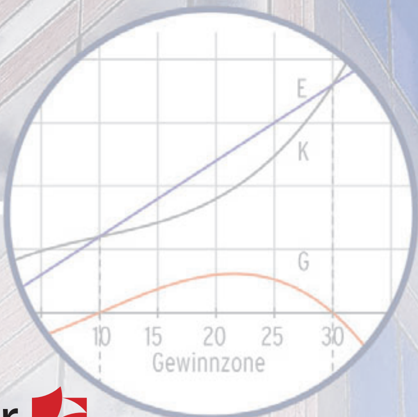
Bohner
Ott
Deusch

Formelsammlung

für das berufliche Gymnasium
Niedersachsen
Mathematik



Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Kurt Bohner

Lehrauftrag Mathematik am Beruflichen Schulzentrum Wangen (BSW)
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Ronald Deusch

Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Umschlag: Kreis oben: Syda Productions - www.colourbox.de

* * * * * * * * * * *

2. Auflage 2019

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

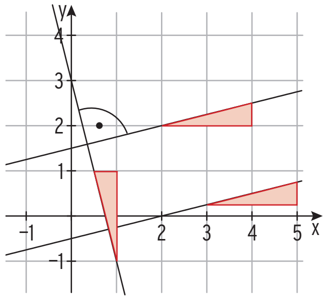
ISBN 978-3-8120-1695-7

Die Geraden mit den **Steigungen m_1** und **m_2**

- sind **parallel** zueinander: $m_1 = m_2$
- stehen aufeinander **senkrecht**

  (orthogonal zueinander):

  $m_1 \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}; m_1 \neq 0$



Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen für zwei Unbekannte

Gleichsetzungsverfahren **Einsetzungsverfahren** **Additionsverfahren**

Quadratische Funktion – Parabel

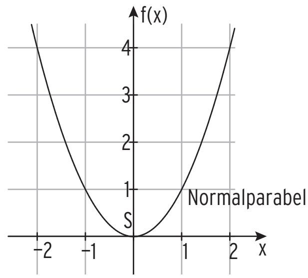
Ganzrationale Funktion f 2. Grades

mit $f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0; x \in \mathbb{R}$

(quadratische Funktion)

Normalparabel: $y = x^2$

mit Scheitel S(0 | 0)



Funktionsterm f(x) in

Hauptform: $f(x) = ax^2 + bx + c$

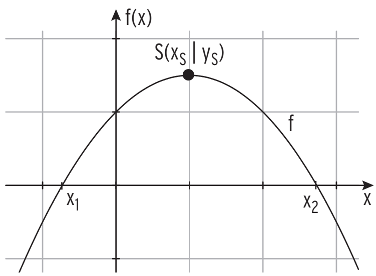
(Normalform)

Scheitelform: $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$

$S(x_S | y_S)$ Scheitelpunkt

Produktform: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

x_1, x_2 sind die Nullstellen von f.

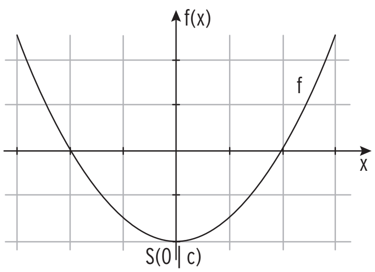


Symmetrie

zur Ordinatenachse: $f(x) = ax^2 + c$

mit Scheitel S(0 | c)

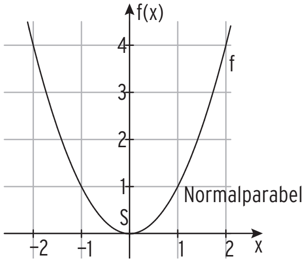
Bedingung: $f(x) = f(-x)$



Schaubilder von quadratischen Funktionen

Grundfunktion f mit $f(x) = x^2$; $x \in \mathbb{R}$

Graph von f: Normalparabel

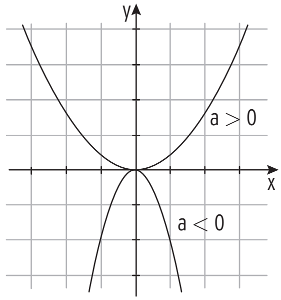


Parametervariationen:

- f mit $f(x) = a \cdot x^2$; $a \neq 0$

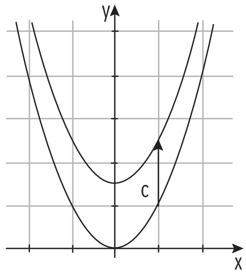
  Für $a > 0$: Streckung in Ordinatenrichtung

  Für $a < 0$: Streckung in Ordinatenrichtung mit Faktor $|a|$ und Spiegelung an der Abszissenachse



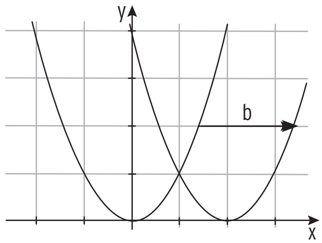
- f mit $f(x) = x^2 + c$

  Verschiebung in **Ordinatenrichtung** um c



- f mit $f(x) = (x - b)^2$

  Verschiebung in Abszissenrichtung um b



f mit $f(x) = a \cdot (x - b)^2 + c$

Streckung in Ordinatenrichtung mit Faktor |a| — **Verschiebung in Abszissenrichtung um b** — **Verschiebung in Ordinatenrichtung um c**

Hinweis: Betrag einer Zahl a

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Quadratische Gleichung

Quadratische Gleichung der Form: $x^2 + px + q = 0$

pq-Lösungsformel: $x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

mit **Diskriminante** $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

Quadratische Gleichung der Form: $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

abc-Lösungsformel: $x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

mit **Diskriminante** $D = b^2 - 4ac$

Die Anzahl der Lösungen hängt von der Diskriminante D ab.

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
zwei Lösungen	**eine (doppelte) Lösung**	**keine Lösung**
$x_1 \neq x_2$	$x_1 = x_2$	

Produktform: $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$

Lösungen $x = x_1 \vee x = x_2$

Satz vom Nullprodukt: Ein **Produkt ist null,** wenn **mindestens ein Faktor null** ist:

$$u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee v = 0 \quad („\vee“ \text{ bedeutet „oder“})$$

Grafische Interpretation einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$

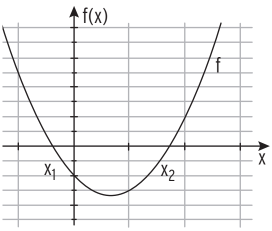
bzw. $x^2 + px + q = 0$

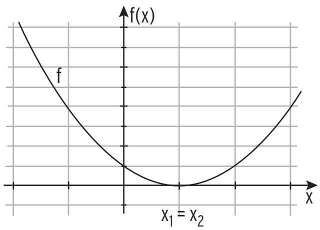
Die Gleichung hat

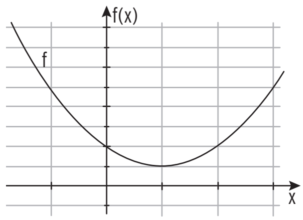
zwei Lösungen	**eine (doppelte) Lösung**	**keine Lösung**
$x_1 ; x_2$	$x_{1\|2}$	

Die Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ bzw. $f(x) = x^2 + px + q$ hat

zwei Nullstellen	**eine (doppelte) Nullstelle**	**keine Nullstelle**







Bed. für die Nullstellen: $f(x) = 0$

Wachstum

- **Exponentielles Wachstum**

$f(t) = a \cdot b^t$ bzw. $f(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$; $t \geq 0$

Wachstumsfaktor: $b > 1$

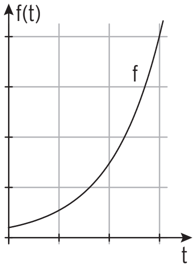
Zerfallsfaktor: $0 < b < 1$

Wachstumskonstante: $k > 0$

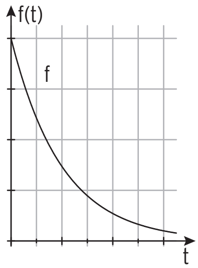
Zerfallskonstante: $k < 0$

Anfangsbestand: $a = f(0)$

Wachstum



Zerfall



Differenzialgleichung: $f'(t) = k \cdot f(t)$

Halbwertszeit t_H (für $k < 0$): $t_H = -\frac{\ln(2)}{k}$

Verdoppelungszeit t_V (für $k > 0$): $t_V = \frac{\ln(2)}{k}$

t_H und t_V sind unabhängig vom Anfangsbestand f(0).

- **Beschränktes Wachstum**

$f(t) = g - ae^{k \cdot t}$; $a > 0$, $k < 0$, $t \geq 0$

g: Sättigungsgrenze

$f(0) = g - a$: Anfangsbestand

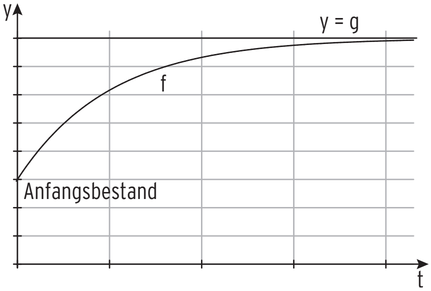
Beschränkter Zerfall

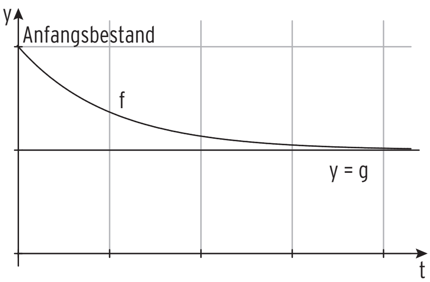
$f(t) = g + ae^{k \cdot t}$; $a > 0$, $k < 0$, $t \geq 0$

g: Sättigungsgrenze

$f(0) = g + a$: Anfangsbestand

Differenzialgleichung: $f'(t) = k \cdot (g - f(t))$





- **Logistisches Wachstum**

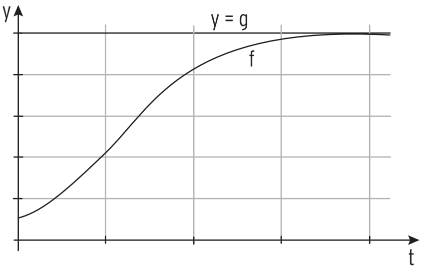
$f(t) = \frac{g}{1 + a \cdot e^{-b \cdot t}}$ mit $a = \frac{g}{f(0)} - 1$; $b = k \cdot g$

g: Sättigungsgrenze;

k: Wachstumskonstante

Differenzialgleichung:

$f'(t) = k \cdot f(t) \cdot (g - f(t))$



Flächenberechnung

• Fläche zwischen dem Graphen von f und der Abszissenachse

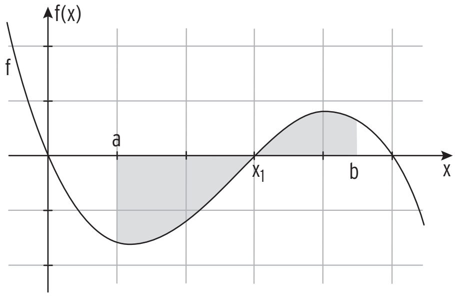
Nullstelle von f auf [a; b]: x_1

Gesamter Flächeninhalt:

$$A = \left|\int_a^{x_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{b} f(x)\,dx\right|$$

orientierter Flächeninhalt

(Flächenbilanz): $\int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{b} f(x)\,dx$



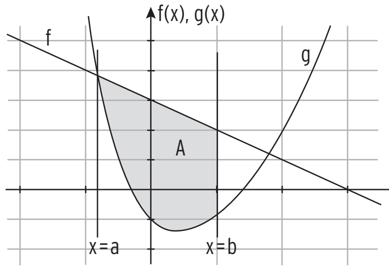
• Fläche zwischen den Graphen von f und g

Für $f(x) \geq g(x)$ auf [a; b] gilt:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx,$$

Für $f(x) \leq g(x)$ auf [a; b] gilt:

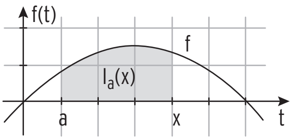
$$A = -\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



Integralfunktion

$$I_a(x) = \int_a^x f(t)dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$$

Die **Integralfunktion** zur unteren Grenze a ist eine Stammfunktion von f mit $I_a(a) = 0$.



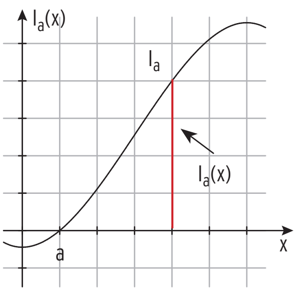
Begriffe:

Unbestimmtes Integral: $\int f(x)dx = F(x) + C$

(Menge von Funktionen)

Bestimmtes Integral: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ **(reelle Zahl)**

Integralfunktion I_a mit $I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ (Funktion)

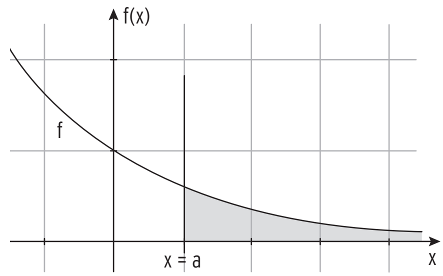


Uneigentliches Integral

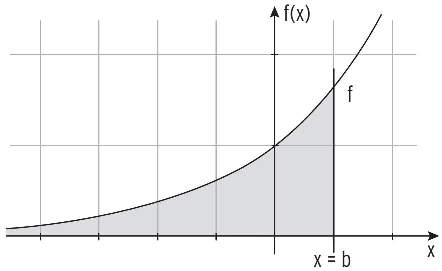
Flächenberechnung mithilfe einer Grenzwertbetrachtung

- **Integration über ein unbeschränktes Intervall**

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$



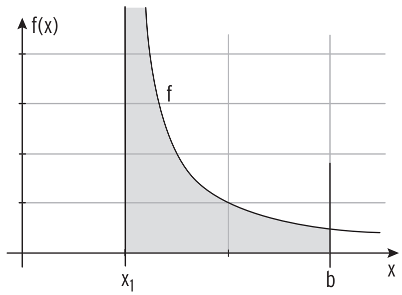
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$



- **Integration einer unbeschränkten Funktion**

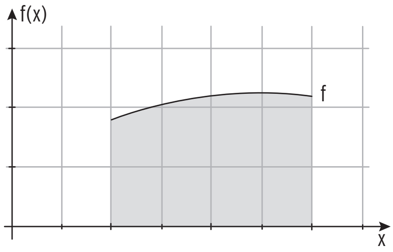
x_1 ist Polstelle von f.

$$\int_{x_1}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to x_1} \int_a^b f(x)\,dx$$



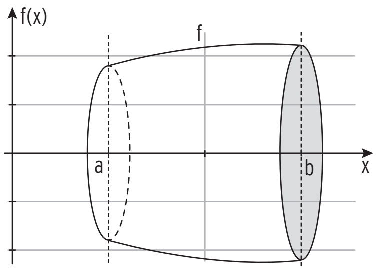
Rotation um die Abszissenachse

Die Fläche zwischen dem Graphen von f und der Abszissenachse rotiert um die Abszissenachse.

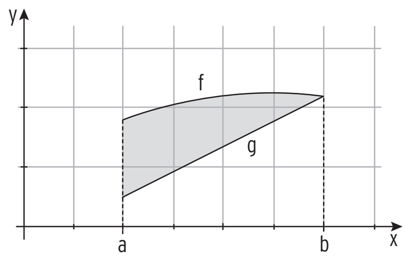


Volumen des Rotationskörpers:

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\, dx$$



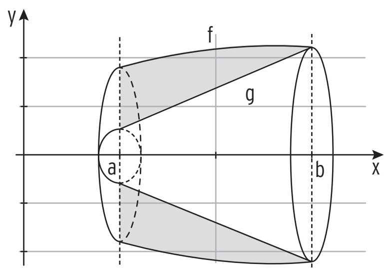
Die Fläche zwischen den Graphen von f und von g rotiert um die Abszissenachse.

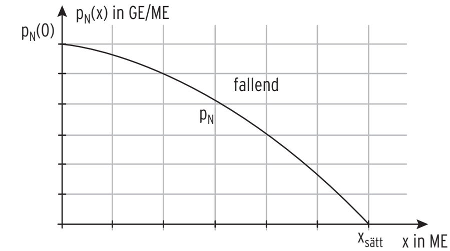
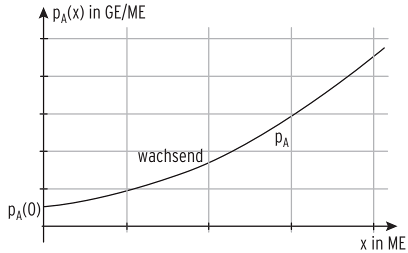
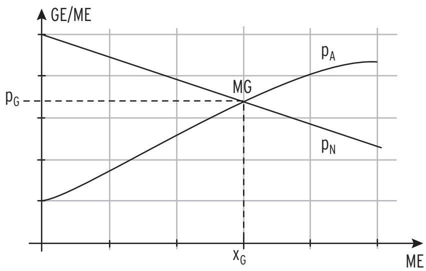
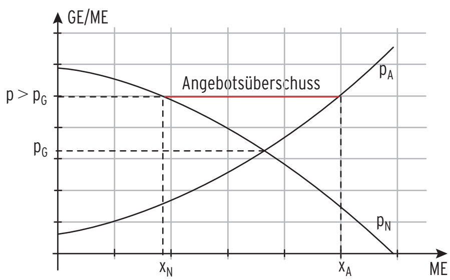


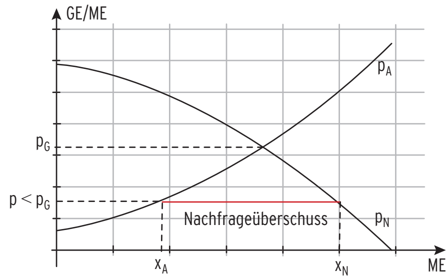
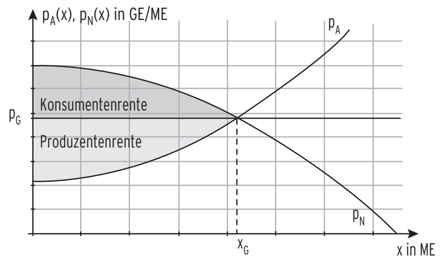
Volumen des Rotationskörpers:

$$V = V_{\text{außen}} - V_{\text{innen}}$$

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\, dx - \pi \cdot \int_a^b (g(x))^2\, dx$$



Bezeichnung	Symbol; Formel	Schaubild
Nachfragefunktion Sättigungsmenge $x_{Sätt}$ Höchstpreis	$p_N(x)$ $p_N(x) = 0$ $p_N(0)$	
Angebotsfunktion Mindestangebotspreis	$p_A(x)$ $p_A(0)$	
Gleichgewichtsmenge Gleichgewichtspreis Marktgleichgewicht	x_G $p_G = p_N(x_G) = p_A(x_G)$ $MG(x_G \mid p_G)$	
Angebotsüberschuss	$x_A - x_N$	

Bezeichnung	Symbol; Formel	Schaubild
Nachfrageüberschuss	$x_N - x_A$	
Konsumentenrente	$KR = \int_0^{x_G} (p_N(x) - p_G)\,dx$ bzw. $KR = \int_0^{x_G} p_N(x)dx - x_G \cdot p_G$	
Produzentenrente	$PR = \int_0^{x_G} (p_G - p_A(x))\,dx$ bzw. $PR = x_G \cdot p_G - \int_0^{x_G} p_A(x)dx$	

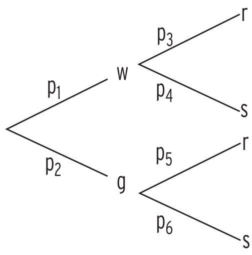
Degressive Abschreibung

Anschaffungskosten	B_0
Abschreibungssatz	p %
Buchwert nach n Jahren	$B_n = B_0 \cdot (1 - \frac{p}{100})^n$
Abschreibungsbetrag nach n Jahren	$a_n = \frac{p}{100} \cdot (1 - \frac{p}{100})^{n-1} \cdot B_0$
Wechselzeitpunkt n bei einer Nutzungsdauer von m Jahren	$n = m + 1 - \frac{1}{p\%} = m + 1 - \frac{100}{p}$

Mehrstufige Zufallsexperimente

Baumdiagramm

mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten:



$P(wr) = p_1 \cdot p_3$

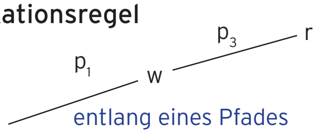
$P(ws) = p_1 \cdot p_4$

$P(gr) = p_2 \cdot p_5$

$P(gs) = p_2 \cdot p_6$

Pfadregeln:

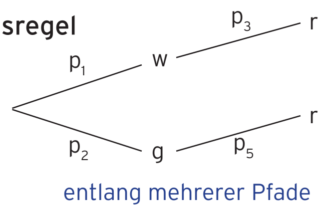
Pfadmultiplikationsregel



$P(w \wedge r)$ = $p_1 \cdot p_3$

und Wahrscheinlichkeiten multiplizieren

Pfadadditionsregel



$P(wr \vee gr)$ = $p_1 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_5$

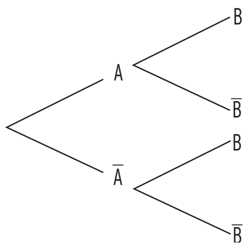
oder Wahrscheinlichkeiten addieren

Vierfeldertafel für Wahrscheinlichkeiten

Zwei Merkmale mit jeweils zwei Ausprägungen

	B	$\overline{B}$	Summe
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Summe	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

zugehöriges Baumdiagramm

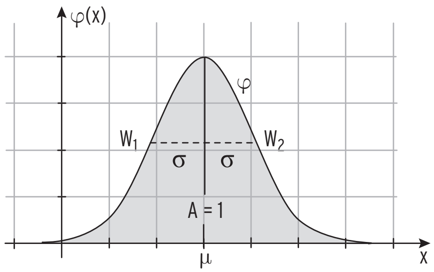


Normalverteilung

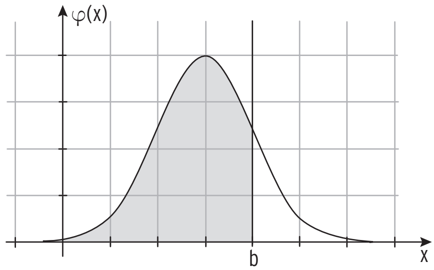
Dichtefunktion φ mit

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2};\ x \in \mathbb{R}$$

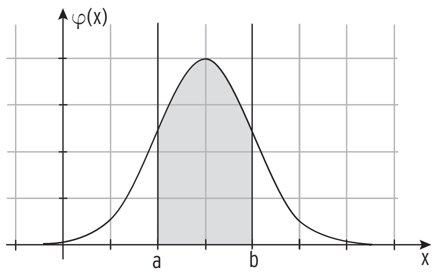
Die Dichtefunktion beschreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer **stetig** verteilten Zufallsvariablen (Normalverteilung).



$$P(X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} \varphi(x)dx$$



$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} \varphi(x)dx$$



Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Laplace-Bedingung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} > 3$

Näherungsformel von Moivre-Laplace

- Mit der **Dichtefunktion** φ: $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx$

  mit Stetigkeitskorrektur 0,5: $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1 - 0,5}^{x_2 + 0,5} \varphi(x)dx$

- Mit der **Summenfunktion** Φ: $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \Phi(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_1 - \mu}{\sigma})$

  mit Stetigkeitskorrektur 0,5: $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \Phi(\frac{x_2 + 0,5 - \mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_1 - 0,5 - \mu}{\sigma})$

Leontief-Modell

Input-Output-Tabelle

	S_1	S_2	S_3	Marktabgabe	Produktion
S_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	y_1	x_1
S_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_2	x_2
S_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	y_3	x_3

Dabei ist x_{ij} die Lieferung des Sektors S_i an den Sektor S_j (in geeigneten Einheiten).

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ **Produktion,** auch Bruttooutput, ...

$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ **Marktabgabe,** auch Konsum, Endverbrauch, ...

Inputmatrix oder Technologiematrix A: $A = \begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} & \frac{x_{13}}{x_3} \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} & \frac{x_{23}}{x_3} \\ \frac{x_{31}}{x_1} & \frac{x_{32}}{x_2} & \frac{x_{33}}{x_3} \end{pmatrix}$

Innerbetrieblicher Absatz: $A \cdot \vec{x}$

Zusammenhang:

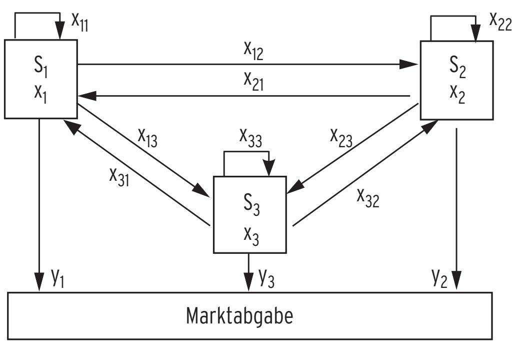
$A \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x}$

$\vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x}$

$\vec{x} = (E - A)^{-1} \vec{y}$

$(E - A)^{-1}$ **Leontief-Inverse**

Gozintograph (Verflechtungsdiagramm)



Vektorgeometrie

Vektoren im Anschauungsraum

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ (**Ortsvektoren** der Punkte A: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ und B: $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$) gilt:

Skalare Multiplikation: $r \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$

Kollinearität:

$r \cdot \vec{a}$ und $\vec{a}$ sind **kollinear** (**parallel**).

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **kollinear,** wenn es ein $r \neq 0$ gibt, sodass $\vec{b} = r \cdot \vec{a}$ gilt.

Addition bzw. Subtraktion von Vektoren: $\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$

Linearkombination: $\vec{x} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$

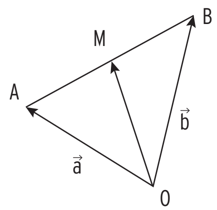
Betrag des Vektors $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Betrag des Vektors $\overrightarrow{AB}$: $|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

$|\overrightarrow{AB}|$ ist der **Abstand** der Punkte A und B.

Mittelpunkt M der Strecke AB: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Geometrische Form: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$

Koordinatenform: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen **senkrecht aufeinander**, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
($\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind zueinander orthogonal: $\vec{a} \perp \vec{b}$).

Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$