 25$

Es können daher höchstens 25 Modelle Haus und 50 Modelle Turm verkauft werden.

Maximaler Erlös: $(50 \quad 75)\begin{pmatrix} 25 \\ 50 \end{pmatrix} = 5000$

Unter diesen Bedingungen kann ein maximaler Erlös von 5000 EUR erzielt werden.

Lösung Aufgabe 4 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 106**

1 Verflechtungsmatrizen

$$A_{RG} = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 1 & 2 & 0{,}5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ B_{GM} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};\ C_{RM} = A_{RG} \cdot B_{GM} = \begin{pmatrix} 115 & 110 \\ 12 & 5{,}5 \\ 7 & 19 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Mit dem Auftragsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix}$ berechnet man den

Rohstoffbedarf für diesen Auftrag: $C_{RM} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 115 & 110 \\ 12 & 5{,}5 \\ 7 & 19 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28000 \\ 2025 \\ 3550 \\ 2400 \end{pmatrix}$

Der Lagerbestand reicht nicht aus.

Es ergeben sich folgende Nachbestellungen: $\begin{pmatrix} 30000 \\ 2000 \\ 3000 \\ 4000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28000 \\ 2025 \\ 3550 \\ 2400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ -25 \\ -550 \\ 1600 \end{pmatrix}$

Vom Lanolin müssen 25 ME und vom Rosenöl 550 ME nachbestellt werden.

2 Rohstoffkosten je ME der Endprodukte H und F:

$$K_R = \vec{k}_R \cdot C_{RM} = (0{,}2 \quad 1 \quad 15 \quad 8) \cdot \begin{pmatrix} 115 & 110 \\ 12 & 5{,}5 \\ 7 & 19 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} = (212 \quad 392{,}5)$$

Fertigungskosten der Grundkomponenten je ME der Endprodukte H und F:

$$K_G = \vec{k}_G \cdot B_{GM} = (0{,}5 \quad 1 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = (11{,}5 \quad 16{,}5)$$

Variable Herstellkosten je ME der Endprodukte H und F:

$$\vec{k}_v = \vec{k}_R \cdot C_{RM} + \vec{k}_Z \cdot B_{GM} + \vec{k}_E = (212 \quad 392{,}5) + (11{,}5 \quad 16{,}5) + (2{,}5 \quad 2) = (226 \quad 411)$$

Variable Herstellkosten für den gesamten Auftrag:

$$K_v = \vec{k}_v \cdot \vec{x} = (226 \quad 411) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix} = 84250$$

Erlöse für den gesamten Auftrag: $(300 \quad 500) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix} = 105000$

Gewinne = Erlöse – (variable Kosten + Fixkosten)

= 105000 – (84250 + 15750) = 5000

Es wird ein Gewinn in Höhe von 5000 GE erzielt.

Lösung Aufgabe 4 **Seite 2/2**

3.1 Es gilt: $A_{RG} \cdot B_{GM} = C_{RM}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 0{,}5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115 & 110 \\ 12 & 5{,}5 \\ 7 & 19 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Ausmultiplizieren (1. Zeile von A_{RG} · 1. + 2. Spalte von B_{GM}) ergibt das mehrdeutig lösbare Gleichungssystem: $a + 5b + 2c = 115 \wedge 3a + 5c = 110$

(2 Gleichungen für 3 Unbekannte)

3.2 LGS in Matrixform: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 115 \\ 3 & 0 & 5 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Eine weitere Umformung mithilfe des Gaußverfahrens ist nicht nötig.

Da $Rg(A \mid b) = Rg(A) = 2 < 3$ ist, hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen mit einem Freiheitsgrad, d. h. eine Unbekannte ist frei wählbar

3.3 Mit $c = t$ erhält man aus $3a + 5c = 110$: $3a = 110 - 5t \Leftrightarrow a = \frac{110}{3} - \frac{5}{3}t$

Einsetzen in $a + 5b + 2c = 115$ ergibt: $\frac{110}{3} - \frac{5}{3}t + 5b + 2t = 115$

Auflösen nach b: $5b = \frac{235}{3} - \frac{1}{3}t \quad \Leftrightarrow b = \frac{47}{3} - \frac{1}{15}t$

Damit entsteht der gegebene Lösungsvektor: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{110}{3} \\ \frac{47}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{15}t \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix}$.

3.4 Produktionstechnisch sinnvoller Bereich für t:

Berechnung von t aus a, b, $c \geq 0$:

$a = \frac{110}{3} - \frac{5}{3}t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq \frac{110}{5} = 22$

$b = \frac{47}{3} - \frac{1}{15}t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 47 \cdot 5 = 235$

$c = t \geq 0$

Multipliziert man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl, so dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

Alle drei Bedingungen sind erfüllt für $0 \leq t \leq 22$, also liegt t zwischen 0 und 22.

Lösung Aufgabe 5 **Seite 1/2** **Aufgabe Seite 107**

1.1.1 berechnet die Zahlenwerte für a, b und c.

Wegen $A_{ST} \cdot B_{TV} = C_{SV}$ gilt:

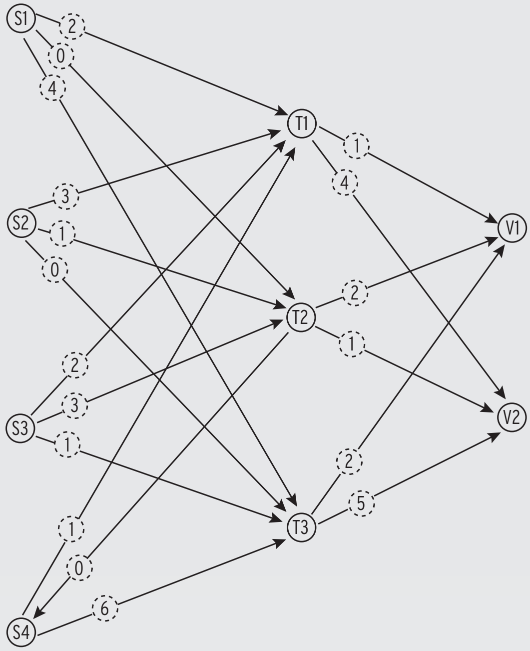
(1) $2 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + a \cdot 5 = 28 \Leftrightarrow \; = 4$

(2) $b \cdot 4 + 0 \cdot 1 + 6 \cdot 5 = 34 \Leftrightarrow b = 1$

(3) $3 \cdot 1 + 1 \cdot c + 0 \cdot 2 = 5 \Leftrightarrow c = 2$

Lösung Aufgabe 5 Seite 2/2

1.1.2 ergänzt den Gozintographen mit den Zahlenwerten.



1.1.3 ermittelt unter den genannten Bedingungen die max. Anzahl an V1 und V2.

Sei x_2 die Anzahl von V2 und $2x_2$ die Anzahl von V1, dann gilt für den erforderlichen Rohstoffbedarfsvektor $\vec{r}$:

$$\vec{r} = C_{SV} \cdot \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{ergibt}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 28 \\ 5 & 13 \\ 10 & 16 \\ 13 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48x_2 \\ 23x_2 \\ 36x_2 \\ 60x_2 \end{pmatrix}$$

Aufgrund der bestehenden Restriktionen gilt:

$48x_2 \leq 1500$ und $23x_2 \leq 550 \;\Leftrightarrow\; x_2 \leq 31{,}25$ und $x_2 \leq 23{,}91$ folgt: $x_2 \leq 23{,}91$ ME

Unter den gegebenen Bedingungen können maximal 23,91 ME von V2 bzw. 47,82 ME von V1 hergestellt werden.

1.2.1 Aus $\overline{A}_{ST} \cdot \overline{B}_{TV} = \overline{C}_{SV}$ folgt: $\overline{B}_{TV} = \overline{A}_{ST}^{-1} \cdot \overline{C}_{SV}$

Einsetzen ergibt: $\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 16 & -4 \\ -1 & -6 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 6 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = B_{TV}$

1.2.2 Stückdeckungsbeitrag in GE/ME der Verkaufsverpackungen V1 und V2.

Gegeben sind

- $\vec{k}_{Roh} = (2 \quad 1 \quad 0{,}5)$ Rohstoffkosten je ME S1 bis S3
- $\vec{k}_{FerT} = (3 \quad 2 \quad 3{,}5)$ Fertigungskosten je ME T1 bis T3
- $\vec{k}_{FerV} = (4 \quad 3)$ Fertigungskosten je V1 und V2
- $\vec{p} = (70 \quad 65)$ Verkaufspreise je V1 und V2

$$\vec{k}_{var} = \vec{k}_{Roh} \cdot C_{SV} + \vec{k}_{FerT} \cdot B_{TV} + \vec{k}_{FerV}$$

Einsetzen: $\vec{k}_{var} = (2 \quad 1 \quad 0{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 6 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} + (3 \quad 2 \quad 3{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (4 \quad 3)$

$= (29 \quad 30) + (14 \quad 16) + (4 \quad 3) = (47 \quad 49)$

Somit gilt für den Stückdeckungsbeitrag $db = \vec{p} - \vec{k}_{var} = (70 \quad 65) - (47 \quad 49) = (23 \quad 16)$

Der Stückdeckungsbeitrag je ME von V1 beträgt 23,00 GE und 16,00 GE je ME von V2.

Lösung Aufgabe 6 **Aufgabe Seite 110**

1.1 **Interpretation** des Elements $b_{31} = 0$

Das Zwischenprodukt fruchtige Wasserbasis wird für die Herstellung einer Mengeneinheit des Endprodukts Obst-Smoothie nicht benötigt.

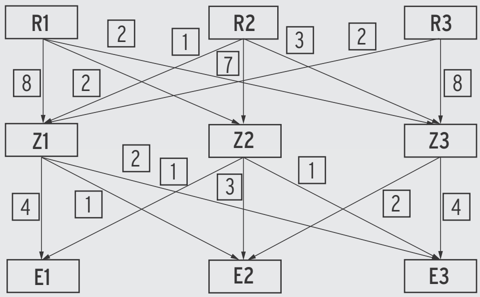
Bestimmung der fehlenden Produktionsmatrix

Es gilt: $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE} \quad | \cdot B_{ZE}^{-1}$ von rechts

$$A_{RZ} = C_{RE} \cdot B_{ZE}^{-1}$$

Mit Hilfsmittel: $A_{RZ} = \begin{pmatrix} 34 & 18 & 26 \\ 11 & 28 & 21 \\ 8 & 18 & 36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Darstellung des Verflechtungsdiagramms



1.2 Bestimmung der variablen Stückkosten je Endprodukt

Variable Herstellungskosten pro Endprodukt: $\vec{k}_V = \vec{k}_R \cdot C_{RE} + \vec{k}_Z \cdot B_{ZE} + \vec{k}_E$

$$\vec{k}_V = (0{,}6 \quad 0{,}4 \quad 0{,}1) \cdot \begin{pmatrix} 34 & 18 & 26 \\ 11 & 28 & 21 \\ 8 & 18 & 36 \end{pmatrix} + (0{,}5 \quad 0{,}5 \quad 0{,}2) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} + (0{,}9 \quad 0{,}8 \quad 1{,}1)$$

$$= (25{,}6 \quad 23{,}8 \quad 27{,}6) + (2{,}5 \quad 2{,}4 \quad 2{,}3) + + (0{,}9 \quad 0{,}8 \quad 1{,}1)$$

$$= (29 \quad 27 \quad 31)$$

Die variablen Stückkosten je Endprodukt betragen für Obst-Smoothie: 29 GE

Grüner-Smoothie: 27 GE

Obst-Gemüse-Smoothie: 31 GE

Variable Kosten für den Auftrag : $K_V = (29 \quad 27) \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \end{pmatrix} = 19900$

Die variablen Kosten betragen 19900 GE für diesen Auftrag.

Entscheidung, ob der Auftrag angenommen werden soll

Erlös: $(30 \quad 27) \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \end{pmatrix} = 20400$

Der Erlös des Auftrags übersteigt die variablen Kosten nur um 500 GE. Der Auftrag sollte nicht angenommen werden, da die auftragsbezogenen Fixkosten 550 GE betragen.

3 Stochastik

Formelsammlung zur Stochastik

Für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A gilt: $0 \leq P(A) \leq 1$

Für das Gegenereignis $\overline{A}$: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Additionssatz $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Multiplikationssatz $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Alle Ergebnisse eines Zufallsexperiments sind gleichwahrscheinlich. $P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}} = \frac{g}{m}$

Wahrscheinlichkeit und Baumdiagramm

Pfadmultiplikationsregel: Im Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Pfades gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf den Teilstrecken des Pfades.

Pfadadditionsregel: Im Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der in diesem Ereignis enthaltenen Ergebnisse.

Die Zufallsvariable X ist B(n; p; k)-verteilt; **Binomialverteilung** B(n; p; k)

Formel von Bernoulli $P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$

Erwartungswert $\mu = E(X) = n \cdot p$

Varianz: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$ Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

Kumulierte Binomialverteilung F(n; p; k):

Linksseitiges Intervall: $P(X \leq 8) = F(n; p; 8)$

Ablesen aus der Tabelle der kumulierten Binomialverteilung

Punktwahrscheinlichkeit: $P(X = 8) = B(n; p; 8)$

Ablesen aus der Tabelle der Binomialverteilung

Rechtsseitiges Intervall: $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7)$

Intervallwahrscheinlichkeit: $P(3 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 2)$

Kombinatorik

Anzahl der Stichproben bei k Ziehungen aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln

	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
geordnete Stichproben	n^k	$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ (Variationen)
ungeordnete Stichproben	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$ (Kombinationen)

Permutationen: Mögliche Anordnung aller n Elemente einer Menge

$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ Anzahl der Permutationen, wenn die n Elemente untereinander verschieden sind.

III Musteraufgabensätze zum Aufgabenteil A ab 2024

Aufgabensatz 1 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

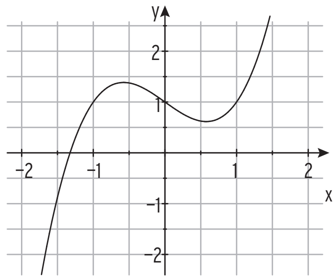
Lösungen Seite 162/163

Pflichtaufgabe Analysis **Punkte**

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f, g und h durch

$f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 - x + 1$ und $h(x) = x^4 + x^2 + 1$.

a) Die Abbildung zeigt den Graphen einer der drei Funktionen. Geben Sie an, um welche Funktion es sich handelt. Begründen Sie, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt. 3



b) Die erste Ableitungsfunktion von h ist h′.

Bestimmen Sie den Wert von $\int_0^1 h'(x)\,dx$. 2

2

Pflichtaufgabe Stochastik

Bei der Wintersportart Biathlon wird bei jeder Schießeinlage auf fünf Scheiben geschossen. Ein Biathlet tritt bei einem Einzelrennen zu einer Schießeinlage an, bei der er auf jede Scheibe einen Schuss abgibt. Diese Schießeinlage wird modellhaft durch eine Bernoullikette mit der Länge 5 und der Trefferwahrscheinlichkeit p beschrieben. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Treffer.

a) Nennen Sie in diesem Sachzusammenhang das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit $P(X < 3)$ bestimmt werden kann. 1

b) Entscheiden Sie, welcher der beiden Terme die Wahrscheinlichkeit für genau vier Treffer beschreibt: (i) $\binom{5}{4} \cdot p \cdot (1-p)^4$ (ii) $\binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)$ 2

c) Erläutern Sie anhand eines Beispiels, dass die modellhafte Beschreibung der Schießeinlage durch eine Bernoullikette unter Umständen der Realität nicht gerecht wird. 2

Aufgabensatz 1

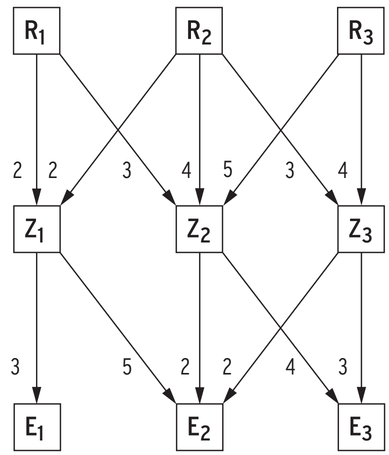
Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Pflichtaufgabe Lineare Algebra **Punkte**

Ein Betrieb erzeugt aus drei Rohstoffen (R_1, R_2, R_3) drei Zwischenprodukte (Z_1, Z_2, Z_3), die zu drei Endprodukten (E_1, E_2, E_3) weiterverarbeitet werden.
Es gibt Werte für a und b, so dass die Zusammenhänge durch den folgenden Verflechtungsgraphen und die Rohstoff-Endprodukt-Tabelle gegeben sind.

Verflechtungsgraph

Angaben in Mengeneinheiten



Rohstoff-Endprodukt-Tabelle

Anzahl der benötigten ME der Rohstoffe je ME des Endprodukts

Rohstoff \ Endprodrukt	E_1	E_2	E_3
R_1	*a*	16	12
R_2	6	*b*	25
R_3	0	18	32

a) Der Zusammenhang Rohstoff-Zwischenprodukt wird durch eine Matrix A_{RZ}, der Zusammenhang Zwischenprodukt-Endprodukt durch eine Matrix B_{ZE} und der Zusammenhang Rohstoff-Endprodukt durch eine Matrix C_{RE} beschrieben.

Geben Sie eine Beziehung zwischen diesen drei Matrizen an. 1

b) Bestimmen Sie die fehlenden Wert für und a b. 2

c) Betrachtet werden die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass B die zu A inverse Matrix ist. 2

Aufgabensatz 1

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Wahlaufgaben

Bearbeiten Sie 2 Aufgaben aus den 4 Wahlaufgaben, davon mindestens eine Analysis-Aufgabe

Wahlaufgabe 1 – Analysis

Punkte

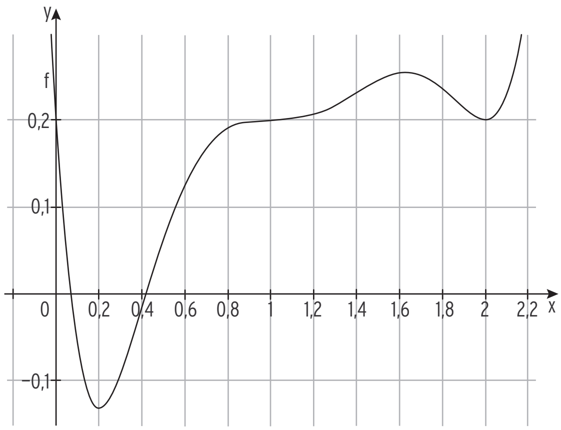
Eine Funktion f ist durch ihre Gleichung $f(x) = x^3 - 8x^2 + 12x$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f. 2

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P(1 \mid f(1))$. 3

Wahlaufgabe 2 – Analysis

Abgebildet ist der Graph einer Funktion f.



a) Geben Sie je einen Wert für a und b an, so dass gilt:

I $f'(0{,}2) = a$

II $f''(b) = 0$. 2

b) Markieren Sie einen Punkt $P(x_P \mid y_P)$ auf dem Funktionsgraphen von f, für den gilt: 3

$f''(x_P) = 0$ und $f'(x_P) < 0$.

Begründen Sie, warum der von Ihnen gewählte Punkt P die beiden Bedingungen erfüllt.

Aufgabensatz 1

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Wahlaufgaben

Bearbeiten Sie 2 Aufgaben aus den 4 Wahlaufgaben, davon mindestens eine Analysis-Aufgabe

Punkte

Wahlaufgabe 3 Stochastik

60% der Kunden eines Reiseunternehmens reisen gerne in die Region A,

30% in die Region B, 20% reisen in jede der beiden Regionen gerne.

a) Unter denjenigen Kunden, die gerne in die Region A reisen, wird eine Person zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person auch gerne in die Region B reist. 2

b) Berechnen Sie den Anteil der Kunden, die entweder in die Region A oder in die Region B gerne reisen. 3

Wahlaufgabe 4 Lineare Algebra

Im Folgenden sind alle vorliegenden $(n \times n)$ - Matrizen invertierbar. 5

E ist die Einheitsmatrix.

Lösen Sie die Matrizengleichung $(B + A) \cdot (E - A) = (X - B) \cdot A$

nach X auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

Aufgabensatz 2

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

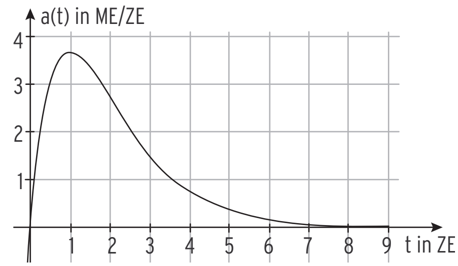
Lösungen Seite 164 – 166

Pflichtaufgaben

Punkte

Pflichtaufgabe Analysis

Die PRINTFIX AG fertigt innovative und hochwertige 3D-Drucker. Der momentane Absatz in Mengeneinheiten pro Zeiteinheit (ME/ZE) kann durch den Graphen a des Produktlebenszyklus $a(t) = 10t \cdot e^{-t}$ mit $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ beschrieben werden.



a) Bestimmen Sie ausschließlich mit Hilfe der notwendigen Bedingung den Zeitpunkt, an dem die PRINTFIX AG die meisten 3D-Drucker pro ZE absetzt. 3

b) In t = 2 liegt eine Wendestelle vor. Interpretieren Sie diese ökonomisch. 2

Pflichtaufgabe Stochastik

In einer Urne U_1 befinden sich vier rote und zwei gelbe Kugeln, in einer Urne U_2 zwei rote, eine gelbe und eine blaue Kugel.

a) Eine der beiden Urnen wird zufällig ausgewählt. Anschließend wird daraus zweimal hintereinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt werden kann, dass beide entnommenen Kugeln rot sind. 2

b) Eine der beiden Urnen wurde zufällig ausgewählt; aus dieser wurde eine Kugel zufällig entnommen. Die entnommene Kugel ist gelb oder blau. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel aus der Urne U_1 stammt. 3

Pflichtaufgabe Lineare Algebra

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.5 Entscheiden Sie für jeden der Terme A + B und A · B, ob er definiert ist. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung. 2

1.6 Bestimmen Sie für die Matrix $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Werte von a, b, c und d so, dass $B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt. 3

Aufgabensatz 2

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Wahlaufgaben

Bearbeiten Sie 2 Aufgaben aus den 4 Wahlaufgaben, davon mindestens eine Analysis-Aufgabe

Wahlaufgabe 1 — Analysis

Punkte

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x}$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$.

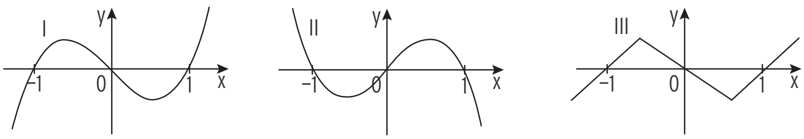
a) Gegeben ist die Gleichung $\frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x} = \frac{2}{a}$. Bestimmen Sie eine Lösung für x. 2

b) Bestimmen Sie alle Werte für a so, dass der vertikale Abstand der Graphen von f_a und f_a' an der Stelle $x = 0$ mindestens 3 beträgt. 3

Wahlaufgabe 2 — Analysis

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x^3 - x$.

a) Einer der folgenden Graphen I, II und III stellt f dar. Geben Sie die Graphen an, die dafür nicht infrage kommen, und begründen Sie Ihre Angabe. 2



b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f und die x-Achse einschließen. 3

Aufgabensatz 2

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Wahlaufgaben

Bearbeiten Sie 2 Aufgaben aus den 4 Wahlaufgaben, davon mindestens eine Analysis-Aufgabe

Wahlaufgabe 3 – Stochastik

Punkte

Bei einem Spiel wird gleichzeitig mit einem roten und einem blauen Laplace-Würfel gewürfelt. Die Seiten beider Würfel sind mit den Augenzahlen von 1 bis 6 beschriftet.

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl des blauen Würfels größer ist als die des roten Würfels, beträgt $\frac{15}{36}$. 3

Begründen Sie, dass diese Aussage wahr ist.

b) Die Zufallsgröße X ist wie folgt definiert: 2

$X = 0$, wenn die Augenzahl des roten Würfels kleiner ist als die des blauen Würfels.

$X = 1$, wenn die Augenzahl beider Würfel gleich ist.

$X = 2$, wenn die Augenzahl des roten Würfels größer ist als die des blauen Würfels.

Ermitteln Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X.

Wahlaufgabe 4 – Lineare Algebra

Die folgenden Tabellen geben die Materialverflechtung in einem zweistufigen Produktionsprozess an, in dem aus Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zunächst die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und anschließend die Endprodukte E_1 und E_2 entstehen.

	Z_1	Z_2
R_1	1	0
R_2	3	1
R_3	2	a

	E_1	E_2
Z_1	4	b
Z_2	1	3

	E_1	E_2
R_1	4	2
R_2	c	9
R_3	12	16

a) Zeichnen Sie das Verflechtungsdiagramm. 2

b) Ermitteln Sie die fehlenden Werte für a, b und c. 3

Aufgabensatz 3

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Lösungen Seite 167/168

Pflichtaufgaben

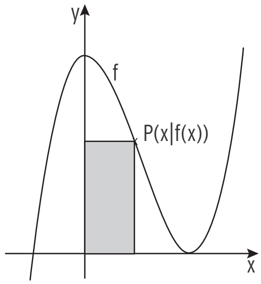
Pflichtaufgabe Analysis

Punkte

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

a) Zeigen Sie, dass $x_E = 2$ eine der beiden Extremstellen der Funktion f ist. 2

b) Jeder Punkt $P(x \mid f(x))$ mit $0 < x < 2$ legt ein achsenparalleles Rechteck fest (siehe Abbildung). Für genau einen x-Wert x_{max} wird der Flächeninhalt dieses Rechtecks maximal. Weisen Sie nach, dass gilt: $x_{max} \neq 1$. 3



Pflichtaufgabe Stochastik

In einer Urne befinden sich 6 weiße und 4 schwarze Kugeln.

Bei einem Auswahlverfahren ziehen 10 Bewerber nacheinander ohne Zurücklegen eine Kugel aus dieser Urne. Jeder Bewerber, der eine weiße Kugel zieht, ist ausgewählt.

a) Der zweite Bewerber wird ausgewählt. 2
Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür 60 % beträgt.

b) Entscheiden Sie, ob der erste oder der dritte Bewerber die größere Chance hat, ausgewählt zu werden. Begründen Sie Ihre Entscheidung. 3

Pflichtaufgabe Lineare Algebra

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, die Matrix A besitzt eine Inverse. 3

b) Bestätigen Sie, dass $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ die Inverse der Matrix A ist. 2

Aufgabensatz 3

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

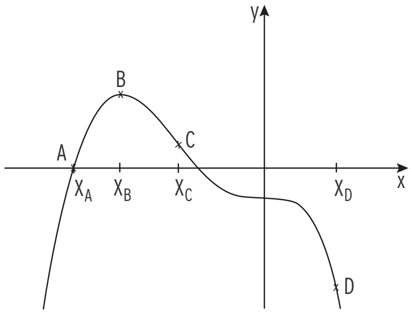
Wahlaufgaben

Bearbeiten Sie 2 Aufgaben aus den 4 Wahlaufgaben, davon mindestens eine Analysis-Aufgabe

Wahlaufgabe 1 – Analysis

Punkte

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f. Die Punkte A, B, C und D liegen auf dem Graphen von f.



a) Geben Sie an, ob die Funktionswerte der Ableitungsfunktion f′ an den angegebenen Stellen positiv, negativ oder null sind. 3

	x_A	x_B	x_C
$f'(x)$			

b) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr ist. 2

Für die bestimmten Integrale $I_1 = \int_{x_A}^{x_C} f(x)\,dx$ und $I_2 = \int_{x_C}^{x_D} f(x)\,dx$ gilt: $I_1 < I_2$.

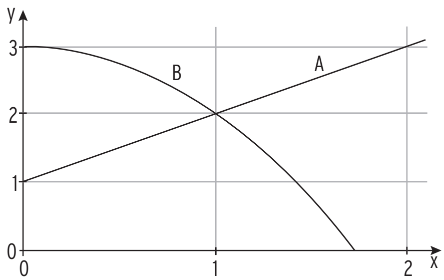
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Wahlaufgabe 2 – Analysis

Die Abbildung zeigt die Graphen einer Angebots- und einer Nachfragefunktion.

a) Ordnen Sie begründet zu und geben Sie die Funktionsgleichungen an.

b) Berechnen Sie die Konsumentenrente und kennzeichnen Sie diese in der Abbildung.



Aufgabensatz 3

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Wahlaufgaben

Bearbeiten Sie 2 Aufgaben aus den 4 Wahlaufgaben, davon mindestens eine Analysis-Aufgabe

Wahlaufgabe 3 — Stochastik

Punkte

In einem Behälter befinden sich drei blaue und zwei rote Kugeln.

a) Zwei Kugeln werden zufällig nacheinander entnommen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Kugeln unterschiedliche Farben haben. 2

b) Die beiden entnommenen Kugeln werden in den Behälter zurückgelegt. Anschließend entnehmen zwei Spielerinnen dem Behälter abwechselnd jeweils eine Kugel zufällig.
Die Spielerin, die zuerst eine rote Kugel entnimmt, gewinnt.
Weisen Sie nach, dass diejenige Spielerin, die die erste Kugel entnimmt, einen Vorteil hat. 3

Wahlaufgabe 4 — Lineare Algebra

In einem mehrstufigen Prozess ergeben sich folgende Zusammenhänge: $C_{RE} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Die Produktion der Endprodukte erfolgt mit $\vec{m} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix}$.

Im Lager befinden sich noch die folgenden Rohstoffe: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \\ 19 \end{pmatrix}$.

Die Rohstoffpreise pro Mengeneinheit werden durch den Vektor $\vec{k}_R^T = (2 \;\; 3 \;\; 2)$ angegeben.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Endprodukte, die durch den vollständigen Verbrauch der Rohstoffe hergestellt werden können. 3

b) Berechnen Sie die Rohstoffkosten für die Produktion von 3 ME E_1, 2 ME von E_2 und 1 ME von E_3. 2

Musteraufgabensätze zum Aufgabenteil A ab 2024 Grundkursfach Mathematik - Lösungen

Aufgabensatz 1 Lösungen

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Pflichtaufgabe Analysis

a) Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion g ($g(x) = x^3 - x + 1$).
Die Funktion f ($f(x) = x^2 - x + 1$) ist eine quadratische, die nur eine Extremstelle haben kann.

Der Graph der Funktion h ($h(x) = x^4 + x^2 + 1$) ist achsensymmetrisch, der abgebildete Graph ist nicht achsensymmetrisch.

b) h ist eine Stammfunktion von h′. $\int_0^1 h'(x)dx = h(1) - h(0) = 3 - 1 = 2$

Pflichtaufgabe Stochastik

a) Der Biathlet trifft höchstens drei Scheiben.

b) Begründete Entscheidung für Term (ii): p ist die Trefferwahrscheinlichkeit
$p^4 \cdot (1 - p)$ bedeutet dann 4 Treffer und einen Nichttreffer

c) z. B.: Trifft der Biathlet bei keinem der ersten drei Schüsse, so hat er möglicherweise aufgrund zunehmender Nervosität beim vierten Schuss eine geringere Trefferwahrscheinlichkeit.

Pflichtaufgabe Lineare Algebra

a) Zusammenhang: $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$

b) Mit $A_{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B_{ZE} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $C_{RE} = \begin{pmatrix} a & 16 & 12 \\ 6 & b & 25 \\ 0 & 18 & 32 \end{pmatrix}$

ergibt sich aus $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$:

$a = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 6$

$b = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 24$

c) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

B ist die zu A inverse Matrix.

Aufgabensatz 1 Lösungen

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Wahlaufgabe 1 Analysis

f mit $f(x) = x^3 - 8x^2 + 12x;\ x \in \mathbb{R}$

a) Nullstellen: $f(x) = 0$ $\quad x(x^2 - 8x + 12) = 0 \ \Leftrightarrow x_1 = 0;\ \ x_2 = 2;\ \ x_3 = 6$

b) Ansatz für die Tangente: $t(x) = mx + n$ mit $m = f'(1)$; $f'(x) = 3x^2 - 16x + 12$, also $f'(1) = -1$;

$t(x) = -x + n$; Punktprobe mit $P(1 \mid f(1)) = P(1 \mid 5)$: $\ 5 = -1 + n \Rightarrow n = 6$

Tangentengleichung: $t(x) = -x + 6$

Wahlaufgabe 2 Analysis

a) $f'(0{,}2) = 0$, also $a = 0$

$f''(b) = 0$, z. B für $b = 1$ (Wendestelle)

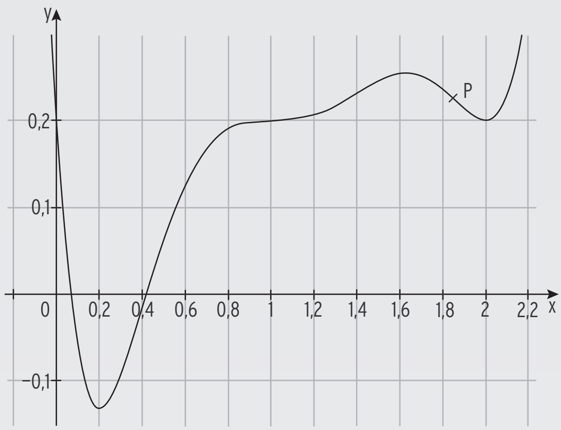
b) $f''(x_P) = 0$:

Es könnte ein Wendepunkt sein.

$f'(x_P) < 0$:

Der Graph muss im Punkt P eine negative Steigung haben.

P ist ein Wendepunkt mit negativer Steigung.



Wahlaufgabe 3 Stochastik

a) $\frac{20\,\%}{60\,\%} = \frac{1}{3}$

b) $60\,\% + 30\,\% - 2 \cdot 20\,\% = 50\,\%$

Wahlaufgabe 4 Lineare Algebra

$(B + A) \cdot (E - A) = (X - B) \cdot A$	(ausmultiplizieren)
$B{\cdot}E - B{\cdot}A + A{\cdot}E - A{\cdot}A = X{\cdot}A - B{\cdot}A$	
$B - B{\cdot}A + A - A^2 = X{\cdot}A - B{\cdot}A$	$\mid + B{\cdot}A$
$B + A - A^2 = X{\cdot}A$	$\mid \cdot A^{-1}$ von rechts
$B{\cdot}A^{-1} + A{\cdot}A^{-1} - A^2{\cdot}A^{-1} = X$	$(A^2 \cdot A^{-1} = A^{2-1} = A)$
$B{\cdot}A^{-1} + E - A = X$	

Aufgabensatz 2 **Lösungen**

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Pflichtaufgabe Analysis

a) Größter Absatz pro ZE (größter momentaner Absatz):

$a'(t) = 10 \cdot e^{-t} + 10t \cdot e^{-t} \cdot (-1) = (10 - 10t) \cdot e^{-t}$

Bed.: $a'(t) = 0 \Leftrightarrow 10 - 10t = 0$

wegen $e^{-t} > 0$: $t = 1$

Zum Zeitpunkt 1 ZE wird der größte momentane Absatz erzielt.

b) Bis t = 2 ändern sich die Absatzzahlen progressiv fallend, danach degressiv fallend. Stark abnehmender Verlauf wechselt in t = 2 in schwächer abnehmenden Verlauf. t = 2 ist die Stelle mit dem stärksten Absatzrückgang.

Pflichtaufgabe Stochastik

a) $P(U_1) = P(U_2) = \frac{1}{2}$; Zwei rote aus Urne U_1 oder zwei rote aus Urne U_2 ; Ziehen mit ZL

$P(rr) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ (Term genügt)

b) bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{g\vee b}(U_1) = \frac{P((g\vee b) \cap U_1)}{P(g\vee b)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{12}{30}$

Pflichtaufgabe Lineare Algebra

a) A + B: nicht definiert (unterschiedliche Anzahlen der Zeilen)

A ·B: definiert; Anzahl der Spalten von A stimmt mit Anzahl der Zeilen von B überein

b) $B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \quad \Rightarrow C = B^{-1}$

Damit: $\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \frac{1}{6}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$

Vergleich ergibt $a = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $b = 0$, $c = -\frac{1}{6}$, $d = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Variante: $B \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ a + 2c & b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vergleich ergibt $a = \frac{1}{3}$, $b = 0$.

Einsetzen von a in $a + 2c = 0$ ergibt $c = -\frac{1}{6}$

und einsetzen von b in $b + 2d = 1$ ergibt $d = \frac{1}{2}$

Aufgabensatz 2 **Lösungen**

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Wahlaufgaben

Wahlaufgabe 1 Analysis

a) Gleichung $\frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x} = \frac{2}{a}$ auflösen nach x: $e^{a \cdot x} = 2$

Logarithmieren $a \cdot x = \ln(2) \Rightarrow x = \frac{\ln(2)}{a}$

b) Ableitung von f_a mit der Kettenregel: $f_a'(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x} \cdot a = e^{a \cdot x}$

Vertikaler Abstand in x = 0: $f_a(0) - f_a'(0) = \frac{1}{a} - 1$ $\quad (e^{a \cdot 0} = 1)$

Ungleichung für a: $\frac{1}{a} - 1 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{a} \geq 4 \quad | \cdot a$

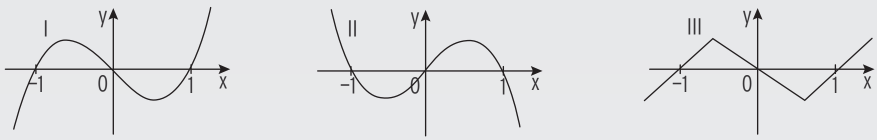
$4a \leq 1 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{4}$ $\quad (0 < a < 1)$

Für $0 < a \leq \frac{1}{4}$ beträgt der gesuchte vertikale Abstand mindestens 3.

Wahlaufgabe 2 Analysis

f mit $f(x) = x^3 - x$; der Graph ist symmetrisch zu (0| 0), verläuft vom 4. in den 1. Quadranten

a) Graph von f



Graph II kommt nicht in Frage: Verlauf von II. in den IV. Quadranten; $f(0,5) < 0$

Graph III kommt nicht in Frage: $f'(x)$ ist nicht konstant auf $-0,5 < x < 0,5$

b) Inhalt der Fläche zwischen Graph von f und x-Achse

$f(x) = 0 = x^3 - x$; $\quad x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_{2|3} = \pm 1$

Wegen Punktsymmetrie zu O: $2 \cdot \int_{-1}^{0} f(x)dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^{0} = 2 \cdot (0 - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2})) = \frac{1}{2}$

Wahlaufgabe 3 Stochastik

a) Insgesamt gibt es 36 Möglichkeiten für die Kombination der Augenzahlen, davon 6-mal übereinstimmende Augenzahlen. Vom Rest (30 Möglichkeiten) ist die Hälfte zum gefragten Ereignis A zu zählen. Damit ergibt sich $P(A) = \frac{15}{36}$

b) Erwartungswert $E(X) = 0 \cdot \frac{15}{36} + 1 \cdot \frac{6}{36} + 2 \cdot \frac{15}{36} = 1$

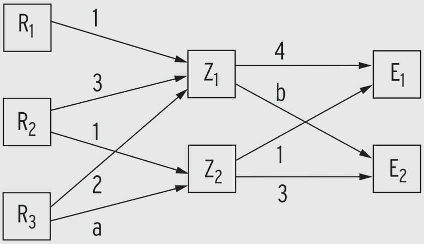
Aufgabensatz 2 **Lösungen**

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Wahlaufgaben

Wahlaufgabe 4 Lineare Algebra

a) Verflechtungsdiagramm:



b) Aus der Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 13 & 3b+3 \\ 8+a & 2b+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ c & 9 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

erhält man: $8 + a = 12 \Rightarrow a = 4$

$3b + 3 = 9 \Rightarrow b = 2$ (auch direkt)

$c = 13$

Probe in $2b + 3a = 16$ ergibt eine wahre Aussage.

Aufgabensatz 3 **Lösungen**

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel
Pflichtaufgaben
Pflichtaufgabe Analysis

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4;\ x \in \mathbb{R}$

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f''(x) = 6x - 6$;

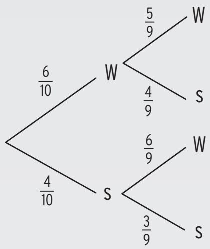
$f'(2) = 0$; $f''(2) = 6$ $x_E = 2$ ist eine der beiden Extremstellen der Funktion f. (T(2 | 0))

b) Für $P(x \mid f(x))$, $0 < x < 2$ ist der Flächeninhalt des achsenparallelen Rechtecks:

$A(x) = x \cdot f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x$.

x_{max} müsste Lösung der Gleichung $A'(x) = 0$ sein. Mit $A'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4$ erhält man jedoch $A'(1) = -1 \neq 0$, also kann bei $x = 1$ kein maximaler Flächeninhalt vorliegen.

Pflichtaufgabe Stochastik



a) 2. Bewerber wird ausgewählt bei ww und sw

Z. B. mit einem Baumdiagramm erhält man

$\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{54}{90} = \frac{6}{10}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Bewerber ausgewählt wird, beträgt 60 %.

b) Für den ersten Bewerber beträgt die Wahrscheinlichkeit, ausgewählt zu werden, $\frac{6}{10}$.

Der dritte Bewerber wird bei den Zugfolgen www, wsw, sww, und ssw ausgewählt.

Dafür beträgt die Wahrscheinlichkeit $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{432}{720}$

Nun ist $\frac{6}{10} = \frac{6}{10} \cdot \frac{72}{72} = \frac{432}{72}$, also ist die Wahrscheinlichkeit für beide Bewerber gleich groß.

Pflichtaufgabe Lineare Algebra

a) Die Matrix A besitzt eine Inverse, wenn das LGS $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur trivial lösbar ist.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$; B ist die Inverse der Matrix A ist.

Aufgabensatz 3 **Lösungen**

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Wahlaufgaben

Wahlaufgabe 1 Analysis

a) $f'(x) < 0$: G_f fallend; $f'(x) > 0$: G_f steigend; $f'(x) = 0$: G_f hat waagrechte Tangente

	x_A	x_B	x_C
$f'(x)$	positiv	null	negativ

b) Die Aussage $I_1 < I_2$ ist falsch.

Im Intervall $[x_A; x_C]$ ist $f(x) \geq 0$, also ist $I_1 > 0$.

Die Fläche, die im Intervall $[x_C; x_D]$ zwischen dem Graphen von f und der x-Achse liegt, liegt deutlich überwiegend unterhalb der x-Achse. Also gilt sicher $I_2 < 0$.

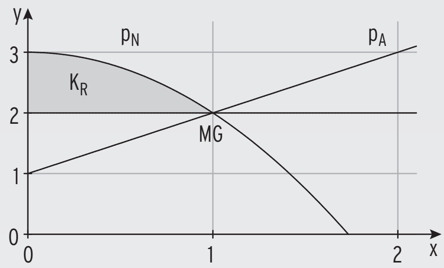
Wahlaufgabe 2 Analysis

a) A: Monoton wachsend; Angebotsfunktion

$p_A(x) = x + 1$

B: Monoton fallend; Nachfragefunktion

$p_N(x) = -x^2 + 3$



b) $p_A(x) = p_N(x)$ $\quad -x^2 + 3 = x + 1$

$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1\,;\ x_2 = -2$

MG (1 | 2)

Konsumentenrente: $\int_0^1 p_N(x)\,dx - 2 = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x\right]_0^1 - 2 = \frac{2}{3}$

Wahlaufgabe 3 Stochastik

a) Zweimaliges Ziehen ohne Zurücklegen: br oder rb

$p = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$

b) Für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Spielerin gewinnt, die die erste Kugel entnimmt, gilt $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5} > \frac{1}{2}$. (Ergebnisse: r, bbr)

Wahlaufgabe 4 Lineare Algebra

a) $C_{RE} \cdot \vec{m} = \vec{r}$ ergibt $4x + 10x + 6x = 20$ für $x = 1$

(so wie $x + 6x + 12x = 19$ für $x = 1$ und $2x + 2x + 15x = 19$ für $x = 1$)

Von E_1 können 1 ME, von E_2 2 ME und von E_3 3 ME hergestellt werden.

b) $\vec{k}_R^{\,T} \cdot C_{RE} = (2 \quad 3 \quad 2)\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (15 \quad 21 \quad 26)\,;\ (15 \quad 21 \quad 26) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 113$

Die Rohstoffkosten belaufen sich auf 113 GE.