Bohner
Ott
Deusch

Mathematik

für das Berufskolleg – Berufliches Gymnasium

Jahrgangsstufen 12 und 13

Ausführliche Lösungen

zu im Buch gekennzeichneten Aufgaben

Lösungsheft

1. Auflage 2018
ISBN 978-3-8120-0666-8

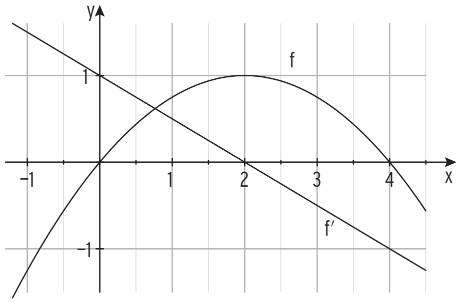
Nordrhein-Westfalen

Merkur
Verlag Rinteln

Umschlag: Kreis oben: www. adpic.de, Kreis unten: Robert Kneschke – Fotolia.com

Lehrbuch Seite 17

3 Der Graph von f hat einen Hochpunkt in $x = 2$, die Steigung wechselt das Vorzeichen von + nach −.
Der Graph von f ist wachsend für $x < 2$, danach fallend.
Der Graph von f ist eine Parabel, das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 2. Grades.



Lehrbuch Seite 20

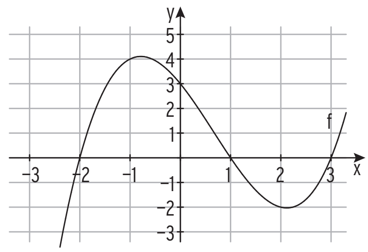
1 a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 3$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2}$; $f''(x) = 3x - 2$

$H(-0{,}79 \mid 4{,}10)$; $T(2{,}12 \mid -2{,}03)$

$N_1(-2 \mid 0)$; $N_2(1 \mid 0)$; $N_3(3 \mid 0)$

$S_y(0 \mid 3)$



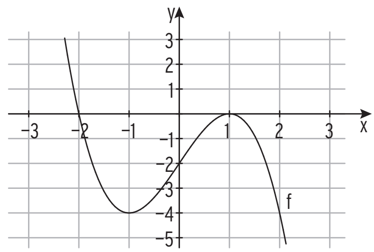
b) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

$f'(x) = -3x^2 + 3$; $f''(x) = -6x$

$H(1 \mid 0)$; $T(-1 \mid -4)$

$N_1(-2 \mid 0)$; $N_{2|3}(1 \mid 0)$

$S_y(0 \mid -2)$

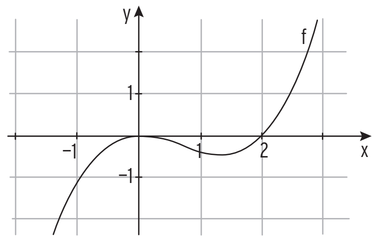


c) $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2$

$f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{3}{2}x$; $f''(x) = \frac{9}{4}x - \frac{3}{2}$

$H(0 \mid 0) = N_1$; $T(\frac{4}{3} \mid -\frac{4}{9})$

$N_2(2 \mid 0)$



Lehrbuch Seite 28

2 a) $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + 3$; $f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$; $f''(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$; $f'''(x) = -\frac{3}{4} \neq 0$

$W(\frac{2}{3} \mid \frac{128}{27})$

b) $f(x) = 6x^2 - \frac{2}{3}x^3$; $f'(x) = 12x - 2x^2$; $f''(x) = 12 - 4x$; $f'''(x) = -4 \neq 0$

$W(3 \mid 36)$

Lehrbuch Seite 31

2 b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$

$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$; $f''(x) = -6x + 12$

$f'''(x) = -6 \neq 0$

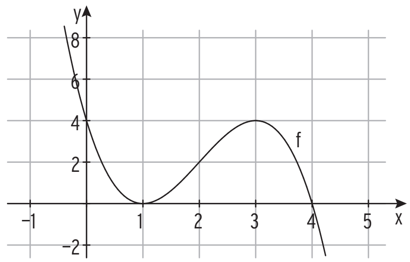
$f(x) = 0$

Mit GTR/CAS

oder Polynomdivision mit $(x - 1)$

$N_{1|2}(1 \mid 0) = T$; $N_3(4 \mid 0)$; $S_y(0 \mid 4)$

$H(3 \mid 4)$; $W(2 \mid 2)$



Lehrbuch Seite 43

2 $G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 2x^2 + 60x - 98$

a) $G(7{,}9) = 7{,}8 > 0$ und $G(8{,}1) = -12{,}2 < 0$ VZW von $G(x)$ von + nach −

b) $G(x) = 110 \Leftrightarrow -x^3 + 2x^2 + 60x - 208 = 0$

Mit GTR/CAS

oder Polynomdivision mit $(x - 4)$: $(-x^3 + 2x^2 + 60x - 208) : (x - 4) = -x^2 - 2x + 52$

$-x^2 - 2x + 52 = 0$ für $x_2 = 6{,}28$, $(x_3 = -8{,}28)$

Bei der Produktionsmenge 6,28 ME beträgt der Gewinn auch 110 GE.

c) $G'(x) = -3x^2 + 4x + 60$; $G''(x) = -6x + 4$

$G'(x) = 0$ für $x_1 = 5{,}19$ ($x_2 = -3{,}85$ ökonomisch nicht sinnvoll)

Gewinnmaximum $G_{max} = G(5{,}19) = 127{,}47$

d) gewinnmaximaler Preis: $\frac{E(5{,}19)}{5{,}19} = \frac{353{,}44}{5{,}19} = 68{,}1$

Cournot'scher Punkt $C(5{,}19 \mid 68{,}1)$

Lehrbuch Seite 50

1 $K(x) = \frac{1}{4}x^3 - 6x^2 + 50x + 280$; $k(x) = \frac{1}{4}x^2 - 6x + 50 + \frac{280}{x}$; $k'(x) = \frac{1}{2}x - 6 - \frac{280}{x^2}$

a) $k'(14{,}5) = -0{,}08 < 0$; $k'(14{,}7) = 0{,}06 > 0$

VZW von $k'(x)$ von − nach + , also Tiefpunkt bei $x \approx 14{,}6$

Das Betriebsoptimum liegt bei etwa 14,6.

langfristige Preisuntergrenze $k(14{,}6) = 34{,}87$

b) $k_v(x) = \frac{1}{4}x^2 - 6x + 50$; $k_v'(x) = \frac{1}{2}x - 6$

Betriebsminimum: $k_v'(x) = 0$ $x_{BM} = 12$

kurzfristige Preisuntergrenze: $k_v(12) = 14$

Lehrbuch Seite 69

4 $E(x) = 69{,}5x$

Bedingungen für a, c und d in $K(x) = ax^3 - 30x^2 + cx + d$

$k_v(x) = ax^2 - 30x + c$; $k_v'(x) = 2ax - 30$

$K(0) = 100$:	$d = 100$	
$k_v'(7{,}5) = 0$	$15a - 30 = 0$	$\Rightarrow a = 2$
$k_v(7{,}5) = 37$	$56{,}25a - 225 + c = 37$	

Einsetzen von a = 2 ergibt $56{,}25 \cdot 2 - 225 + c = 37$

$c = 149{,}5$

$K(x) = 2x^3 - 30x^2 + 149{,}5x + 100$

Lehrbuch Seite 77

1 a) $f(x) = (x + 1)e^x$

Mit der Produktregel

$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x + 1) \cdot e^x = (x + 2)e^x$

b) $f(x) = x^2\, e^{-0{,}25x}$

Mit der Produktregel

$f'(x) = 2x \cdot e^{-0{,}25x} + x^2 \cdot (-0{,}25)\, e^{-0{,}25x} = (-0{,}25x^2 + 2x)\, e^{-0{,}25x}$

Lehrbuch Seite 82

3 $f(x) = e^{0{,}5x}(x - 3)$; $f'(x) = e^{0{,}5x}(0{,}5x - 0{,}5)$;

$f''(x) = e^{0{,}5x}(0{,}25x + 0{,}25)$

Wertemenge von f: $T(1 \mid -2e^{0{,}5})$;

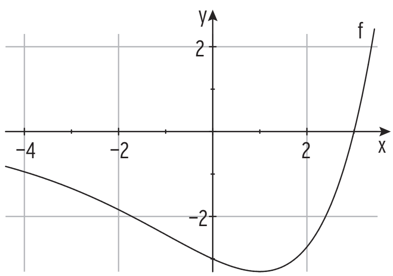
absolutes Minimum: $-2e^{0{,}5}$

$W_f = [-2e^{0{,}5}; \infty)$

$W(-1 \mid -4e^{-0{,}5})$; $f'(-1) = -e^{-0{,}5}$

Gleichung der Wendetangente:

$y = -e^{-0{,}5}(x + 1) - 4e^{-0{,}5} = -e^{-0{,}5}x - 5e^{-0{,}5}$



Lehrbuch Seite 94

4 $f(t) = a\,te^{bt}$

Bedingungen: $f(2) = 33{,}8 \qquad 2ae^{2b} = 33{,}8 \qquad (1)$

$f(4) = 24{,}9 \qquad 4ae^{4b} = 24{,}9 \qquad (2)$

Aus (1): $e^{2b} = \frac{16{,}9}{a}$ $\qquad (e^{4b} = (e^{2b})^2 = (\frac{16{,}9}{a})^2)$

in (2): $4a(\frac{16{,}9}{a})^2 = 24{,}9$

$\frac{1142{,}44}{a} = 24{,}9 \qquad \Rightarrow a = 45{,}88$

Aus $e^{2b} = \frac{16{,}9}{45{,}88} \qquad \Rightarrow b = -0{,}5$

$f(t) = 45{,}88\,te^{-0{,}5t}$; $f'(t) = e^{-0{,}5t}(-22{,}94t + 45{,}88)$

$f'(t) = 0$ für $t = 2$

$f(0) = 0$; $f(t) \to 0$ für $t \to \infty \quad \Rightarrow t = 2$ ist Maximalstelle

Die Behauptung stimmt.

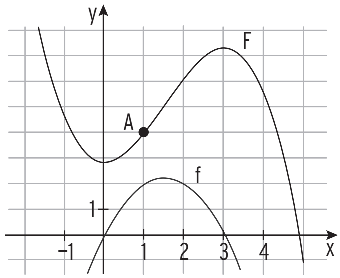
Lehrbuch Seite 103

5 F mit $F(x) = -2x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x + c$

Punktprobe mit $A(-1 \mid 2)$ ergibt $c = \frac{4}{3}$

$F(x) = -2x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x + \frac{4}{3}$

Lehrbuch Seite 107



9 Nullstelle von f mit VZW ist Extremstelle von F

x = 0: Minimalstelle von F

x = 3: Maximalstelle von F

In x = 1,5 hat der Graph von F die größte Steigung 2,25.

In x = 1,5 hat F eine Wendestelle.

Ein Schaubild einer Stammfunktion zeichnen und so nach oben verschieben, dass es durch A(1 | 4) verläuft.

Lehrbuch Seite 115

1 a) $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (2x + 1)dx = [\,x^2 + x\,]_0^2 = 6$

b) $\int_{-1}^3 f(x)dx = \int_{-1}^3 (0{,}5x^3)dx = \left[\frac{1}{8}x^4\right]_{-1}^3 = 10$

c) $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^4 (x^2 - \frac{x}{3})dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^2\right]_0^4 = \frac{56}{3}$

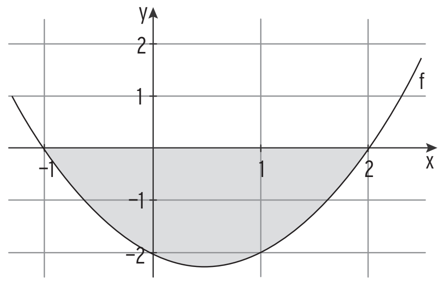
Lehrbuch Seite 124

3 a) Nullstellen: $f(x) = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = -1;\ x = 2$

Skizze:



Stammfunktion:

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$

$\int_{-1}^{2} (x - 2)(x + 1)dx$

$= \int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)dx = -\frac{9}{2};\ \ A = \frac{9}{2}$

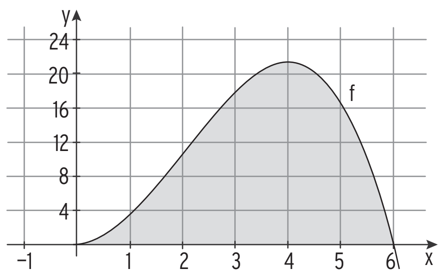
b) Nullstellen: $f(x) = 0$

$-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 = 0$

$x^2(-\frac{2}{3}x + 4) = 0$

$x = 0\ ;\ x = 6$

Skizze:

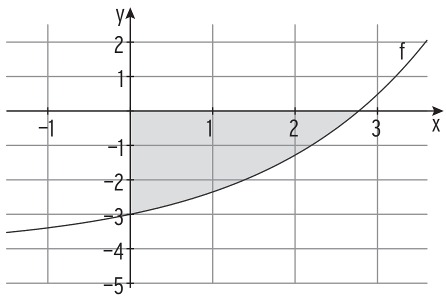


Stammfunktion: $F(x) = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{4}{3}x^3$

$\int_0^6 (-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2)dx = 72$

c) Nullstelle von f: $2\ln(4) \approx 2{,}77$

Skizze:



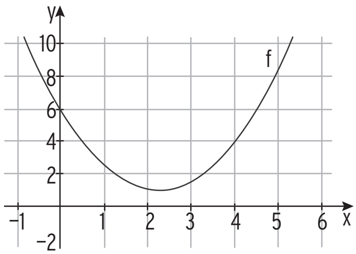
$F(x) = 2e^{0,5x} - 4x$

$\int_0^{2,77} (e^{0,5x} - 4)dx = -5{,}09$

$A \approx 5{,}09$

Lehrbuch Seite 125

11 $f(x) = x^2 - 4{,}5x + 6$



Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + 6x$

$F(6) - F(0) = 27$

$\int_0^6 f(x)\,dx = F(6) - F(0)$

f hat keine Nullstelle auf [0; 6].

$F(6) - F(0)$ ist der Inhalt der Fläche zwischen dem Schaubild von f und der x-Achse auf [0; 6].

Lehrbuch Seite 128

4 a) $f(x) = 0{,}5(x^2 - 1)$; $g(x) = -0{,}5x - 1$ kein Schnittpunkt

$\int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,dx = 4{,}67$; $A = 4{,}67$

b) $f(x) = -x^2 - 2x + 5$; $g(x) = 2$

Schnittstellen: $x = 0$ und $x = 1$

$\int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = \frac{5}{3}$; $A = \frac{5}{3}$

Lehrbuch Seite 130

1 a) $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = -x + 3$

Schnittstelle der Graphen von f und g: $x_1 = 1$

$\int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = -\frac{7}{6}$; $\int_1^2 (f(x) - g(x))\,dx = \frac{11}{6}$

$A = \frac{7}{6} + \frac{11}{6} = 3$

b) $f(x) = x^3 - x$; $g(x) = 3x$

Schnittstelle der Graphen von f und g: $x_1 = 0$; $x_{2|3} = \pm 2$

$\int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx = -4$

Wegen der Symmetrie der beiden Kurven zum Ursprung: $A = 8$

Lehrbuch Seite 196

3 X: Folgekosten in €

E(X) = 20 € · 0,05 + 30 € · 0,02 + 150 € · 0,005 = 2,35

Die Folgekosten betragen 2,35 €.

Hinweis: $E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$

Lehrbuch Seite 202

7 a) X: Durchmesser in mm

$\mu = E(X) = 3{,}18 \cdot 0{,}03 + 3{,}19 \cdot 0{,}21 + 3{,}20 \cdot 0{,}43 + 3{,}21 \cdot 0{,}29 + 3{,}22 \cdot 0{,}04 = 3{,}201$

Der mittlere Durchmesser beträgt 3,201 mm.

Varianz: $\sigma^2 = (3{,}18 - 3{,}201)^2 \cdot 0{,}03 + \ldots + (3{,}22 - 3{,}201)^2 \cdot 0{,}04 = 7{,}69 \cdot 10^{-5}$

Standardabweichung: $\sigma = 8{,}77 \cdot 10^{-3}$ (in mm)

Ausschuss: 0,03 + 0,04 = 0,07 = 7 %

Es entsteht 7 % Ausschuss.

b) Der mittlere Durchmesser ist gleich geblieben, die Standardabeichung hat sich verringert. Die Durchmesser, die im Februar gemessen wurden, streuen weniger um den mittleren Durchmesser 3,201 mm als die Werte, die im Januar gemessen wurden.

Lehrbuch Seite 206

2 X: Anzahl der roten Kugeln

Mit Zurücklegen: $P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 = 0{,}4219$

Bernoulli-Kette: Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer roten Kugel bleibt gleich.

Ohne Zurücklegen: $P(X = 2) = 3 \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} = 0{,}5357$

Keine Bernoulli-Kette: Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer roten Kugel ändert sich.

Lehrbuch Seite 215

8 X: Anzahl der vorzeitig ausgefallenen Batterien

a) $n = 100;\ p = 0{,}2$

$P(A) = P(X < 25) = P(X \leq 24) = \sum_{k=0}^{24} B_{100;\,0{,}2}(k) = F_{100;\,0{,}2}(24) = 0{,}8686$

$n = 50;\ p = 0{,}2$

$P(B) = P(X \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} B_{50;\,0{,}2}(k) = F_{50;\,0{,}2}(10) = 0{,}5836$

$n = 5;\ p = 0{,}05$

$P(C) = P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F_{5;\,0{,}05}(1) = 1 - 0{,}7373 = 0{,}2627$

b) Unter 100 Batterien sollen mindestens eine und höchstens k Batterien ausfallen.

$P(1 \leq X \leq k) = P(X \leq k) - P(X = 0) = P(X \leq k) \geq 0{,}99$

Mithilfe z. B. der Tabelle für die Summenfunktion $F_{100;\,0{,}2}$: $k \geq 30$

Der Anteil muss mindestes 30 % betragen.

c) $n = 100;\ p = 0{,}05$

$P(4 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 3) = 0{,}9369 - 0{,}2578 = 0{,}6791$

Lehrbuch Seite 219

3 a) X: Anzahl der defekten Dichtungen; X ist $B_{500;\,0{,}05}$-verteilt

$E(X) = 25$

b) $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 4{,}87$

$P(20{,}13 \leq X \leq 29{,}87) = P(21 \leq X \leq 29) = 0{,}8235 - 0{,}1789 = 0{,}6446$

c) X ist $B_{50;\,0{,}05}$-verteilt;

$P(A) = P(X = 0) = 0{,}0769$

$P(B) = P(X \leq 3) = 0{,}7604$

$P(C) = P(X > 35) = 1 - P(X \leq 35) = 0$

$P(D) = P(4 \leq X \leq 6) = 0{,}9882 - 0{,}7604 = 0{,}2278$

Lehrbuch Seite 229

4 X: Ausgangsleistung in Watt; $\mu = 200$; $\sigma = 6$

$P(X < 190) = P(X \leq 190) \approx 0{,}04779$

$P(X < 200 + c) \geq 0{,}975$; $P(X \leq 211) \approx 0{,}967 < 0{,}975$; $P(X \leq 212) \approx 0{,}977 > 0{,}975$

$c = 12$

Hinweis: Bestimmung von c durch Ausprobieren mit GTR/CAS.

Lehrbuch Seite 243

3 X: Anzahl der fehlerhaften Metallscheiben. X ist $B_{50;\,0,1}$-verteilt

$P(X \leq 5) \approx 0{,}6161$

Rechtsseitiger Hypothesentest: X ist $B_{100;\,0,1}$-verteilt

$P(X \geq g) \leq 0{,}05 \Leftrightarrow 1 - P(X \leq g - 1) \leq 0{,}05$

$P(X \leq g - 1) \geq 0{,}95$

Mit Hilfsmittel: $g - 1 = 15$, also $g = 16$

Hinweis: $P(X \leq 15) \approx 0{,}961 > 0{,}95$

Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{16; \ldots; 100\}$

$16 \in \overline{A}$; Die Lieferung sollte nicht angenommen werden.

Fehler 2. Art: X ist $B_{100;\frac{1}{6}}$-verteilt

$P(X \leq 15) \approx 0{,}3877$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 38,77 % hält der Einkäufer die Metallscheiben-lieferung fälschlicherweise für akzeptabel.

Lehrbuch Seite 255

1 a)

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & -7 \\ 3 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \cdot(-2) \text{ bzw. } \cdot(-3) \\ + \\ \cdot 2,\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & 5 & 23 \end{array}\right) \quad + \cdot 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 20 & 80 \end{array}\right)$$

Dreiecksform

Letzte Gleichung: $20x_3 = 80$

$x_3 = 4$

Einsetzen von $x_3 = 4$ in die

zweite Gleichung $3x_2 + 5x_3 = 11$: $3x_2 + 5 \cdot 4 = 11$

$x_2 = -3$

Einsetzen von $x_3 = 4$ und $x_2 = -3$ in

die erste Gleichung $2x_1 + x_2 - x_3 = -3$: $2x_1 - 3 - 4 = -3$

$x_1 = 2$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b)

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \cdot(-3),\ + \\ \cdot 2,\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & 4 & 6 & 11 \end{array}\right) \quad +$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

Letzte Gleichung: $-2x_3 = -5 \Rightarrow x_3 = 2{,}5$

Einsetzen von $x_3 = 2{,}5$ ergibt: $-4x_2 - 8 \cdot 2{,}5 = -16 \Rightarrow x_2 = -1$

Einsetzen von $x_3 = 2{,}5$ und $x_2 = -1$: $x_1 - 1 + 2 \cdot 2{,}5 = 5 \Rightarrow x_1 = 1$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 256

7 Es können x_1 ME an W_1, x_2 ME an W_2 und x_3 ME an W_3 hergestellt werden.

	W_1	W_2	W_3
T_1	3	1	2
T_2	0	4	1
T_3	1	0	3

Gleichungen

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 448 \\ 4x_2 + x_3 &= 442 \\ x_1 + 3x_3 &= 330 \end{aligned}$$

LGS in Matrixschreibweise

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 448 \\ 0 & 4 & 1 & 442 \\ 1 & 0 & 3 & 330 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 448 \\ 0 & 4 & 1 & 442 \\ 0 & 1 & -7 & -542 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 448 \\ 0 & 4 & 1 & 442 \\ 0 & 0 & 29 & 2610 \end{array}\right)$$

Ergebnis: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 60 \\ 88 \\ 90 \end{pmatrix}$

Es können 60 ME an W_1, 88 ME an W_2 und 90 ME an W_3 hergestellt werden.

Lehrbuch Seite 263

2 c)

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -0{,}5 \end{array}\right) \quad :2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -0{,}5 \end{array}\right) \quad \cdot(-3) \; +$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -0{,}5 \end{array}\right) \quad + \; \cdot 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar.

Aus der 2. Zeile: $-4x_2 - 8x_3 = 1$

Wir wählen z. B. $x_3 = r$, $r \in \mathbb{R}$ (x_3 ist frei wählbar).

Durch Einsetzen berechnet man x_2 in

Abhängigkeit von r: $-4x_2 - 8r = 1$

$x_2 = -0{,}25 - 2r$

Einsetzen in $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ ergibt: $x_1 + 2 \cdot (-0{,}25 - 2r) + 3r = 0$

$x_1 = 0{,}5 + r$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 + r \\ -0{,}25 - 2r \\ r \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$

Lösungsmenge: $L = \{ \vec{x} \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 + r \\ -0{,}25 - 2r \\ r \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}\}$

Lehrbuch Seite 263

2 d)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 25 \\ 1 & 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 12 \end{array}\right) \end{array} \quad \begin{array}{l} + \\ \cdot(-2) \end{array} \quad \begin{array}{l} + \\ \cdot(-2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 25 \\ 0 & 5 & -15 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} + \\ \cdot(-5) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 25 \\ 0 & 5 & -15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar.

Aus der 2. Zeile: $5x_2 - 15x_3 = 5$

Wir wählen z. B. $x_3 = r$, $r \in \mathbb{R}$ (x_3 ist frei wählbar).

x_2 in Abhängigkeit von r: $5x_2 - 15r = 5$

$x_2 = 1 + 3r$

Einsetzen in $2x_1 + 5x_2 - x_3 = 25$ ergibt: $2x_1 + 5 \cdot (1 + 3r) - r = 25$

$x_1 = 10 - 7r$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 - 7r \\ 1 + 3r \\ r \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

Lösungsmenge: $L = \{ \vec{x} \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 - 7r \\ 1 + 3r \\ r \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}\}$

Lehrbuch Seite 264

9 $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -9 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar.

$x_3 = r$, $r \in \mathbb{R}$ (frei wählbar): $x_2 + 3r = 2$

x_2 in Abhängigkeit von r: $x_2 = 2 - 3r$

x_1 berechnen: $2x_1 - (2 - 3r) + r = -2$

$x_1 = -2r$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2r \\ 2-3r \\ r \end{pmatrix}$

Vergleich der Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2r \\ 2-3r \\ r \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ -22 \\ 8 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen ergibt: $\begin{pmatrix} -2r \\ 2-3r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -22 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} r = 7{,}5 \\ r = 8 \\ r = 8 \end{array}$

Es gibt kein r, so dass alle drei Gleichungen erfüllt sind.

Der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ -22 \\ 8 \end{pmatrix}$ ist kein Lösungsvektor.

Gleichung: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$x_1 = -2r$; $x_2 = 2 - 3r$; $x_3 = r$: $-2r + 2 - 3r + r = 1$

$r = 0{,}25$

Lehrbuch Seite 273

1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

b) $2A - B = 2\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -8 & 4 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & -2 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 5 \\ -4 & 15 & 3 \\ 3 & -3 & 10 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 0 & 6 \\ -3 & -0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -2{,}5 & 0{,}5 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1{,}5 & 0 & 5{,}5 \end{pmatrix}$

d) $3A - 4B = 3\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -12 & 6 \\ -6 & 15 & 9 \\ 0 & -3 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 0 & -20 & 12 \\ -12 & 4 & 16 \end{pmatrix}$

$3A - 4B = \begin{pmatrix} -5 & -8 & 10 \\ -6 & 35 & -3 \\ 12 & -7 & 5 \end{pmatrix}$

e) $\vec{x} - \vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

f) $2\vec{x} + 3\vec{y} = 2\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 279

1 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = (2 \;\; 3 \;\; -4)$

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 & 5 \\ 15 & -6 & -28 \\ -17 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ Berechnung im Schema

b) $B \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}$

c) $B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -2 & 10 \\ 5 & -14 & -2 \\ -6 & 18 & 21 \end{pmatrix}$ Berechnung im Schema

d) $(A + E) \cdot B = \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & -5 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$(A + E) \cdot B = \begin{pmatrix} -6 & -12 & 6 \\ 18 & -6 & -29 \\ -19 & 4 & 15 \end{pmatrix}$

e) $\frac{1}{20} \cdot A \cdot \vec{a} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 0 \\ -0{,}45 \end{pmatrix}$

f) $\vec{b} \cdot A = (2 \;\; 3 \;\; -4) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} = (1 \;\; 20 \;\; -19)$

g) $\vec{b} \cdot B \cdot A = (2 \;\; 3 \;\; -4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} = (19 \;\; -16 \;\; -21) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$\vec{b} \cdot B \cdot A = (54 \;\; 16 \;\; 59)$

h) $\vec{b} \cdot \vec{a} = (2 \;\; 3 \;\; -4) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Lehrbuch Seite 280

15 a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 210 & 120 \\ 180 & 220 \\ 320 & 300 \end{pmatrix}$

Maschinenlaufzeiten der Automaten je Arbeitsperiode:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1600 & 1500 \\ 1640 & 1640 \\ 1390 & 1380 \end{pmatrix}$

Automat I braucht für die Produktion von 210 E_1, 180 E_2 und 320 E_3

in Periode I:

$210 \cdot 2 + 180 \cdot 3 + 320 \cdot 2 = 1600$ (Minuten)

In Periode I läuft Automat I 1600 Minuten, Automat II 1640 Minuten und

Automat III 1390 Minuten.

In Periode II läuft Automat I 1500 Minuten, Automat II 1640 Minuten und

Automat III 1380 Minuten.

b) Maschinenlaufzeit in Periode I: 4630 Minuten.

Maschinenlaufzeit in Periode II: 4520 Minuten.

Auslastung in Periode I: $\frac{4630}{7200} \cdot 100\% = 64{,}3\%$

Auslastung in Periode II: $\frac{4520}{6000} \cdot 100\% = 75{,}3\%$

Lehrbuch Seite 285

1 a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Berechnung der Inversen

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \cdot 2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \cdot (-7)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad |:2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Berechnung der Inversen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \cdot (-2) \quad \cdot 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \cdot (-4) \quad \cdot 4 \quad \cdot (-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 8 & 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 24 & 0 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \cdot 3 \quad \cdot (-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 24 & 0 & 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & 24 & 0 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad |\cdot 6$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 24 & 0 & 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & 24 & 0 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 24 & -6 & 6 & 12 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 8 & 0 & -8 \\ 7 & -3 & 2 \\ -6 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Lehrbuch Seite 289

1 a) $X \cdot B = C$ | $\cdot B^{-1}$ von rechts

$X \cdot B \cdot B^{-1} = C \cdot B^{-1}$

$X \cdot E = C \cdot B^{-1}$

$X = C \cdot B^{-1}$

b) $A \cdot X + B = C$ | $- B$

$A \cdot X = C - B$ | $\cdot A^{-1}$ von links

$X = A^{-1} \cdot (C - B)$

c) $A \cdot X - A = X$ | $+ A$

$A \cdot X = X + A$ | $- X$

$A \cdot X - X = A$

$(A - E) \cdot X = A$ | $\cdot (A - E)^{-1}$ von links

$X = (A - E)^{-1} \cdot A$

d) $X \cdot A = E + A$ | $\cdot A^{-1}$ von rechts

$X = (E + A) \cdot A^{-1}$

$X = A^{-1} + E$

e) $A \cdot (E + X) = 4X$

$A + A \cdot X = 4X$ | $- AX$

$A = 4X - A \cdot X$

$A = (4E - A) \cdot X$ | $\cdot (4E - A)^{-1}$ von links

$X = (4E - A)^{-1} \cdot A$

f) $A + B \cdot X = A \cdot X - B$ | $- AX$

$A + B \cdot X - A \cdot X = - B$ | $- A$

$B \cdot X - A \cdot X = - B - A$

$(B - A) \cdot X = - (B + A)$ | $\cdot (B - A)^{-1}$ von links

$X = - (B - A)^{-1} \cdot (B + A)$

oder: $A \cdot X - B \cdot X = B + A$

$(A - B)X = A + B$

$X = (A - B)^{-1} (A + B)$

Lehrbuch Seite 289

9 Matrizengleichung $M \cdot X = N + X$

$M \cdot X - X = N$

Ausklammern von X: $(M - E) \cdot X = N$

$X = (M - E)^{-1} \cdot N$

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$M - E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

$(M - E)^{-1}$:

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\cdot(-5)$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \end{array}\right)$ $\cdot 3$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \end{array}\right)$ $| : (-1)$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{array}\right)$

$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 300

2 A: Rohstoff-Steckteile-Matrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

B: Steckteile-Endprodukt-Matrix: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

C: Rohstoff-Endprodukt-Matrix:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 & 16 \\ 7 & 9 & 13 & 22 \\ 3 & 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Lehrbuch Seite 306

3 a) Für die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C gilt: $A \cdot B = C$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 11 & 33 \\ 8 & 22 \end{pmatrix}$$

Tabelle:

	M_1	M_2
R_1	7	15
R_2	11	33
R_3	8	22

b) Aus $B \cdot \vec{x} = \vec{z}$ folgt $B \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 1700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10500 \\ 7100 \\ 7400 \end{pmatrix}$

Es müssen 10500 ME S_1, 7100 ME S_2 und 7400 ME S_3 vorrätig sein.

c) Aus $A \cdot \vec{z} = \vec{r}$ folgt: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 660 \\ 1140 \\ r_3 \end{pmatrix}$

Ausmultiplizieren ergibt ein lineares Gleichungssystem:

$s_1 + 2s_2 + 2s_1 = 660$

$4s_1 + 3s_2 + 2s_1 = 1140$

$s_1 + 5s_2 + s_1 = r_3$

Vereinfacht:

$3s_1 + 2s_2 = 660$ I)

$6s_1 + 3s_2 = 1140$ II)

$2s_1 + 5s_2 - r_3 = 0$ III)

Auflösung I) | ·2 − II) ergibt: $s_2 = 180$

Einsetzen z. B. in Gleichung I) ergibt $s_1 = 100$.

Einsetzen z. B. in Gleichung III) ergibt $r_3 = 1100$.

Das LGS ist eindeutig lösbar mit $s_1 = 100$; $s_2 = 180$; $r_3 = 1100$

Es müssen 100 ME S_1, 180 ME S_2 und 100 ME S_3 vorrätig sein.

Vom Rohstoff R_3 müssen 1100 ME bestellt werden.

Lehrbuch Seite 317

2 $A = A_{RB}$; $B = B_{BE}$; $C = C_{RE}$

a) $A \cdot B = C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

b) LGS: $B \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 42 \\ 51 \end{pmatrix}$ Auflösung ergibt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}$

c) $C \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ t \\ t \end{pmatrix}$, dabei ist t jeweils der Rohstoffvorrat von R_2 und von R_3

$(C \mid \vec{r}\,) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 100 \\ 9 & 3 & t \\ 5 & 5 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 100 \\ 0 & 15 & 900 - 4t \\ 0 & -5 & 500 - 4t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 100 \\ 0 & 15 & 900 - 4t \\ 0 & 0 & 2400 - 16t \end{array}\right)$

Das LGS ist lösbar für $2400 - 16t = 0 \Leftrightarrow t = 150$.

Von R_2 und R_3 benötigt man 150 ME.

Lösung des LGS: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$

Dann müssen 20 ME E_2 und 10 ME E_1 produziert werden.

Alternative: LGS für die Unbekannten x_1, x_2 und y:

$4x_1 + 3x_2 = 100 \wedge 9x_1 + 3x_2 - y = 0 \wedge 5x_1 + 5x_2 - y = 0$

Lösung ergibt: $x_1 = 10$; $x_2 = 20$; $y = 150$

d) Variable Kosten: $K_v = (\vec{k}_R \cdot C + \vec{k}_B \cdot B + \vec{k}_E) \cdot \vec{x}$

$$= (13{,}7 \quad 10{,}9) \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix} = 1230$$

Durchschnittliche variable Kosten in GE/ME: $\frac{1230}{100} = 12{,}30$

Lehrbuch Seite 333

2 a) Input-Output-Tabelle

	W_1	W_2	W_3	Konsum	Produktion
W_1	0	200	150	850	1200
W_2	480	0	300	220	1000
W_3	300	250	0	950	1500

b) Produktionsvektor $\vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{y} = (E - A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 850 \\ 330 \\ 950 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1230 \\ 1130 \\ 1540 \end{pmatrix}$

Produktionssteigerung bei W_1 von 1200 auf 1230, also um 2,5 %.

Produktionssteigerung bei W_2 von 1000 auf 1130, also um 13 %.

Produktionssteigerung bei W_3 von 1500 auf 1540, also um etwa 2,67 %.

Lehrbuch Seite 337

1 a) $x_1 = 120;\ x_{23} = 60;\ x_{33} = 0;$ $\quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{7} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{7} & 0 \end{pmatrix}$

b) Input-Output-Tabelle

	A_1	A_2	A_3	Konsum	Produktion
A_1	15	38	30	67	150
A_2	45	19	60	9	133
A_3	15	57	0	18	90

c) $(E - A) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 1{,}5x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ 3y_1 \\ 38 \end{pmatrix}$

LGS für x_1, x_3 und y_1:
$$\frac{33}{70}x_1 - \frac{1}{3}x_3 - y_1 = 0$$
$$\frac{69}{70}x_1 - \frac{2}{3}x_3 - 3y_1 = 0$$
$$-\frac{26}{35}x_1 + x_3 = 38$$

hat die Lösung $x_1 = 70,\ x_3 = 90,\ y_1 = 3.$

Produktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 70 \\ 105 \\ 90 \end{pmatrix}$ und Konsumvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 38 \end{pmatrix}$

d) $(E - A) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 263 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ 65 - y_2 \end{pmatrix}$

LGS für x_1, x_3 und y_1:
$$\frac{9}{10}x_1 + \frac{1}{21}x_2 = \frac{263}{3}$$
$$-\frac{3}{10}x_1 + \frac{32}{21}x_2 - y_2 = \frac{526}{3}$$
$$-\frac{1}{10}x_1 - \frac{10}{7}x_2 + y_2 = -198$$

hat die Lösung $x_1 = 90,\ x_2 = 140,\ y_2 = 54.$

Produktionsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 90 \\ 140 \\ 123 \end{pmatrix}$; Konsumvektor: $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 54 \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 349

2 In einem Zeitabschnitt von einem Jahr finden folgende Übergänge statt:

80 % der Strände mit einem Stern bleiben bei einem Stern, 20 % erhalten zwei Sterne.

70 % der Strände mit zwei Sternen bleiben bei zwei Sternen, 5 % erhalten nur noch einen Stern und 25 % erhalten drei Sterne.

80 % der Strände mit drei Sternen bleiben bei drei Sternen, 20 % erhalten nur noch zwei Sterne.

Es gibt keinen Strand mit drei Sternen, der nur noch einen Stern erhält.

Lehrbuch Seite 350

3 $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

Startvektor: $\vec{x} = (\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{6})$ oder auch $\vec{x} = (0{,}333\ \ 0{,}500\ \ 0{,}167)$

Stimmverteilung: $\vec{x} \cdot A = (0{,}333\ \ 0{,}450\ \ 0{,}217)$

Erwartete Stimmverteilung nach der nächsten Wahl :

33,3 % P1, 45 % P2 und 21,7 % P3

Lehrbuch Seite 356

3 a) Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$

b) Anfangsverteilung $\vec{x}_0 = (500 \;\; 250 \;\; 250)$

Bedingung für die Verteilung der Vorwoche: $\vec{x}_{-1} \cdot A = \vec{x}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x}_{-1} = (1000 \;\; 0 \;\; 0)$

Verteilung der 1. Folgewoche: $\vec{x}_0 \cdot A = \vec{x}_1 \quad \vec{x}_1 = (362,5 \;\; 250 \;\; 387,5)$

In der Folgewoche hat die Waschanlage W1 voraussichtlich etwa 363 Kunden,

W2 250 Kunden und W3 etwa 387 Kunden.
(Gesamtzahl: 1000 Kunden)

c) Stabile Verteilung $\vec{x} \cdot A = \vec{x}$

ergibt $\vec{x} = (0,296 \;\; 0,148 \;\; 0,556)$

und damit die Grenzmatrix $G = \begin{pmatrix} 0,296 & 0,148 & 0,556 \\ 0,296 & 0,148 & 0,556 \\ 0,296 & 0,148 & 0,556 \end{pmatrix}$

Langfristige Verteilung $(500 \;\; 250 \;\; 250) \cdot G = (296 \;\; 148 \;\; 556)$

oder $(1000 \;\; 0 \;\; 0) \cdot G = (296 \;\; 148 \;\; 556)$

Langfristig waschen etwa 296 Autofahrer ihr Fahrzeug in der Anlage W1,

148 in W2 und 556 in W3.

Dies ist unabhängig von der Anfangsverteilung.

Lehrbuch Seite 374

3 Es werden x freistehende Einfamilienhäuser und y Reihenhäuser gebaut.

Nichtnegativitätsbedingungen: $x \geq 0$; $y \geq 0$

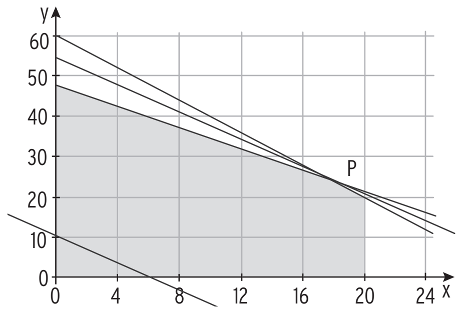
Restriktionen:

$500x + 250y \leq 15000 \Leftrightarrow y \leq 60 - 2x$

$x \leq 20$

$240000x + 180000y \leq 8640000$

$\Leftrightarrow y \leq 48 - \frac{4}{3}x$



a) Zielfunktion: $Z = 50000x + 30000y \Leftrightarrow y = -\frac{5}{3}x + \frac{Z}{30000}$

Der Gewinn Z wird maximal für x = 18 und y = 24 (vgl. P).

Größter Gewinn: $Z = 50000 \cdot 18 + 30000 \cdot 24 = 1620000$

b) Zielfunktion:

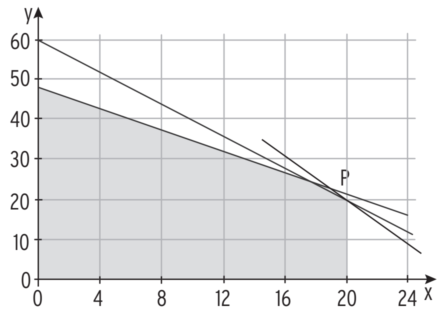
$Z = 50000x + 20000y$

$\Leftrightarrow y = -2{,}5x + \frac{Z}{20000}$

Der Gewinn Z wird maximal für x = 20 und y = 20.

Größter Gewinn:

$Z = 50000 \cdot 20 + 20000 \cdot 20 = 1400000$



Lehrbuch Seite 390

3 Es werden x ME von Produkt I und y ME von Produkt II hergestellt.

Schlupfvariable: u, v, w

Nichtnegativität: $x, y, u, v, w \geq 0$

Gleichungssystem: $2x + 10y + u = 70$

$6x + 6y + v = 66$

$10x + 5y + w = 90$

Zielfunktion: $Z = 15x + 10y$

Z soll maximiert werden,

d.h. der Gewinn soll maximiert werden.

x	y	u	v	w	b	EB
2	10	1	0	0	70	70 : 2 = 35
6	6	0	1	0	66	66 : 6 = 11
10	5	0	0	1	90	90 : 10 = 9
15	10	0	0	0	Z	
0	−45	−5	0	1	−260	5,7...
0	**–15**	0	−5	3	−60	4
10	5	0	0	1	90	18
0	5	0	0	−3	2Z − 270	
0	0	−5	15	-8	−80	
0	−15	0	−5	3	−60	
30	0	0	−5	6	210	
0	0	0	−5	−6	6Z − 870	

Ergebnis: $v = w = 0$; $u = 16$

$30x = 210 \Leftrightarrow x = 7$

$-15y = -60 \Leftrightarrow y = 4$

$6Z - 870 = 0 \Leftrightarrow Z = 145$

Es werden 7 ME von Produkt I und 4 ME von Produkt II hergestellt.

Der maximale Gewinn beträgt dann 145 GE.

Lehrbuch Seite 391

5 x_1: Mischung M_1 in ME; x_2: Mischung M_2 in ME; x_3: Mischung M_3 in ME

Zielfunktion $Z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$; Z wird maximiert

Nichtnegativität: $x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Nebenbedingungen:
$$3x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 3150$$
$$4x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 2710$$
$$6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 3000$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 2275$$

Ausgangstableau

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	b
3	**6**	1	1	0	0	0	3150
4	4	2	0	1	0	0	2710
6	3	4	0	0	1	0	3000
2	3	4	0	0	0	1	2275
3	5	4	0	0	0	0	Z

1. Tableau

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	b
3	6	1	1	0	0	0	3150
6	0	4	− 2	3	0	0	1830
9	0	7	− 1	0	2	0	2850
1	0	7	− 1	0	0	2	1400
3	0	19	− 5	0	0	0	6Z − 15750

Zwischenlösung:

$x_1 = 0$; $x_2 = 525$; $x_3 = 0$; $s_1 = 0$

$6Z - 15750 = 0 \Leftrightarrow Z = 2625$

Interpretation:

Durch Aufnahme der Mischung M_2 in den Verkauf kann der Erlös auf 2626 GE erhöht werden. Da in der Zielfunktionszeile weitere positive Werte vorhanden sind, ist der Erlös noch zu steigern.

Aufnahme von M_3, da $\frac{19}{6}$ den höchsten Zielfunktionsbeitrag liefert.

Der Engpass ist durch Zeile 4 bestimmt: $x_3 = 700 : \frac{7}{2} = 200$