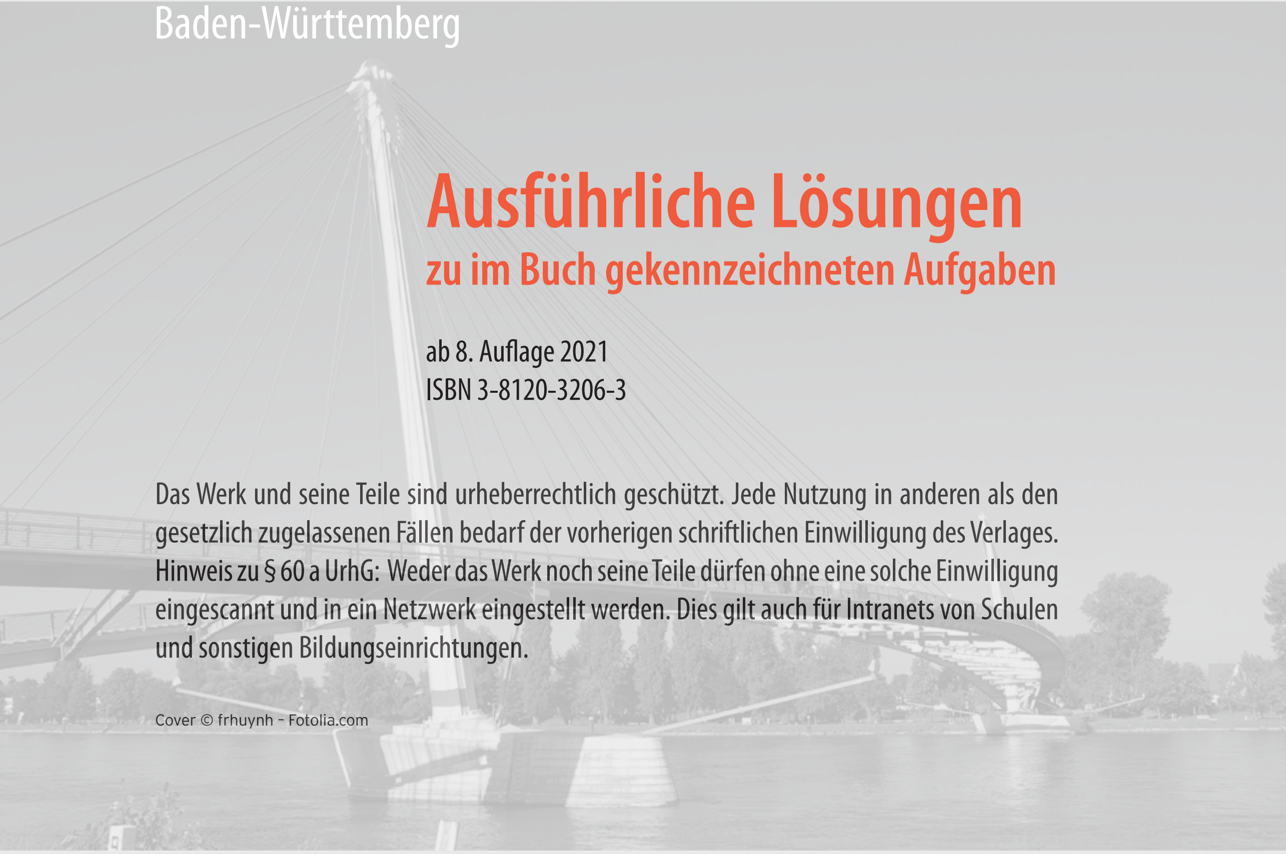
Bohner | Ott | Deusch | Rosner

Mathematisches Grundgerüst

Ein Mathematikbuch für die Eingangsklasse

Berufliches Gymnasium

Baden-Württemberg



Ausführliche Lösungen

zu im Buch gekennzeichneten Aufgaben

ab 8. Auflage 2021
ISBN 3-8120-3206-3

Cover © frhuynh - Fotolia.com

Geogebra interaktiv

Lern- und Erklärvideos

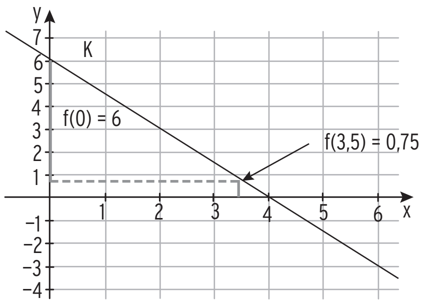
Merkur Verlag Rinteln

Lehrbuch Seite 24

4 $f(x) = 6 - 1{,}5x$

a) Siehe Zeichnung

b) Siehe Zeichnung



c) Ablesen ergibt: $f(x) = 0$ für $x = 4$
Die Gerade schneidet die x-Achse in $x = 4$.

d) Bedingung: $f(x) = 2$ $\quad 6 - 1{,}5x = 2$

$\frac{3}{2}x = 4$

$x = \frac{8}{3}$

Punkt auf dem Schaubild von f: $P(\frac{8}{3} \mid 2)$

Lehrbuch Seite 27

7 Ansatz: $G(x) = mx + b$; x in ME und G(x) in GE

Gewinnzunahme pro ME: $m = 275\ (\frac{GE}{ME})$

Der Gewinn von 350 GE bei einer Produktion von 2 ME entspricht dem Kurvenpunkt $P(2 \mid 350)$.

Gewinnfunktion: $G(x) = 275x + b$

Punktprobe mit $P(2 \mid 350)$: $350 = 275 \cdot 2 + b$

$b = -200$

Gewinnfunktion G mit $G(x) = 275x - 200$

Ansatz: $G(x) = 1075$ $\quad 275x - 200 = 1075$

Produktionsmenge: $x = 4{,}64$

Bei einer Produktionsmenge von 4,64 ME ist der Gewinn 1075 GE.

Lehrbuch Seite 29

7 Aus derTabelle lässt sich ablesen: Vergrößert sich x um 1, so vergrößert sich y um 2, d.h. die Steigung der Geraden beträgt m = 2

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -1$

$S_y(0 \mid -1)$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $N(0{,}5 \mid 0)$

Nullstelle liegt rechts von x = 0: y um 1 vergrößern bedeutet x um 0,5 vergrößern;

also Nullstelle x = 0,5 und damit $N(0{,}5 \mid 0)$.

Funktionsterm:

m = 2 und b = − 1 ergibt: $f(x) = 2x - 1$

Variante: Bestimmung der Schnittpunkte aus dem Funktionsterm

Schnittpunkte: $f(x) = 0$

$N(0{,}5 \mid 0)$

$f(0) = -1$

$S_y(0 \mid -1)$

Lehrbuch Seite 33

4 a) G und K sind parallel, d. h., sie haben die gleiche Steigung: $m_G = m_K = 4$

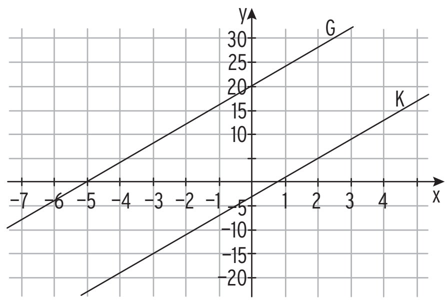
Ansatz für G: $g(x) = 4x + b$

G schneidet die x-Achse in $x = -5$: $g(-5) = 0$

$4 \cdot (-5) + b = 0$

$b = 20$

Gleichung von G: $g(x) = 4x + 20$



b) H verläuft durch P(1 | 1) und schneidet die x-Achse in $x = -3$:

Ansatz: $y = mx + b$

Punktprobe mit P(1 | 1): $m + b = 1$

Punktprobe mit N(− 3 | 0): $-3m + b = 0$ $\cdot (-1)$

$4m = 1$

$m = 0{,}25$

Einsetzen ergibt b: $0{,}25 + b = 1$

$b = 0{,}75$

Gleichung von H: $h(x) = 0{,}25x + 0{,}75$

Variante:

Bestimmung der Steigung aus

P(1 | 1) und N(− 3 | 0): $m = \frac{1-0}{1-(-3)} = \frac{1}{4}$

Punktprobe mit P(1 | 1) in $y = \frac{1}{4}x + b$: $1 = \frac{1}{4} \cdot 1 + b$

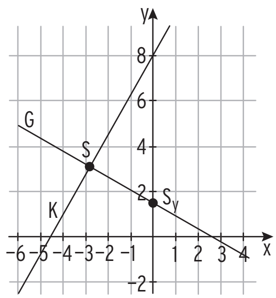
$b = \frac{3}{4}$

Gleichung von H: $h(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

Lehrbuch Seite 34

14 K: $f(x) = 1{,}75x + 8 = \frac{7}{4}x + 8$

a) Schaubild K von f



b) G schneidet die y-Achse in $S_y(0 \mid 1{,}5)$

G schneidet die Gerade K

senkrecht: $m_G = -\frac{4}{7}$

$k(x) = -\frac{4}{7}x + \frac{3}{2}$

Gleichsetzen: $\frac{7}{4}x + 8 = -\frac{4}{7}x + \frac{3}{2} \mid \cdot 28$

$49x + 224 = -16x + 42$

$65x = -182$

$x = -\frac{14}{5}$

Einsetzen ergibt: $y = f(-\frac{14}{5}) = \frac{7}{4} \cdot (-\frac{14}{5}) + 8 = \frac{31}{10}$

G schneidet K in $S(-\frac{14}{5} \mid \frac{31}{10}) = S(-2{,}8 \mid 3{,}1)$

Lehrbuch Seite 40

9 a) x: verfügbares Einkommen; Konsumfunktion K; Konsumausgaben K(x)

Zwei Punkte: P(1000 | 900); Q(1800 | 1460)

Punktprobe in y = mx + b ergibt ein LGS:

P(1000 | 900): $1000m + b = 900 \quad \cdot(-1)$

Q(1800 | 1460): $1800m + b = 1460$

Addition: $800m = 560$

$m = 0{,}7$

Einsetzen ergibt: $1000 \cdot 0{,}7 + b = 900$

$b = 200$

Konsumfunktion K: $K(x) = 0{,}7x + 200$

m = 0,7 bedeutet: 70 % des Zuwachses wird ausgegeben für den Konsum.

Von jedem zusätzlich verdienten € werden 0,7 € für den Konsum ausgegeben.

b) Konsumausgaben:

K(800) = 760; K(2500) = 1950; K(4000) = 3000

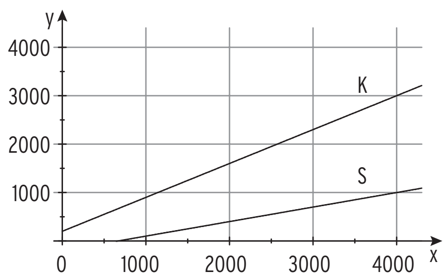
c) Konsumquote bei dem Einkommen x

x = 800: $\frac{760}{800} = 95\ \%$

x = 2500: $\frac{1950}{2500} = 78\ \%$

x = 4000: $\frac{3000}{4000} = 75\ \%$

Je höher das Einkommen, desto mehr nähert sich die Konsumquote 70 % an.



d) Sparleistung S in Abhängigkeit vom Einkommen x

Sparleistung S = Einkommen x minus zugehöriger Konsum K(x)

Funktionsterm: $S(x) = x - K(x) = 0{,}3x - 200$

Nullstelle von S: $S(x) = 0$

$0{,}3x - 200 = 0$

$x = 666{,}6$

D. h., erst ab einem Betrag (Einkommen) von mehr als 666 € kann ein Individuum etwas sparen (Existenzminimum).

Lehrbuch Seite 53

1 a) Spiegelung an der x-Achse: $g(x) = -f(x) = -\frac{1}{x}$

b) Verschiebung um 7 nach rechts: $g(x) = f(x-7) = \frac{1}{x-7}$

c) Verschiebung um 5 nach links: $h(x) = f(x+5) = \frac{1}{x+5}$

Verschiebung um 2 nach oben: $g(x) = h(x) + 2 = \frac{1}{x+5} + 2$

Funktionsterm: $g(x) = \frac{1}{x+5} + 2$

d) Streckung in y-Richtung mit Faktor 5: $h(x) = 5 \cdot \frac{1}{x}$

Verschiebung um 1 nach links: $g(x) = 5 \cdot \frac{1}{x+1}$

Die Reihenfolge spielt keine Rolle, da Streckung und Verschiebung in verschiedene Richtungen wirken.

Lehrbuch Seite 60

1 a) Schnittstellen von Parabel und x-Achse: $-2{,}5x^2 + 9{,}025 = 0$

$x_{1|2} = \pm 1{,}9$

Die Dicke des Diskus beträgt 3,8 cm.

Scheitelpunkt der Parabel: $S(0 \mid 9{,}025)$

Durchmesser: $d = 2 \cdot 9{,}025 = 18{,}05$

Der Durchmesser beträgt 18,05 cm.

b) Schnittstellen von Gerade und Parabel: $-2{,}5x^2 + 9{,}025 = \frac{65}{8}$

Vereinfachung: $-2{,}5x^2 = -0{,}9$

$x^2 = 0{,}36$

Schnittstellen von Gerade und Parabel: $x_{1|2} = \pm 0{,}6$

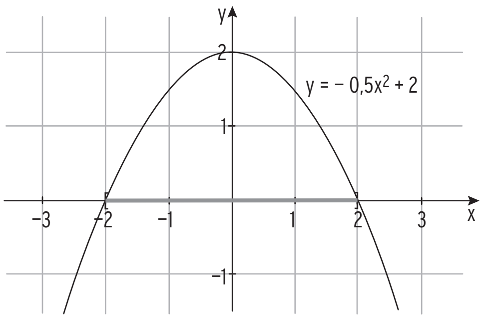
Dicke des Diskus: $2 \cdot 0{,}6 = 1{,}2$

Die Dicke des Diskus an der Stoffgrenze beträgt 1,2 cm.

Lehrbuch Seite 84

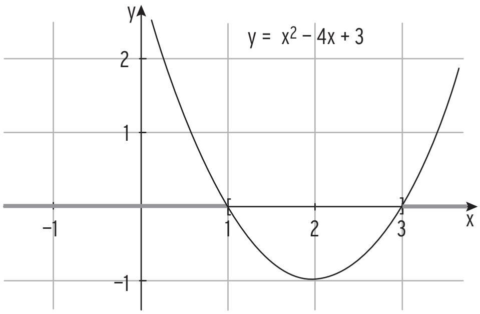
8 a) $-0{,}5x^2 + 2 \geq 0$

Lösung: $-2 \leq x \leq 2$



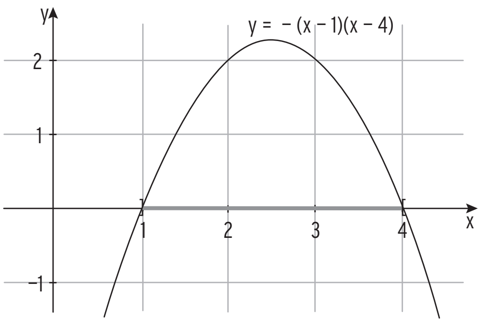
b) $x^2 - 4x + 3 > 0$

Lösung: $x < 1$ oder $x > 3$



c) $-(x-1)(x-4) > 0$

Lösung: $1 < x < 4$



Lehrbuch Seite 89

6 $f(-2) = 0$; Der Graph von f schneidet die x-Achse bei $x_1 = -2$.

$f(0) = -2$; $f(1) = 1{,}5$ VZW von f(x) für $0 < x < 1$

Wertetabelle:

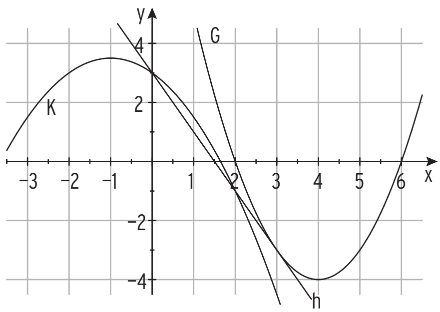
X	Y1
0	-2
0.1	-1.699
0.2	-1.399
0.3	-1.095
0.4	-0.787
0.5	-0.468
0.6	-0.135
0.7	0.22
0.8	0.6048
0.9	1.028

X	Y1
0.6	-0.135
0.65	0.0392
0.7	0.22

Weitere Nullstelle auf 1 Dezimale gerundet

$x = 0{,}6$ ($x = 0{,}6388...$ mit Hilfsmittel)

Lehrbuch Seite 97



3 K: $f(x) = -0{,}5x^2 - x + 3$

G: $g(x) = x^2 - 8x + 12$

K nach unten geöffnet, durch $S_y(0 \mid 3)$

$(0 \mid 3)$ legt die Achseneinteilung

auf der y-Achse fest.

G nach oben geöffnet; G hat Normalparabelform

G schneidet die x-Achse in $N(2 \mid 0)$.

$(2 \mid 0)$ legt die Achseneinteilung auf der x-Achse fest.

Gerade h verläuft durch $(0 \mid 3)$ und $(2 \mid -1)$ (ist gleichzeitig Schnittpunkt mit K).

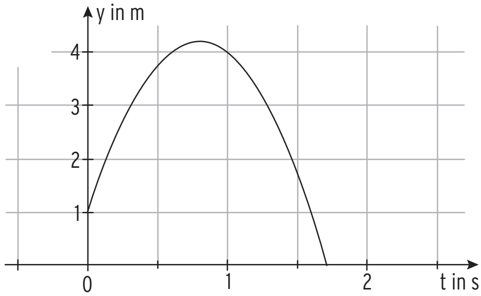
h hat also die Steigung $m = -2$ und damit die Gleichung $y = -2x + 3$

Schnittpunkte mit K durch Gleichsetzen:	$-0{,}5x^2 - x + 3 = -2x + 3$
Nullform:	$-0{,}5x^2 + x = 0$
Ausklammern:	$x(-0{,}5x + 1) = 0$
zwei einfache Lösungen:	$x_1 = 0$; $x_2 = 2$
h schneidet K in 0 und 2.	
Schnittpunkte mit G durch Gleichsetzen:	$x^2 - 8x + 12 = -2x + 3$
Nullform:	$x^2 - 6x + 9 = 0$
Binomische Formel:	$(x - 3)^2 = 0$
doppelte Lösung = Berührstelle	$x_{1\mid 2} = 3$

h berührt G in $B(3 \mid -3)$.

Lehrbuch Seite 99

19 Höhe des Balles in Abhängigkeit von der Zeit



a) $h(0) = 1$ Aus 1 m Höhe wirft sie den Ball hoch.

Ansatz: $h(t) = 1$ $\quad -5t^2 + 8t + 1 = 1$

$t(-5t + 8) = 0$

Lösung: $t_1 = 0$ (Abwurf); $t_2 = 1{,}6$

Nach 1,6 s fängt sie den Ball wieder auf.

b) Ansatz: $h(t) = 0$ $\quad -5t^2 + 8t + 1 = 0$

Mit Formel: $t_1 = 1{,}72$; $t_2 = -0{,}12$

Lösung: $t_1 = 1{,}72$

Der Ball trifft nach etwa 1,7s auf den Boden.

c) Ansatz: $h(t) > 2$

Lösung von $h(t) = 2$: $-5t^2 + 8t + 1 = 2$

$-5t^2 + 8t - 1 = 0$

Mit Formel: $t_1 = 0{,}14$; $t_2 = 1{,}46$

$\triangle t = t_2 - t_1 = 1{,}46 - 0{,}14 = 1{,}32$

Der Ball ist ca. 1,32 s mehr als 2 m über dem Boden.

Lehrbuch Seite 99

20 Bogen: $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 14x^2 + 53x - 40)$

Probe: $f(1) = 0$; $f(5) = 0$

d.h. das Koordinatensystem kann wie abgebildet gezeichnet werden.

Mit $f(3) = 5$ ergibt sich $P(3 \mid 5)$

Gerade durch $D(0 \mid 8)$ und P

Die Gerade hat die Steigung

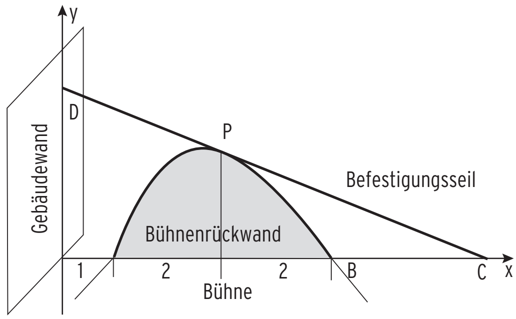
$m = -1$; also $y = -x + 8$

Die Gerade schneidet die x-Achse

in 8: $0 = -x + 8$

Befestigungspunkt $C(8 \mid 0)$

Abstand von B: 3 m



Gleichsetzen (Schnittstellen von Bogen und Befestigungsseil):

$$\frac{1}{4}(x^3 - 14x^2 + 53x - 40) = -x + 8$$

ergibt $\quad x^3 - 14x^2 + 53x - 40 = -4x + 32$

Nullform: $\quad x^3 - 14x^2 + 57x - 72 = 0$

$$(x - 8)(x - 3)^2 = (x - 8)(x^2 - 6x + 9)$$

$$= x^3 - 14x^2 + 57x - 72$$

Interpretation:

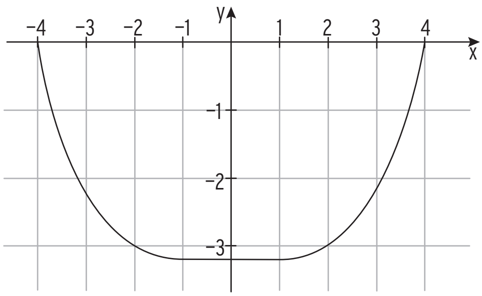
Eine doppelte Lösung in $x = 3$ bedeutet:

Die Gerade durch P und D berührt den Kurvenbogen in P.

Hinweis: Einfache Lösung in $x = 8$ bedeutet: Die Gerade durch P und D schneidet das Schaubild von f in $x = 8$.
Dieser Schnittpunkt fällt mit C zusammen.

Lehrbuch Seite 105

18 Skizze:



Ansatz wegen Symmetrie: $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$

$f(0) = -3{,}2$ $\quad e = -3{,}2$

Vereinfachter Ansatz: $f(x) = ax^4 + cx^2 - 3{,}2$

$f(1) = -3{,}1875$ $\quad a + c - 3{,}2 = -3{,}1875$

$f(2) = -3$ $\quad 16a + 4c - 3{,}2 = -3$

vereinfachtes LGS: $a + c = 0{,}0125 \quad | \cdot (-4)$

$16a + 4c = 0{,}2$

Lösung durch Additionsverfahren: $12a = 0{,}15$

$a = 0{,}0125$

Einsetzen in $a + c = 0{,}0125$: $0{,}0125 + c = 0{,}0125$

$c = 0$

Funktionsterm der Randkurve: $f(x) = 0{,}0125x^4 - 3{,}2$

Breite des Kanals: $f(x) = 0$ $\quad 0{,}0125x^4 - 3{,}2 = 0$

$x^4 = 256$

$x_{1|2} = \pm 4$

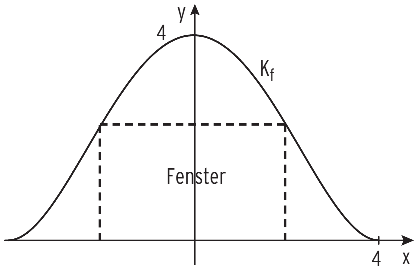
Der Kanal ist 8 m breit.

Lehrbuch Seite 113

3 Reale Situation: Giebel eines Barock-Hauses mit Maßen in m.

Reales Modell: Der Rand soll durch eine Polynomfunktion beschrieben werden.

Mathematisches Modell:



f(x): Giebelhöhe (Fensterhöhe)

Annahme: Der Graph berührt die x-Achse in x = 4 und x = − 4. Zwei Berührpunkte mit der x-Achse erfordern den Graph einer Polynomfunktion 4. Grades.

Für $-4 \le x \le 4$ ergibt sich: Ansatz in Produktform $f(x) = a(x+4)^2(x-4)^2$

Punktprobe mit S(0 | 4) ergibt $a = \frac{1}{64}$

Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{64}(x+4)^2(x-4)^2 = \frac{1}{64}(x^2-16)^2 = \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4$

Mathematische Lösung:

f(x) beschreibt die Giebelhöhe bzw. die Fensterhöhe in Abhängigkeit von x.

Für $x > 0$ entspricht x der halben Fensterbreite.

Giebelhöhe = Fensterhöhe (2,25)

Ansatz: f(x) = 2,25 $\qquad \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4 = 2{,}25$

Nullform: $\qquad \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{4} = 0 \quad | \cdot 64$

Vereinfachung: $\qquad x^4 - 32x^2 + 112 = 0$

Substitution: $u = x^2$ $\qquad u^2 - 32u + 112 = 0$

Lösung mit Formel: $\qquad u_{1|2} = \frac{32 \pm \sqrt{32^2 - 4 \cdot 112}}{2}$

$u_{1|2} = \frac{32 \pm 24}{2}$

Rücksubstitution: $\qquad u_1 = 28$ ergibt $x_{1|2} = \pm\sqrt{28}$

$u_2 = 4$ ergibt $x_{3|4} = \pm 2$

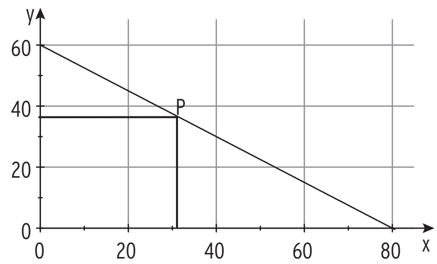
geeignete Schnittstellen für $-4 \le x \le 4$: $\qquad x_3 = -2;\ x_4 = 2$

Das Fenster kann höchstens 4 m breit sein.

Lehrbuch Seite 119

3 Bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems (siehe Abbildung) verläuft

die Gerade durch (0 | 60) und (80 | 0).



Die Gerade hat die Steigung $m = -\frac{60}{80} = -\frac{3}{4}$

Die Geradengleichung lautet $y = -0{,}75x + 60$.

Der Eckpunkt P hat die Koordinaten x und $y = -0{,}75x + 60$:

$P(x \mid -0{,}75x + 60)$.

Für den Inhalt des Rechtecks gilt:

$A(x) = x(-0{,}75x + 60)$; $0 < x < 80$

A wird maximal im Scheitel der zugehörigen Parabel.

$A(x) = x(-0{,}75x + 60) = 0$

$x_1 = 0$ oder $-0{,}75x + 60 = 0$

$x_1 = 0$; $x_2 = 80$

Die Parabel schneidet die x-Achse in $x = 0$ und $x = 80$

Der Inhalt des Rechtecks ist dabei jeweils Null.

Aus Symmetriegründen gilt also $x_S = 40$.

Einsetzen ergibt den maximalen Inhalt: $A_{max} = A(40) = 1200$

Der maximale Flächeninhalt beträgt 1200 m^2.

Lehrbuch Seite 130

2 a) Verschiebung um 3 nach oben: $g(x) = e^x + 3$

$g(x) = 1 \cdot e^x + 3$

Vergleich mit $g(x) = ae^x + b$

ergibt: $a = 1;\ b = 3$

b) Spiegelung an der x-Achse: $g(x) = -\,e^x$

$g(x) = -\,e^x + 0$

Vergleich mit $g(x) = ae^x + b$

ergibt: $a = -1;\ b = 0$

c) Streckung in y-Richtung mit Faktor 0,5: $y = 0{,}5e^x$

Verschiebung um 6 nach unten: $g(x) = 0{,}5e^x - 6$

Vergleich mit $g(x) = ae^x + b$

ergibt: $a = 0{,}5;\ b = -6$

d) Verschiebung um 2 nach rechts: $g(x) = f(x-2) = e^{x-2}$

Termumformung: $g(x) = e^{x-2} = e^{-2} \cdot e^x$

$g(x) = e^{-2} \cdot e^x + 0$

Vergleich mit $g(x) = ae^x + b$

ergibt: $a = e^{-2};\ b = 0$

Hinweis: Die horizontale Verschiebung lässt sich durch eine Streckung in y-Richtung (Faktor e^{-2}) ersetzen.

Gemeinsame Eigenschaft: Alle Kurven haben eine waagrechte Asymptote.

Lehrbuch Seite 134

3 K: $f(x) = 2 - e^{-x}$

K verläuft vom 3. in den 1. Quadranten.

Die Gerade mit $y = 2$ ist waagrechte Asymptote.

$S_y(0 \mid 1)$; $N(-0{,}7 \mid 0)$

$f(-0{,}70) \approx -0{,}01 < 0$; $f(-0{,}69) = 0{,}006... > 0$

VZW von f(x) zwischen − 0,70 und − 0,69.

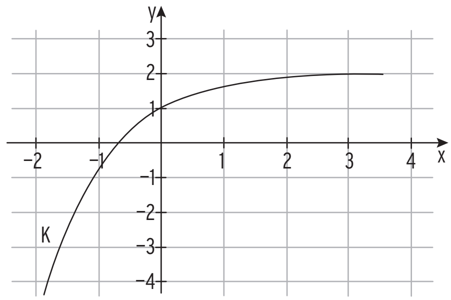
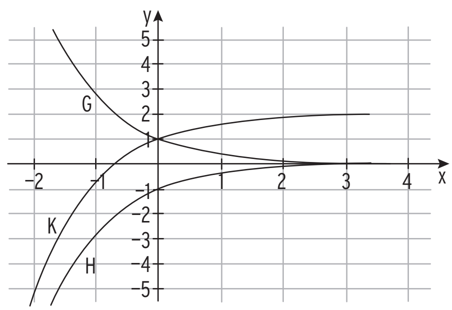


Schaubild von g: G: $y = e^{-x}$

Spiegelung an der x-Achse: H: $y = -e^{-x}$

Verschiebung um 2 nach oben: K: $y = -e^{-x} + 2$ bzw. $y = 2 - e^{-x}$

K entsteht aus dem Schaubild von g durch Spiegelung an der x-Achse und Verschiebung um 2 nach oben.



Lehrbuch Seite 143

3 a) Gleichung:	$e - 2e^{0,5x} = 0$
	$2e^{0,5x} = e$
	$e^{0,5x} = \frac{e}{2}$
	$0,5x = \ln(\frac{e}{2})$
	$x = 2\ln(\frac{e}{2})$
b) Gleichung:	$\frac{2}{3}e^{-x} - 2 = 0$
	$\frac{2}{3}e^{-x} = 2$
	$e^{-x} = 3$
	$-x = \ln(3)$
	$x = -\ln(3)$
c) Gleichung:	$e^{2x} - 5xe^{2x} = 0$
Ausklammern:	$e^{2x}(1 - 5x) = 0$
Satz vom Nullprodukt:	$e^{2x} = 0$ oder $1 - 5x = 0$
wegen $e^{2x} \neq 0$:	$1 - 5x = 0$
einzige Lösung:	$x = 0,2$
d) Gleichung:	$e^{2-x} = 1$
	$2 - x = \ln(1)$
Mit $\ln(1) = 0$:	$2 - x = 0$
	$x = 2$
e) Gleichung:	$e^{0,2x+1} - 1 = 0$
	$e^{0,2x+1} = 1$
	$0,2x + 1 = \ln(1)$
Mit $\ln(1) = 0$:	$0,2x + 1 = 0$
	$x = -5$

Lehrbuch Seite 143

3 f) Gleichung: $3 - 0{,}5e^{0{,}25x} = 0$

$0{,}5e^{0{,}25x} = 3$

$e^{0{,}25x} = 6$

$0{,}25x = \ln(6)$

$x = 4\ln(6)$

g) Gleichung: $(3 + 2x)e^{x-1} = 0$

Satz vom Nullprodukt: $3 + 2x = 0$ oder $e^{x-1} = 0$

wegen $e^{x-1} \neq 0$: $3 + 2x = 0$

$x = -\frac{3}{2}$ (einzige Lösung)

h) Gleichung: $8 - e^x = 7e^{-x}$

$8 - e^x = \frac{7}{e^x}$

Substitution: $u = e^x$: $8 - u = \frac{7}{u}$

Nullform: $8u - u^2 - 7 = 0$

Lösung mit Formel: $u_1 = 1$; $u_2 = 7$

Rücksubstitution: $e^x = 1$

$x = 0$

$e^x = 7$

$x = \ln(7)$

Lösungen: $x_1 = 0$; $x_2 = \ln(7)$

i) Gleichung: $2e^{0{,}5x} = e^x$

$2e^{0{,}5x} - e^x = 0$

Ausklammern: $e^{0{,}5x}(2 - e^{0{,}5x}) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $e^{0{,}5x} = 0$ oder $2 - e^{0{,}5x} = 0$

$e^{0{,}5x} = 0$ oder $e^{0{,}5x} = 2$

wegen $e^{0{,}5x} \neq 0$: $e^{0{,}5x} = 2$

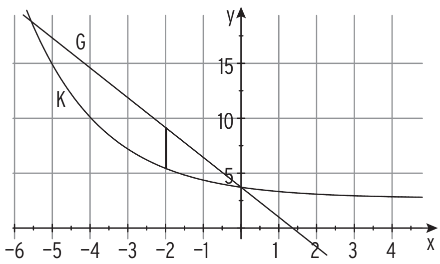
$0{,}5x = \ln(2)$

einzige Lösung: $x = 2\ln(2)$

Lehrbuch Seite 148

3 K: $f(x) = e + e^{-0,5x}$

G: $g(x) = -e(x - 1) + 1$



a) Kein Schnittpunkt mit der x-Achse:

$f(x) > 0$ da $e = 2,71 > 0$

und $e^{-0,5x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

b) $f(0) = e + e^{-0,5 \cdot 0} = e + 1$

$g(0) = -e(0 - 1) + 1 = e + 1$

Gemeinsamer Punkt auf der y-Achse: $S_y(0 \mid e + 1)$

Differenz der y-Werte für $x = -2$: $g(-2) - f(-2) = 3,72$

$g(x) - f(x) = 3$ hat eine Lösung nahe bei $x = -1,5$:

$g(-1,51) - f(-1,51) \approx 2,97$

$g(-1,50) - f(-1,50) \approx 2,96$

Der gesuchte Wert ist kleiner als $-1,50$.

Hinweis: $g(x) - f(x) = 3$ für $x \approx -4,81$ oder $x \approx -1,52$

Lehrbuch Seite 156

3 Reale Situation:

In einem See von der Größe 8 ha wachsen Seerosen.

Reales Modell:

Die bedeckte Fläche nimmt wöchentlich um 30% zu. Anfangs sind 150 m^2 der Oberfläche bedeckt. Annahme: Die Zunahme erfolgt exponentiell. Die bedeckte Fläche nach t Wochen (t = 0 entspricht dem Beginn der Messung) soll durch eine Funktion beschrieben werden.

Mathematisches Modell:

$B(0) = 150$; $B(t)$: bedeckte Fläche in m^2

Mit a = 1,30 ergibt sich $B(t) = 150 \cdot 1{,}30^t$.

Dieser Funktionsterm beschreibt die bedeckte Fläche in Abhängigkeit von der Zeit t in Wochen.

Schreibweise mit e-Basis mit $1{,}30 = e^{\ln(1{,}30)} = e^{0{,}2624}$.

Funktionsterm: $B(t) = 150 \cdot e^{0{,}2624t}$

Mathematische Lösung:

Ansatz: $B(t) = 80000$ $\quad 150 \cdot 1{,}30^t = 80000$

$1{,}30^t = 533{,}33$

Logarithmieren: $\quad \ln(1{,}30) \cdot t = \ln(533{,}33)$

$t = 23{,}93$

Bewertung:

Die Wasserrose bedeckt nach ca. 24 Wochen die gesamte Fläche .

Lehrbuch Seite 160

4 Ansatz: $g(t) = a - 10e^{-kt}$; $t \geq 0$; $a, k > 0$

a) $g(0) = a - 10e^{-k \cdot 0} = a - 10$

$g(10) = a - 10e^{-10k}$

Aus $g(0) = 10$ folgt $a - 10 = 10$

$a = 20$

Aus $g(10) = 16{,}321$ folgt $a - 10e^{-10k} = 16{,}321$

$a = 20$ eingesetzt: $20 - 10e^{-10k} = 16{,}321$

Auflösung nach k: $10e^{-10k} = 3{,}679$

$e^{-10k} = 0{,}3679$

$-10\,k = \ln(0{,}3679)$

$k = \dfrac{\ln(0{,}3679)}{-10} = 0{,}099994 \approx 0{,}1$

Funktionsterm: $g(t) = 20 - 10e^{-0{,}1t}$

b) Für $t \to \infty$: $g(t) \to 20$ wegen $e^{-0{,}1t} \to 0$

Das Schaubild von g hat die waagrechte Asymptote mit der

Gleichung $y = 20$.

Die Biomasse strebt gegen $20 \cdot 10^2$ Tonnen bzw. 2000 Tonnen.

c) 95 % von 20 = 19

Bedingung: $g(t) = 19$ $20 - 10e^{-0{,}1t} = 19$

$10e^{-0{,}1t} = 1$

$e^{-0{,}1t} = 0{,}1$

$-0{,}1t = \ln(0{,}1)$

$t = -10\ln(0{,}1) \approx 23{,}0$

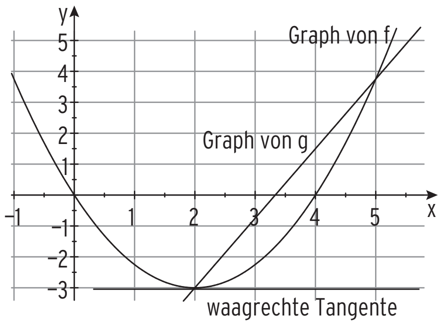
Die Zeit bis zur Verwertung beträgt etwa 23 Jahre.

Lehrbuch Seite 167

2 $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$

a) Mittlere Änderungsrate in [2; 5]:

$\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{3{,}75 - (-3)}{3} = 2{,}25$



b) Sekante g durch P(2 | − 3) und Q(5 | 3,75):

Die Steigung m der Sekante ist

die mittlere Änderungsrate in [2; 5].

m = 2,25 (s. Teilaufgabe 2 a))

Geradengleichung: y = 2,25x + b

Punktprobe mit P(2 | − 3) ergibt b = − 7,5.

g: y = 2,25x − 7,5

Schaubilder von f und g:

c) Momentane Änderungsrate in x = 2: m = 0

Interpretation:

Die Steigung des Graphen von f an der Stelle x = 2 ist null.

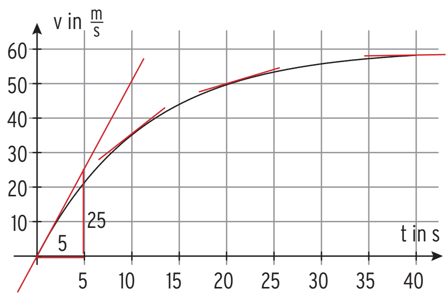
Waagrechte Tangente. S(2 | − 3) ist der Scheitelpunkt.

Lehrbuch Seite 168

9 a) Die Beschleunigung (Steigung des Graphen) ist in t = 0 am größten, danach nimmt sie ab und strebt gegen Null.

b) $v'(0) \approx \frac{25}{5} = 5$

maximale Beschleunigung $5\,\frac{m}{s^2}$



Lehrbuch Seite 173

5 Mehrere Begründungen

K $\rightarrow$ C:

- Die Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ mit Steigung 0 werden zu Nullstellen der Ableitungsfunktion.
- K hat für $-2 < x < 2$ eine positive Steigung,
  C verläuft für $-2 < x < 2$ oberhalb der x-Achse.
- K ist der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades,
  C ist eine Parabel.

G $\rightarrow$ B:

- G hat in $x = 1$ eine waagrechte Tangente,
  Die Ableitungsfunktion hat in $x = 1$ eine Nullstelle.

H $\rightarrow$ A:

- H hat in $x \approx 1{,}7$ eine waagrechte Tangente,
  Die Ableitungsfunktion hat in $x \approx 1{,}7$ eine Nullstelle.
- Die Steigung von H in $x = 0$ ist ca. -2, dies entspricht
  dem y-Achsenabschnitt von A.

Lehrbuch Seite 197

14 a) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

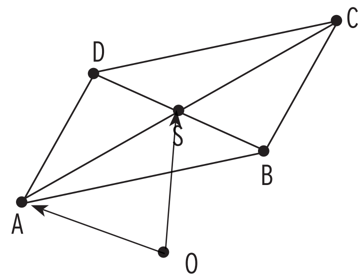
D(2 | − 1 | 3)

b) $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + 0{,}5\,\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\0{,}5\\3\end{pmatrix}$

S(1 | 0,5 | 3)

oder

mit $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$



20 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}14\\9\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\\2{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\7\\0{,}5\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AT} = \begin{pmatrix}54\\37\\3{,}5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\\2{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}50\\35\\1\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}10\\7\\0{,}5\end{pmatrix}$ ist kein Vielfaches von $\overrightarrow{AT} = \begin{pmatrix}50\\35\\1\end{pmatrix}$

oder:

Es gibt kein r, sodass $\overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OT}$ $\quad\begin{pmatrix}4\\2\\2{,}5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}10\\7\\0{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}54\\37\\3{,}5\end{pmatrix}$

r = 5 erfüllt nur die ersten beiden Gleichungen.

Die Bergspitze liegt nicht auf der (geradlinigen) Flugbahn.

Lehrbuch Seite 202

4 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ und $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

weitere Vektoren:

Vielfache von $\vec{n}$: z. B. $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 204

1 a) Winkelberechnung: $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}$

$\cos(\alpha) = \frac{-12 - 6 + 2}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{22}} = \frac{-16}{\sqrt{462}}$

mit WTR: $\alpha = 138{,}1°$

b) Winkelberechnung: $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}\right|}$

$\cos(\alpha) = \frac{0 + 6 - 12}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{22}} = \frac{-6}{\sqrt{440}}$

mit WTR: $\alpha = 106{,}6°$

Lehrbuch Seite 207

7 a) Winkel bei C: . Mit $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ erhält man

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{68}{\sqrt{89}\,\sqrt{74}} \Rightarrow \alpha = 33{,}1\,°$$

Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right| \cdot \sin(\alpha) \approx 22{,}16$

Der Flächeninhalt des Sonnensegels beträgt ca. 22,16 m^2.

b) Für den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -16 \\ -5 \\ -41 \end{pmatrix}$ der parallelen Lichtstrahlen muss gelten:

$$\begin{pmatrix} -16 \\ -5 \\ -41 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -16 \\ -5 \\ -41 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$$

$(-16) \cdot (-7) + (-5) \cdot 6 + (-41) \cdot 2 = 0$

und $(-16) \cdot (-8) + (-5) \cdot 1 + (-41) \cdot 3 = 0$

Die Lichtstrahlen fallen senkrecht auf das Sonnensegel.