Bohner | Ott | Deusch | Rosner

Mathematik – Jahrgangsstufen 1 und 2

Grundlegendes Anforderungsniveau

Berufliches Gymnasium

Baden-Württemberg

Analysis

Vektorielle Geometrie

Stochastik

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner
Lehrauftrag Mathematik am BSW Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner
Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall
Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

* * * * * * * * * *

1. Auflage 2022

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0339-01
ISBN 978-3-8120-1105-1

Vorwort

Vorbemerkungen

Der vorliegende Band „Mathematik für berufliche Gymnasien – Jahrgangsstufen 1 und 2“ ist ein Lehr- und Arbeitsbuch für alle beruflichen Gymnasien in Baden-Württemberg für das grundlegende Anforderungsniveau (gA).
Das Lehrbuch richtet sich exakt nach dem neuen Bildungsplan für die gymnasiale Oberstufe, Mathematik, in Baden-Württemberg, der am 01. 08. 2021 in Kraft getreten ist.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam sowohl die im Lehrplan geforderten inhalts- als auch die prozessbezogenen Kompetenzen (modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).

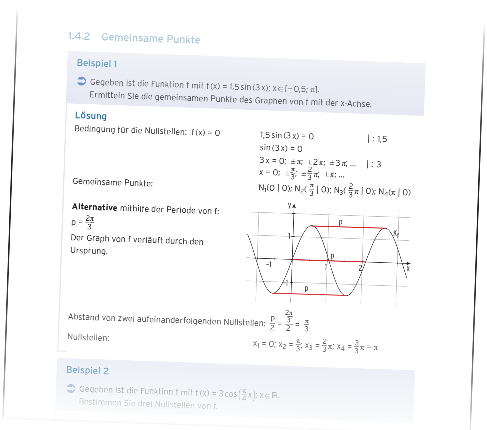
Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die im Bildungsplan aufgeführten Kompetenzen und Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

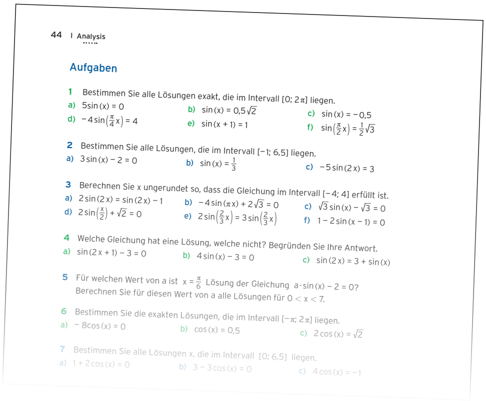
Der Aufbau dieses Buches

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.



Jede Lerneinheit schließt mit einer ausreichenden Anzahl von **Aufgaben** ab. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Kompetenzorientierte Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Aufgaben aus dem Alltag, aus der Wirtschaft und der Technik stellen einen praktischen Bezug her. Eine Differenzierung der Aufgaben ist durch Farben gegeben:

grün: Lösung ohne Hilfsmittel
blau: keine Vorgabe zur Lösung


44 | Analysis

Aufgaben

1 Bestimmen Sie alle Lösungen exakt, die im Intervall $[0; 2\pi]$ liegen.
a) $5\sin(x) = 0$ b) $\sin(x) = 0{,}5\sqrt{2}$ c) $\sin(x) = -0{,}5$
d) $-4\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 4$ e) $\sin(x+1) = 1$ f) $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

2 Bestimmen Sie alle Lösungen, die im Intervall $[-1; 6{,}5]$ liegen.
a) $3\sin(x) - 2 = 0$ b) $\sin(x) = \frac{1}{3}$ c) $-5\sin(2x) = 3$

3 Berechnen Sie x ungerundet so, dass die Gleichung im Intervall $[-4; 4]$ erfüllt ist.
a) $2\sin(2x) = \sin(2x) - 1$ b) $-4\sin(\pi x) + 2\sqrt{3} = 0$ c) $\sqrt{3}\sin(x) - \sqrt{3} = 0$
d) $2\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{2} = 0$ e) $2\sin\left(\frac{2}{3}x\right) = 3\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$ f) $1 - 2\sin(x-1) = 0$

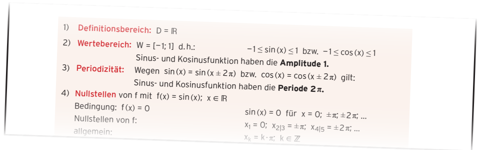
4 Welche Gleichung hat eine Lösung, welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.
a) $\sin(2x+1) - 3 = 0$ b) $4\sin(x) - 3 = 0$ c) $\sin(2x) = 3 + \sin(x)$

5 Für welchen Wert von a ist $x = \frac{\pi}{6}$ Lösung der Gleichung $a \cdot \sin(x) - 2 = 0$?
Berechnen Sie für diesen Wert von a alle Lösungen für $0 < x < 7$.

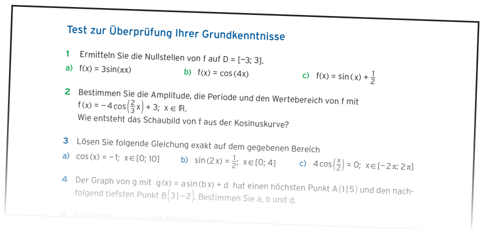
6 Bestimmen Sie die exakten Lösungen, die im Intervall $[-\pi; 2\pi]$ liegen.
a) $-8\cos(x) = 0$ b) $\cos(x) = 0{,}5$ c) $2\cos(x) = \sqrt{2}$

7 Bestimmen Sie alle Lösungen x, die im Intervall $[0; 6{,}5]$ liegen.
a) $1 + 2\cos(x) = 0$ b) $3 - 3\cos(x) = 0$ c) $4\cos(x) = -1$

Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.


1) Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$
2) Wertebereich: $W = [-1; 1]$ d.h.: $-1 \le \sin(x) \le 1$ bzw. $-1 \le \cos(x) \le 1$
Sinus- und Kosinusfunktion haben die **Amplitude 1**.
3) Periodizität: Wegen $\sin(x) = \sin(x \pm 2\pi)$ bzw. $\cos(x) = \cos(x \pm 2\pi)$ gilt:
Sinus- und Kosinusfunktion haben die **Periode 2π**.
4) Nullstellen von f mit $f(x) = \sin(x);\ x \in \mathbb{R}$
Bedingung: $f(x) = 0$ $\sin(x) = 0$ für $x = 0;\ \pm\pi;\ \pm 2\pi;\ \ldots$
Nullstellen von f: $x_1 = 0;\ x_{2|3} = \pm\pi;\ x_{4|5} = \pm 2\pi;\ \ldots$
allgemein: $x_k = k \cdot \pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Die Aufgaben **„Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse“** sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Sie werden im Anhang ausführlich gelöst.


Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

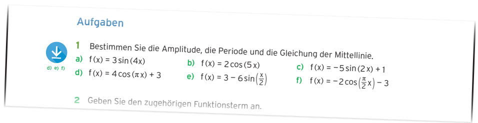
1 Ermitteln Sie die Nullstellen von f auf $D = [-3; 3]$.
a) $f(x) = 3\sin(\pi x)$ b) $f(x) = \cos(4x)$ c) $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}$

2 Bestimmen Sie die Amplitude, die Periode und den Wertebereich von f mit
$f(x) = -4\cos\left(\frac{2}{3}x\right) + 3;\ x \in \mathbb{R}$.
Wie entsteht das Schaubild von f aus der Kosinuskurve?

3 Lösen Sie folgende Gleichung exakt auf dem gegebenen Bereich
a) $\cos(x) = -1;\ x \in [0; 10]$ b) $\sin(2x) = \frac{1}{2};\ x \in [0; 4]$ c) $4\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0;\ x \in [-2\pi; 2\pi]$

4 Der Graph von g mit $g(x) = a\sin(bx) + d$ hat einen höchsten Punkt $A(1|5)$ und den nachfolgend tiefsten Punkt $B(3|-2)$. Bestimmen Sie a, b und d.

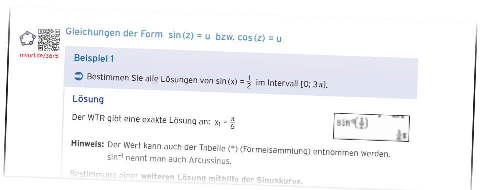
Für **Aufgaben mit dem Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese in der Mediathek zum Buch auf unserer Webseite https://www. merkur-verlag.de.


Aufgaben

1 Bestimmen Sie die Amplitude, die Periode und die Gleichung der Mittellinie.
a) $f(x) = 3\sin(4x)$ b) $f(x) = 2\cos(5x)$ c) $f(x) = -5\sin(2x) + 1$
d) $f(x) = 4\cos(\pi x) + 3$ e) $f(x) = 3 - 6\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ f) $f(x) = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 3$

2 Geben Sie den zugehörigen Funktionsterm an.

Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Im Buch wird **Geogebra** in vielfältiger Weise, zur Erarbeitung von mathematischen Inhalten und zur Lösung von Aufgaben eingesetzt.


mvurl.de/36r5

Gleichungen der Form $\sin(z) = u$ bzw. $\cos(z) = u$

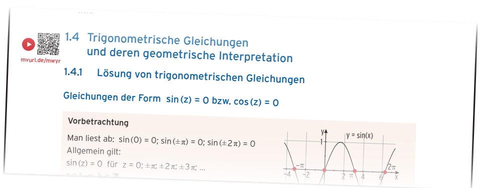
Beispiel 1
Bestimmen Sie alle Lösungen von $\sin(x) = \frac{1}{2}$ im Intervall $[0; 3\pi]$.

Lösung
Der WTR gibt eine exakte Lösung an: $x_1 = \frac{\pi}{6}$

Hinweis: Der Wert kann auch der Tabelle (*) (Formelsammlung) entnommen werden.
$\sin^{-1}$ nennt man auch Arcussinus.

Bestimmung einer weiteren Lösung mithilfe der Sinuskurve.

Videos dienen der Veranschaulichung von Problemen und Erläuterung von Lösungswegen. Sie unterstützen die Lernenden beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge.


mvurl.de/mwyr

1.4 Trigonometrische Gleichungen und deren geometrische Interpretation

1.4.1 Lösung von trigonometrischen Gleichungen

Gleichungen der Form $\sin(z) = 0$ bzw. $\cos(z) = 0$

Vorbetrachtung
Man liest ab: $\sin(0) = 0;\ \sin(\pm\pi) = 0;\ \sin(\pm 2\pi) = 0$
Allgemein gilt:
$\sin(z) = 0$ für $z = 0;\ \pm\pi;\ \pm 2\pi;\ \pm 3\pi;\ \ldots$

Inhaltsverzeichnis

I Analysis

1 Trigonometrische Funktionen und zugehörige Gleichungen

Viele Vorgänge in der Natur laufen periodisch ab:
Gondel auf einem Riesenrad, Wasserstand bei Ebbe und Flut, Lungenatmung, Schallwelle, Pendeluhr, Mondphasen.
Mithilfe von Messungen erhält man Daten. Durch die grafische Darstellung dieser Daten erkennt man den periodischen Verlauf.

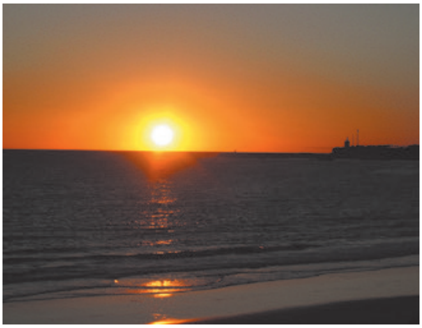
mvurl.de/mab9

Qualifikationen & Kompetenzen

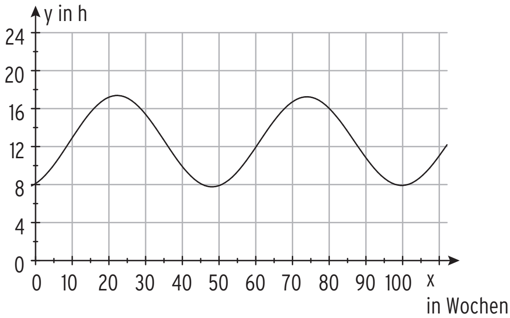
- Graphen von trigonometrischen Funktionen erkennen
- Transformationen durchführen
- Funktionsterme aufstellen
- Trigonometrische Gleichungen lösen
- Gemeinsame Punkte bestimmen
- Realitätsbezogene Zusammenhänge mit trigonometrischen Funktionen beschreiben, darstellen und interpretieren

Beispiel 1

Sonnenaufgang und -untergang



Tageslänge im Laufe eines Jahres

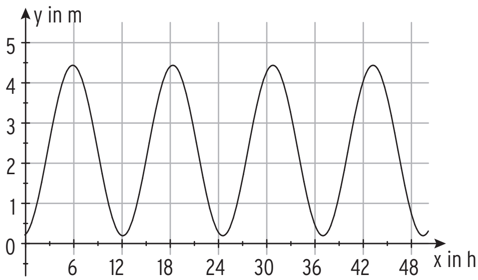


Die Tageslänge (Zeit zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang) ändert sich im Laufe eines Jahres. Am Diagramm erkennt man, dass sich dieser Ablauf jedes Jahr wiederholt. Die Funktion, die die Veränderung der Tageslänge beschreibt, hat die Periode ein Jahr.

Beispiel 2

Gezeiten

Wasserstand

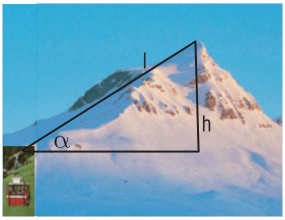


Die Gezeiten verhalten sich nahezu periodisch. Damit lässt sich der Wasserstand vorausberechnen. Das Diagramm zeigt die Änderung des Wasserstands an der Nordsee für zwei Tage im März 2021. Dabei ist x die Zeit in Stunden, $x = 0$ entspricht 0:30 Uhr am 9.03.2021, y der Wasserstand in Meter über Seekartennull.

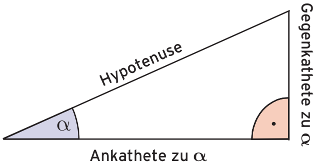
1.1 Definition der Winkelfunktionen

1.1.1 Definition der Winkelfunktionen für Winkel von 0° bis 90°

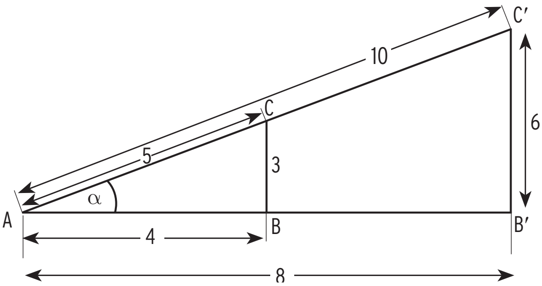
In der Trigonometrie beschäftigt man sich mit Dreiecken, insbesondere mit rechtwinkligen Dreiecken.



Im **rechtwinkligen Dreieck** nennt man die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite **Hypotenuse,** die anderen beiden Seiten heißen **Katheten.** Die Kathete, die dem Winkel α anliegt, nennt man **Ankathete** von α, die dem Winkel α gegenüberliegende Seite nennt man **Gegenkathete** von α.



Rechtwinkliges Dreieck mit $\alpha = 36{,}9°$
Aus der Abbildung ersieht man, dass die Verhältnisse von Gegenkathete zu Hypotenuse im Dreieck ABC und im Dreieck AB′C′ gleich sind: $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$.
Beide Dreiecke haben den gleichen Winkel α, der durch das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse eindeutig festgelegt ist.
Dieses Verhältnis nennt man den Sinus des Winkels α: $\sin(\alpha) = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$



Auch das Verhältnis von Ankathete zu Hypotenuse legt den Winkel α fest, man nennt es den Kosinus des Winkels α: $\cos(\alpha) = \frac{4}{5} = \frac{8}{10}$

Das Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete nennt man den Tangens des Winkels α:
$\tan(\alpha) = \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

Definition der Winkelfunktionen

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

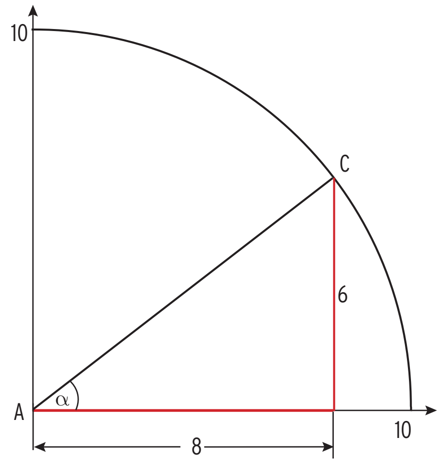
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$$

Beispiel 1

➡ Wie bestimmt man aus einem Seitenverhältnis im rechtwinkligen Dreieck den zugehörigen Winkel?

Lösung

Man legt die Spitze A des rechtwinkligen Dreiecks in den Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems.



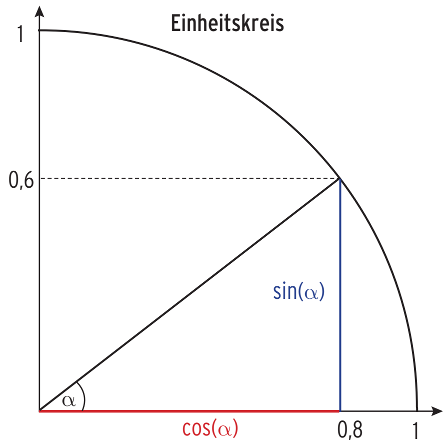
Legt man den Eckpunkt C auf einen Kreis mit Radius 10 LE (= Länge der Hypotenuse), erhält man ein Dreieck mit einem Winkel α von 0° bis 90° und jedem Seitenverhältnis ist eindeutig ein Winkel zugeordnet.

Dem Seitenverhältnis $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{6}{10}$ wird der Winkel 36,9° zugeordnet.

$\sin(\alpha) = \frac{6}{10} \Rightarrow \alpha = 36{,}9°$

Entsprechend erhält man für das Verhältnis $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$: $\cos(\alpha) = \frac{8}{10} \Rightarrow \alpha = 36{,}9°$

Wählt man für die Länge der Hypotenuse eine Längeneinheit (1 LE), erhält man $\sin(\alpha) = \frac{0{,}6\text{ LE}}{1\text{ LE}} = 0{,}6$.



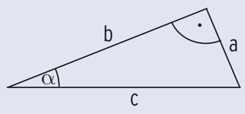
Für $0° \le \alpha \le 90°$ gilt:
$0 \le \sin(\alpha) \le 1$
$0 \le \cos(\alpha) \le 1$

Festlegung: $\sin(0°) = 0$; $\sin(90°) = 1$
$\cos(0°) = 1$; $\cos(90°) = 0$

Am Einheitskreis kann man bei gegebenen Winkeln **sin (α)** als Maßzahl der Länge der **Gegenkathete**, **cos (α)** als Maßzahl der Länge der **Ankathete** ablesen.

Beispiel 2

➲ Bestimmen Sie $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ im nebenstehenden Dreieck mithilfe von a, b und c.



Lösung

Im rechtwinkligen Dreieck ist c die Hypotenuse, a und b sind die Katheten von α.
Der Sinus des Winkels α ist das Verhältnis von Gegenkathete zur Hypotenuse.

Also gilt: $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$

Der Kosinus des Winkels α ist das Verhältnis von Ankathete zur Hypotenuse.

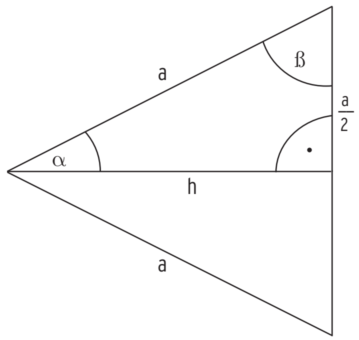
Also gilt: $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$

Beispiel 3

➲ Bestimmen Sie den exakten Wert von $\sin(30°)$ und $\cos(30°)$.

Lösung

Man zeichnet ein rechtwinkliges Dreieck mit den Winkeln 30° bzw. 60°.
Im gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel 60° groß.
Die Höhe im Dreieck halbiert das Dreieck und es gilt für die Winkel:
$\alpha = 30°$ und $\beta = 60°$
Im rechtwinkligen Dreieck ist a die Hypotenuse.
Die Gegenkathete von α ist $\frac{a}{2}$.



Also gilt: $\sin(\alpha) = \sin(30°) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$

Für $\cos(30°)$ braucht man die Höhe h.

Mit dem Satz von Pythagoras ergibt sich: $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$

Die Höhe h erhält man durch Wurzelziehen: $h = a\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

Also gilt: $\cos(\alpha) = \cos(30°) = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Tabelle der wichtigsten Werte:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

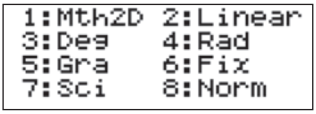
Beispiel 4

a) Ermitteln Sie mit dem TR: • sin (65°) • cos (12°)

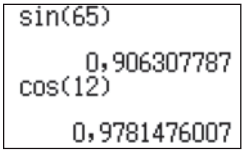
b) Bestimmen Sie den zugehörigen Winkel. • sin (α) = 0,850 • cos (α) = 0,625

Lösung

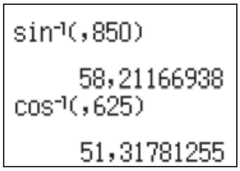
Mit der Einstellung DEG (wie degree = Grad)



a) Tastenfolge
- SIN (65) = 0,90631
  d. h., sin (65°) = 0,91
- COS (12) = 0,97815
  d. h., cos (12°) = 0,98



b) Tastenfolge
- SHIFT SIN (0,850) = 58,21
  d. h., sin (α) = 0,850
  α = 58,2°
- cos (α) = 0,625
  α = 51,32°



Aufgaben

1 Bestimmen Sie mit dem TR. Runden Sie auf 2 Dezimalen.

a) sin (54°) b) sin (18,5°) c) cos (88,2°) d) cos (9,4°) e) sin (4,2°)

2 Ermitteln Sie den zugehörigen Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 90°$.

a) sin (α) = 0,380 b) sin (α) = 0,922 c) cos (α) = 0,185 d) cos (α) = 0,788

3 Bestimmen Sie den zugehörigen Winkel zeichnerisch und mit dem TR.

a) sin (α) = 0,5 b) sin (α) = $\frac{1}{3}$ c) cos (α) = $\frac{2}{3}$ d) cos (α) = $\frac{4}{5}$

4 In einem rechtwinkligen Dreieck ABC ist c = 6 cm und α = 50°.
Berechnen Sie die fehlenden Winkel und Seiten im Dreieck.

5 Eine Zahnradbahn steigt auf einer Strecke von 1250 m mit einen Neigungswinkel von 10,5° (gegen die Horizontale gemessen).
Wie viel m Höhendifferenz bewältigt sie?

6 Bestimmen Sie den exakten Wert von sin (45°).

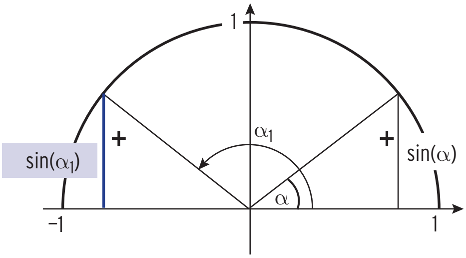
1.1.2 Definition der Winkelfunktionen für beliebige Winkel

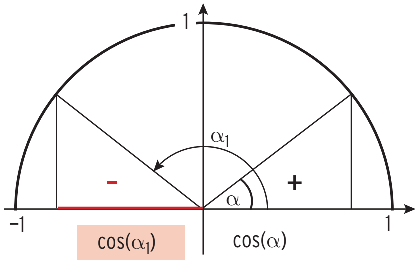
Der Winkel α liegt zwischen 0° und 90° (I. Quadrant)

Der Winkel α_1 liegt zwischen 90° und 180° (II. Quadrant)

Es gilt: $\alpha_1 = 180° - \alpha$ für $0° < \alpha < 90°$.

Einheitskreis





Der Winkel α_1 legt im II. Quadrant ein kongruentes Dreieck fest.
sin (α_1) wird festgelegt als die Länge der blau markierten Strecke.

Es gilt: $\sin(\alpha_1) = \sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha)$

Da die Länge der Ankathete in beiden Dreiecken gleich ist, sie aber auf der positiven bzw. negativen x-Achse liegen, gilt:

$$\cos(\alpha_1) = \cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

Beispiele

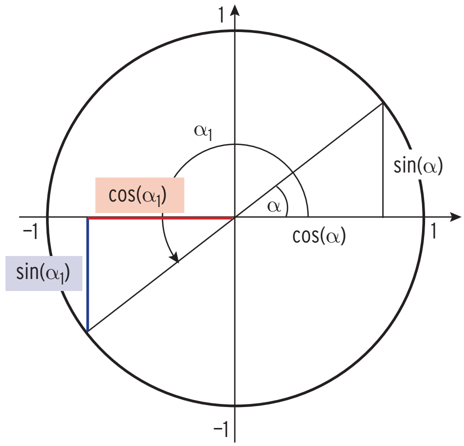
$\sin(150°) = \sin(180° - 30°) = \sin(30°)$; $\cos(110°) = \cos(180° - 70°) = -\cos(70°)$

Bestätigen Sie mit dem TR.

Der Winkel α_1 liegt zwischen 180° und 270° (III. Quadrant)

Es gilt: $\alpha_1 = 180° + \alpha$ für $0° < \alpha < 90°$

$\sin(\alpha_1) = \sin(180° + \alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(\alpha_1) = \cos(180° + \alpha) = -\cos(\alpha)$



Beispiele

$\sin(200°) = \sin(180° + 20°)$
$= -\sin(20°)$

$\cos(240°) = \cos(180° + 60°)$
$= -\cos(60°)$

Funktionen der Form $f(x) = a\sin(bx) + d$ bzw. $f(x) = a\cos(bx) + d$

mvurl.de/iiyk

Beispiel 1

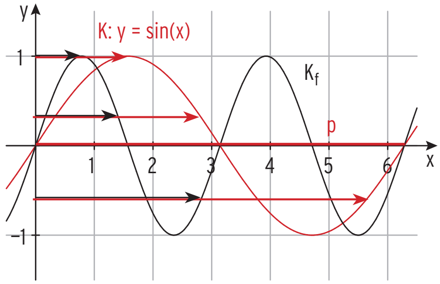
Gegeben ist die Funktion f mit $x \in \mathbb{R}$.
Wie entsteht K_f aus der Sinuskurve bzw. Kosinuskurve?

a) $f(x) = \sin(2x)$ b) $f(x) = \cos(\pi x)$

Lösung

a)

	$y = \sin(x)$	$y = \sin(2x)$
Periode p	2π	π
Nullstellen	$0; \pi; 2\pi; \ldots$	$0; \frac{\pi}{2}; \pi; \ldots$

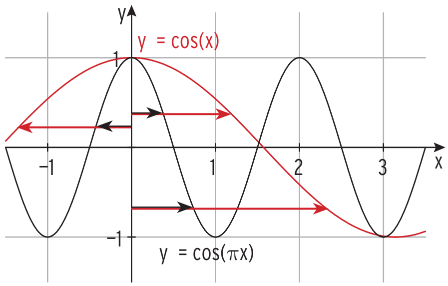


Die **Periode** hat sich **halbiert**.
K_f entsteht aus der Sinuskurve ($y = \sin(x)$) durch Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$.

Hinweis: Eine **Periode** ist der **Abstand** von einer Nullstelle bis zur übernächsten Nullstelle, wenn keine Verschiebung in y-Richtung vorliegt.

b)

	$y = \cos(x)$	$y = \cos(\pi x)$
Periode p	2π	$2 = \frac{2\pi}{\pi}$
Nullstellen	$\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi; \ldots$	$\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \ldots$



Die Periode hat sich mit dem Faktor $\frac{1}{\pi}$ verändert. K_f entsteht aus der Kosinuskurve ($y = \cos(x)$) durch Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{\pi}$.

Hinweis: Eine **Periode** ist der **Abstand** der x-Werte von zwei aufeinanderfolgenden „Hochpunkten“ bzw. „Tiefpunkten“.

Zusammenhang von Faktor b und Periode p

Faktor $b > 0$	1	2	0,5	3	π	4	allgemein: b
Periode p	2π	π	4π	$\frac{2}{3}\pi$	2	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{b}$
Streckung von K: $y = \sin(x)$ bzw. K: $y = \cos(x)$ in x-Richtung mit Faktor	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{b}$

Für die **Periode p** von f mit $f(x) = \sin(bx)$ bzw. f mit $f(x) = \cos(bx)$ gilt $\mathbf{p = \frac{2\pi}{b}}$; $\mathbf{b > 0}$

K_f entsteht aus der Sinus- bzw. Kosinuskurve durch **Streckung in x-Richtung** mit Faktor $\frac{1}{b}$.

Hinweis: Der Graph von f mit $f(x) = \sin(-x)$ entsteht aus der Sinuskurve durch Spiegelung an der y-Achse.

Beispiel 2

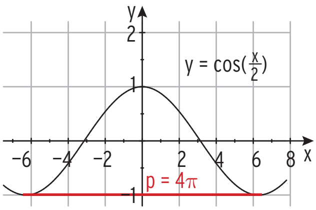
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{x}{2}\right)$; $x \in \mathbb{R}$.

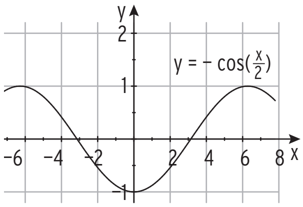
Bestimmen Sie die Amplitude und die Periode.
Wie entsteht K_f aus der Kosinuskurve?

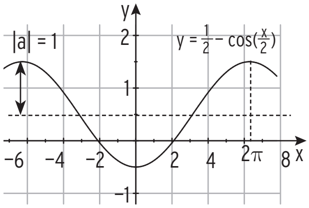
Lösung

K_f hat die Amplitude $|a| = 1$ und ist symmetrisch zur y-Achse; f hat die Periode $p = 4\pi$.
Das Schaubild mit der Gleichung $y = \cos(x)$ wird in folgender Reihenfolge abgebildet:

1. in x-Richtung mit Faktor 2 gestreckt $\left(y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$,
2. an der x-Achse gespiegelt $\left(y = -\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$
3. um $\frac{1}{2}$ nach oben verschoben. Mittellinie mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}$







Beispiel 3

Das gezeichnete Schaubild hat die Gleichung $y = a\sin(bx) + d$.
Bestimmen Sie a, b und d sowie die Periodenlänge. Begründen Sie.

Lösung

Mittellinie mit der Gleichung $y = 1$,

d. h.: $d = 1$

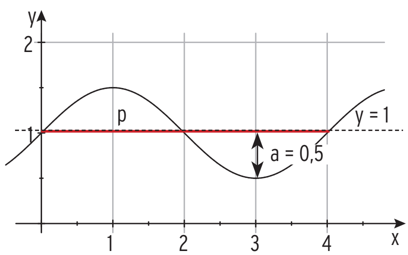
y-Differenz von höchstem und tiefstem Punkt:

$y_H - y_T = 1{,}5 - 0{,}5 = 1$

Amplitude: $a = \frac{y_H - y_T}{2} = 0{,}5$

Periode: $p = 4$

Faktor: $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$



Aufgaben

d) e) f)

1 Bestimmen Sie die Amplitude, die Periode und die Gleichung der Mittellinie.

a) $f(x) = 3\sin(4x)$ b) $f(x) = 2\cos(5x)$ c) $f(x) = -5\sin(2x) + 1$

d) $f(x) = 4\cos(\pi x) + 3$ e) $f(x) = 3 - 6\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ f) $f(x) = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 3$

2 Geben Sie den zugehörigen Funktionsterm an.
K entsteht aus der Kosinuskurve durch folgende Abbildungen.

a) Streckung in y-Richtung mit Faktor 4 und Streckung in x-Richtung mit Faktor 3.

b) Streckung in x-Richtung mit Faktor π und Verschiebung um 6 nach unten.

3 K ist das Schaubild der Funktion f. Zeichnen Sie K im angegebenen Intervall D.

a) $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$; $D = [-2\pi; 2\pi]$ b) $f(x) = 3\cos(2x)$; $D = [-\pi; \pi]$

c) $f(x) = -\cos(3x)$; $D = [-3; 3]$ d) $f(x) = 4\sin(\pi x)$; $D = [-2; 2]$

4 K_f ist das Schaubild der Funktion f mit $x \in \mathbb{R}$.
Wie entsteht K_f aus der Sinus- bzw. der Kosinuskurve?
Bestimmen Sie die Periodenlänge und den Wertebereich.
Geben Sie die Gleichung der Mittellinie an.

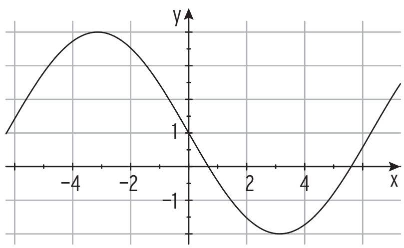
a) $f(x) = 1 - 3\sin(\pi x)$ b) $f(x) = 2\cos(3x) + 1$

5 K_f ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 1 - \frac{4}{5}\sin(2x)$; $x \in \mathbb{R}$

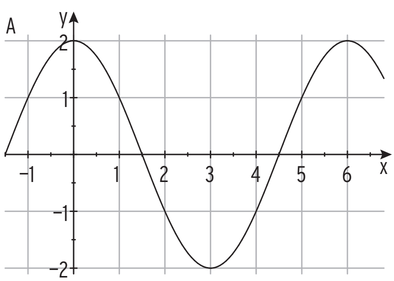
a) Zeigen Sie: Das Schaubild K_f hat keinen gemeinsamen Punkt mit der x-Achse.

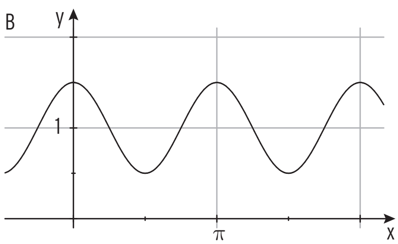
b) Verschieben Sie K_f so, dass die verschobene Kurve mindestens einen gemeinsamen Punkt mit der x-Achse hat.

6 Das gezeichnete Schaubild (siehe Abb.) hat die Gleichung $y = a\sin(0{,}5x) + d$. Bestimmen Sie a und d sowie die Periodenlänge.
Begründen Sie.



7 Das gezeichnete Schaubild hat die Gleichung $y = a\cos(bx) + d$.
Bestimmen Sie a, b und d sowie die Periodenlänge. Begründen Sie.





8 Wie entsteht das Schaubild K_g aus K_f?

a) $f(x) = \cos(x)$; $g(x) = 3\cos(0{,}5\,x)$

b) $f(x) = \sin(x)$; $g(x) = -\,0{,}5\sin(2\,x) - 2$

c) $f(x) = 2\sin(3\,x)$; $g(x) = \sin(3\,x) - 1$

d) $f(x) = -\cos(4\,x)$; $g(x) = \cos(4\,x) + 5$

9 Ermitteln Sie den Term einer trigonometrischen Funktion.
Gegeben sind die Amplitude a und die Periode p.

a) $a = 3$; $p = \pi$

b) $a = 0{,}5$; $p = 6$

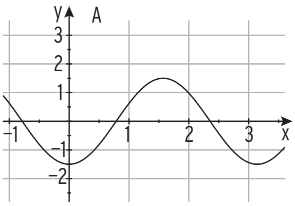
c) $a = 2{,}5$; $p = 3\pi$

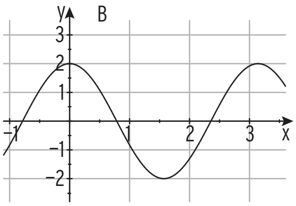
10 Welche Funktion gehört zu welchem Graphen? Begründen Sie Ihre Wahl.

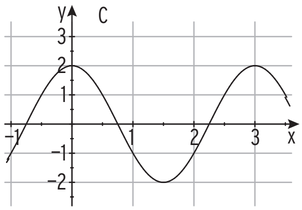
a) $f(x) = 2\cos(2\,x)$

b) $f(x) = -1{,}5\cos(2\,x)$

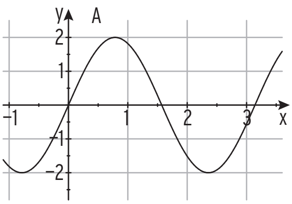
c) $f(x) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$

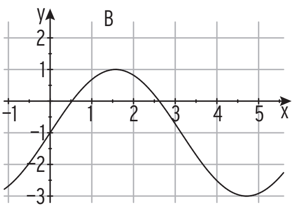


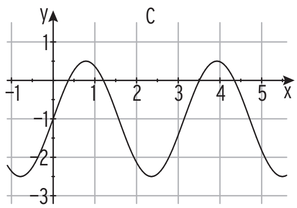




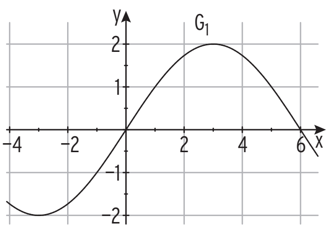
11 Die Funktion f mit $f(x) = 2\sin(2\,x) - 1$ hat das Schaubild K_f.
Keines der gezeigten Schaubilder ist K_f. Begründen Sie an jeweils einer Eigenschaft.

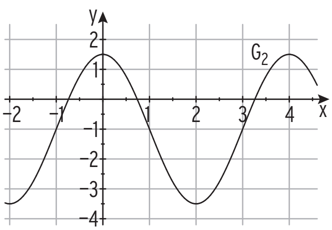


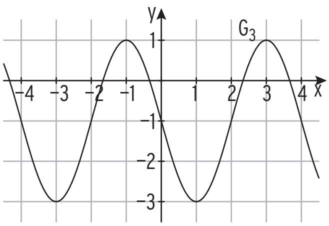


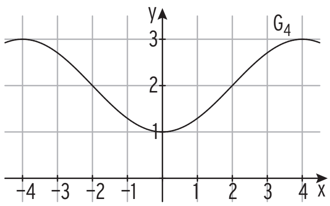


12 Bestimmen Sie einen passenden Funktionsterm.









Funktionen der Form $f(x) = a\sin(x - c) + d$ bzw. $f(x) = a\cos(x - c) + d$

mvurl.de/7n8d

Beispiel 1

Der Graph von f mit $f(x) = 2\sin(x - 1) - 3$; $x \in \mathbb{R}$, heißt G.

a) Bestimmen Sie die Amplitude, die Periode, die Gleichung der Mittellinie und den Wertebereich.

b) Beschreiben Sie, wie G aus der Sinuskurve entsteht.

Lösung

a) $f(x) = a\sin(x - c) + d$: $a = 2$; $c = 1$; $d = -3$

Amplitude: $a = 2$

Periode: $p = 2\pi$

Gleichung der Mittellinie (mit $d = -3$): $y = -3$

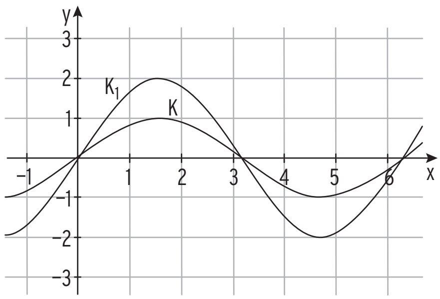
Wertebereich von f: $d - a = -3 - 2 = -5$; $d + a = -3 + 2 = -1$

$W = [-5; -1]$

b) K: Sinuskurve mit $y = \sin(x)$

Streckung von K in y-Richtung mit Faktor 2

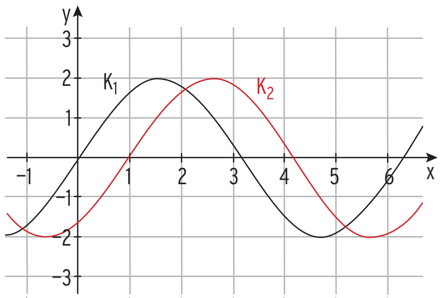
K_1: $f_1(x) = 2\sin(x)$



Verschiebung von K_1 um 1 nach rechts

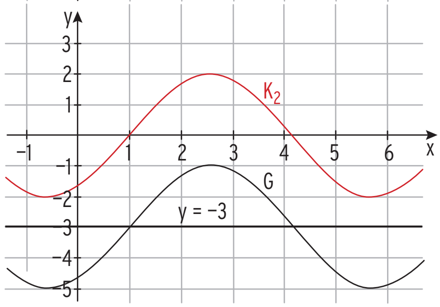
K_2: $f_2(x) = 2\sin(x - 1)$

Ersetzen Sie x durch $x - 1$.



Verschiebung von K_2 um 3 nach unten

G: $f(x) = 2\sin(x - 1) - 3$



Beispiel 2

G ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -\cos(x + 2) + 1$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie die Amplitude, die Periode, die Gleichung der Mittellinie und den Wertebereich.

b) G entsteht durch Transformationen aus der Kosinuskurve. Geben Sie die Transformationen an.

Lösung

a) $f(x) = a\cos(x - c) + d$: $a = -1$; $c = -2$; $d = 1$

Amplitude: $|a| = |-1| = 1$

Periode: $p = 2\pi$

Gleichung der Mittellinie (mit d = 1): $y = 1$

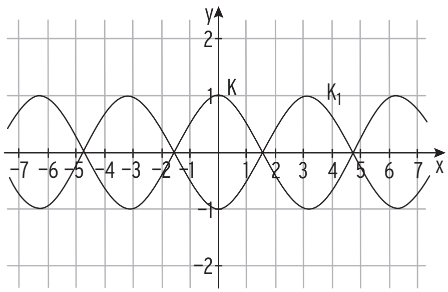
Wertebereich von f: $d - |a| = 1 - 1 = 0$; $d + |a| = 1 + 1 = 2$

$W = [0; 2]$

b) K: Kosinuskurve mit $y = \cos(x)$

Spiegelung von K an der x-Achse

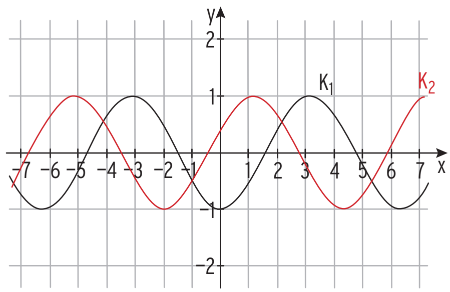
K_1: $f_1(x) = -\cos(x)$



Verschiebung von K_1 um 2 nach links

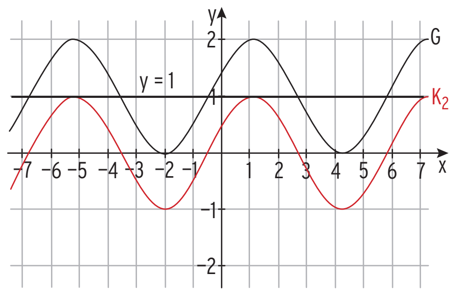
K_2: $f_2(x) = -\cos(x + 2)$

Ersetzen Sie x durch (x + 2).



Verschiebung von K_2 um 1 nach oben

G: $f(x) = -\cos(x + 2) + 1$



Beispiel 3

Das Schaubild K der Funktion f mit f(x) = sin(x + 1); x ∈ ℝ, wird in y-Richtung mit Faktor 2 gestreckt und um 3 nach oben verschoben. Ist die Reihenfolge der Transformationen von Bedeutung? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

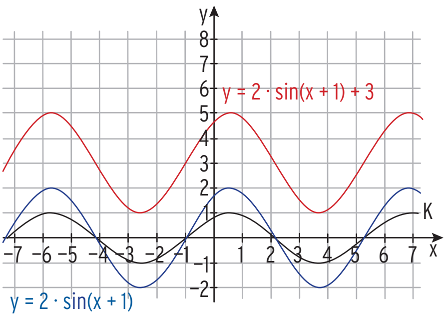
Kurvengleichung:	$y = \sin(x + 1)$
Streckung in y-Richtung mit Faktor 2:	$y = 2 \cdot \sin(x + 1)$
Verschiebung um 3 nach oben:	$y = 2 \cdot \sin(x + 1) + 3$

Reihenfolge tauschen

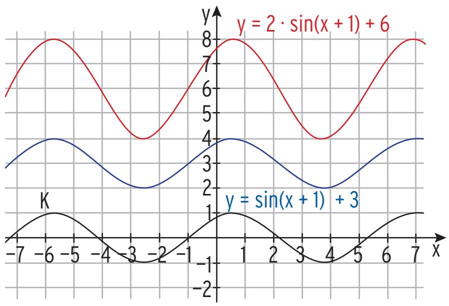
Verschiebung um 3 nach oben:	$y = \sin(x + 1) + 3$
Streckung in y-Richtung mit Faktor 2:	$y = 2 \cdot (\sin(x + 1) + 3)$
	$y = 2 \cdot \sin(x + 1) + 6$

Die Reihenfolge der Transformationen ist von Bedeutung, da die Kurvengleichungen unterschiedlich sind.

Streckung und Verschiebung



Verschiebung und Streckung



Beispiel 4

Die Kosinuskurve wird 1 nach rechts verschoben und in y-Richtung mit Faktor 5 gestreckt. Ist die Reihenfolge der Transformationen von Bedeutung? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

Kurvengleichung:	$y = \cos(x)$
Verschiebung um 1 nach rechts:	$y = \cos(x - 1)$
Streckung in y-Richtung mit Faktor 5:	$y = 5 \cdot \cos(x - 1)$

Reihenfolge tauschen

Streckung in y-Richtung mit Faktor 5:	$y = 5 \cdot \cos(x)$
Verschiebung um 1 nach rechts:	$y = 5 \cdot \cos(x - 1)$

Die Reihenfolge der Transformationen ist ohne Bedeutung, da die Kurvengleichungen gleich sind.

mvurl.de/zod2

Transformationen

Das Schaubild einer Funktion f mit **$f(x) = a\sin[b(x-c)] + d$**
bzw. **$f(x) = a\cos[b(x-c)] + d$**

entsteht aus der Sinuskurve bzw. der Kosinuskurve durch

1	2	3	4
Streckung in y-Richtung mit Faktor |a| Für $a < 0$: Spiegelung an der x-Achse	**Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{b}$;** $b > 0$	**Verschiebung in x-Richtung um c**	**Verschiebung in y-Richtung um d**

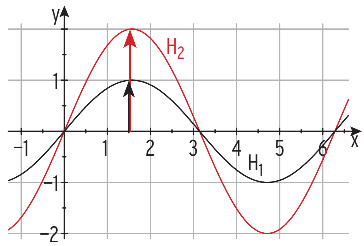
Die Funktion f hat die **Amplitude |a|** und die **Periode** $p = \frac{2\pi}{b}$.

Hinweis: Für $b < 0$: Spiegelung an der y-Achse

Beispiel 1

K: $f(x) = 2\sin(\pi x)$

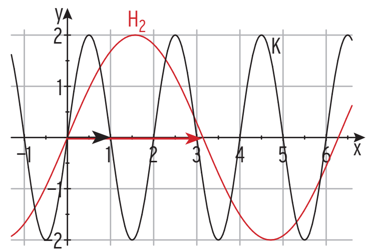
Dabei ist $a = 2$, $b = \pi$, $c = 0$ und $d = 0$.



Zu 1:

a = 2

Streckung von H_1: $y = \sin(x)$ **in y-Richtung mit Faktor** **a** = 2 ergibt H_2: $y = 2\sin(x)$.



Zu 2:

b = π

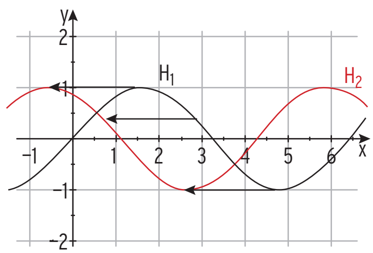
Streckung von H_2: $y = 2\sin(x)$ **in x-Richtung mit Faktor** $\frac{1}{b} = \frac{1}{\pi}$ ergibt K: $y = 2\sin(\pi x)$.

K hat die **Periode** $p = \frac{2\pi}{b} = 2$.

Beispiel 2

K: $f(x) = \sin(x+2) + 1$

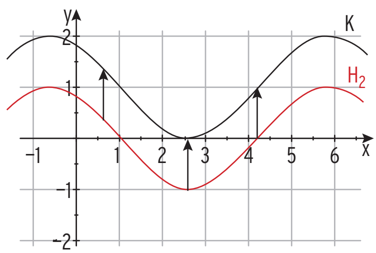
Dabei ist $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$ und $d = 1$.



Zu 3:

c = −2

Verschiebung von H_1: $y = \sin(x)$ **in x-Richtung um c** (2 nach links) ergibt H_2: $y = \sin(x+2)$.



Zu 4:

d = 1

Verschiebung von H_2: $y = \sin(x+2)$ **in y-Richtung um d** (1 nach oben) ergibt:

K: $y = \sin(x+2) + 1$

Anwendung der Kettenregel auf die Funktion f mit

$f(x) = e^{ax+b}$:	$f'(x) = a \cdot e^{ax+b}$
$f(x) = \sin(bx + c)$:	$f'(x) = b \cdot \cos(bx + c)$
$f(x) = \cos(bx + c)$:	$f'(x) = -b \cdot \sin(bx + c)$
$f(x) = e^{u(x)}$:	$f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$
$f(x) = \sin(u(x))$:	$f'(x) = \cos(u(x)) \cdot u'(x)$
$f(x) = \cos(u(x))$:	$f'(x) = -\sin(u(x)) \cdot u'(x)$

Aufgaben

1 Bestimmen Sie $f'(x)$.

a) $f(x) = e^{-4x} - e^{4x}$

b) $f(x) = 250\,e^{0{,}015x}$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}e^{-0{,}5x-1} + 2$

d) $f(x) = \frac{3}{2}e^{-5x^2-3x}$

e) $f(x) = \frac{1}{5}t(e^{2-x} + e)$

f) $f(x) = 4x - e^{1-tx}$

g) $f(x) = 4\sin(5x - 3)$

h) $f(x) = 3\cos(4(x-2))$

2 Leiten Sie ab.

a) $f(x) = tx - 2 + e^{x+t}$

b) $f(x) = t(e^{-x} - 3x^2)$

c) $f(x) = -4e^x(e^{-x} + 3)$

d) $f(x) = -3x^2 - x - e^{\ln(2)\cdot x}$

e) $f(x) = e^{t-x} + 2e^{-tx}$

f) $f(x) = te^{2-3x} - 6e^{x^2+3}$

g) $f(x) = 2\sin(2x) - 3$

h) $f(x) = \sqrt{3} - \cos(4x - \pi)$

i) $f(x) = \pi x - \cos(1 - x)$

j) $f(x) = t\sin(tx) - \frac{1}{x}$

k) $f(x) = t^2 - \cos\left(\frac{x}{t}\right)$

l) $f(x) = \sqrt{x} + \sin(\pi x)$

3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \cos(2x)$; $x \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie $f'(0)$; $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

4 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^x + 3e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Welcher der drei Ableitungswerte $f'(0)$; $f'(1)$; $f'(-1)$ ist der größte?

5 Das Abkühlgesetz $T(t) = 20 + 50\,e^{-0{,}07t}$ beschreibt den Temperaturverlauf eines erwärmten Körpers. $T(t)$ ist die Temperatur in °C zur Zeit t in Minuten mit $t \geq 0$.
Berechnen Sie: $T'(0)$, $T'(20)$ und $T'(100)$ und interpretieren Sie diese Werte.

6 Die Funktion f ist eine Verkettung der Funktionen u und h: $f(x) = h(u(x))$.
Bestimmen Sie $f'(x)$.

a) $u(x) = 5x + 1$; $h(u) = 4u^2 - 3$

b) $u(x) = 2x + 3$; $h(u) = e^{3u+1}$

c) $u(x) = x - 3$; $h(u) = 4\sin(u)$

d) $u(x) = x^2 + 7$; $h(u) = 3u$

e) $u(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$; $h(u) = 2u$

f) $u(x) = 1 - 6x$; $h(u) = \cos(2u - 1)$

7 Ermitteln Sie die Ableitung von f.

a) $f(x) = (5x + b)^3$

b) $f(x) = (3x + 1)^4$

mvurl.de/7m3a

Produktregel der Ableitung

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x\,e^x$.
Gesucht ist $f'(x)$.
Zum Ableiten einer Summe benötigt man die **Summenregel:**
Die Ableitung einer Summe ist die **Summe** der Ableitungen der Summanden. Eine entsprechende „einfache“ Regel für ein Produkt gibt es nicht, wie man an einem Beispiel erkennen kann.

$$f(x) = x^2 \cdot (x^2 - 3) = x^4 - 3x^2$$
$$\downarrow \quad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$2x \cdot 2x \neq 4x^3 - 6x$$

Man erkennt: Ein Produkt kann nicht faktorweise abgeleitet werden!
Für die Ableitung eines Produktes gibt es eine Regel, die Produktregel.

Produktregel

Ist die Funktion f gegeben durch	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$,
so gilt für die Ableitung:	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
In Kurzform:	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Beispiele für die Anwendung der Produktregel

a) $f(x) = x \cdot e^x = u(x) \cdot v(x)$

Faktor: $u(x) = x$	$\Rightarrow\ u'(x) = 1$
Faktor: $v(x) = e^x$	$\Rightarrow\ v'(x) = e^x$
Mit der **Produktregel:**	$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x$
	$f'(x) = (1 + x)e^x$

b) $f(x) = (2x - 1)\,e^{4x}$

Faktor: $u(x) = 2x - 1$	$\Rightarrow\ u'(x) = 2$
Faktor: $v(x) = e^{4x}$	$\Rightarrow\ v'(x) = 4e^{4x}$ **(Kettenregel)**
Mit der **Produktregel:**	$f'(x) = 2 \cdot e^{4x} + (2x - 1) \cdot 4e^{4x}$
	$f'(x) = (8x - 2)e^{4x}$

c) $f(x) = 3x \sin(2x)$

Faktor: $u(x) = 3x$	$\Rightarrow\ u'(x) = 3$
Faktor: $v(x) = \sin(2x)$	$\Rightarrow\ v'(x) = 2\cos(2x)$ **(Kettenregel)**
Mit der **Produktregel:**	$f'(x) = 3 \cdot \sin(2x) + 3x \cdot 2\cos(2x)$
	$f'(x) = 3\sin(2x) + 6x\cos(2x)$

d) $f(x) = e^{0,5x} \cos(2x + 1)$

Faktor: $u(x) = e^{0,5x}$	$\Rightarrow\ u'(x) = 0{,}5e^{0,5x}$ **(Kettenregel)**
Faktor: $v(x) = \cos(2x + 1)$	$\Rightarrow\ v'(x) = -2\sin(2x + 1)$ **(Kettenregel)**
Mit der **Produktregel:**	$f'(x) = 0{,}5e^{0,5x} \cdot \cos(2x + 1) + e^{0,5x} \cdot (-2\sin(2x + 1))$
	$f'(x) = e^{0,5x}(0{,}5\cos(2x + 1) - 2\sin(2x + 1))$

Was man wissen sollte – über die Ableitungsregeln

Regel	Funktion	Ableitung
Faktorregel:	$f(x) = a \cdot g(x)$	$f'(x) = a \cdot g'(x)$
Summenregel:	$f(x) = g(x) + h(x)$	$f'(x) = g'(x) + h'(x)$
Potenzregel:	$f(x) = x^r;\ r \in \mathbb{Q}^*$	$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$
Kettenregel:	$f(x) = f(u(x))$	$f'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x)$
	$f(x) = e^{u(x)}$	$f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$
	$f(x) = (u(x))^2$	$f'(x) = 2\,u(x) \cdot u'(x)$
	$f(x) = (u(x))^3$	$f'(x) = 3\,(u(x))^2 \cdot u'(x)$
	$f(x) = \sin(u(x))$	$f'(x) = \cos(u(x)) \cdot u'(x)$
	$f(x) = \cos(u(x))$	$f'(x) = -\sin(u(x)) \cdot u'(x)$
Produktregel:	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

mvurl.de/1cbq

mvurl.de/pt3t

Aufgaben

1 Leiten Sie ab.

a) $f(x) = (x+1)\,e^x$
b) $f(x) = xe^{3x}$
c) $f(x) = (4-3x)e^{x-1}$
d) $f(x) = 5\,e^{2x}$
e) $f(x) = x^2 \sin(x)$
f) $f(x) = 3x\cos(2x)$
g) $f(x) = (3-2x)\,e^{-0{,}5x}$
h) $f(x) = (t+1)\sin(x)\cos(x)$
i) $f(x) = x - x\,e^{-x+1}$
j) $f(x) = 5(x-3)\,e^{4x-3}$
k) $f(x) = \frac{x}{2}\cos(x+1)$
l) $f(x) = e^{2x}\cos(3x)$

2 Bestimmen Sie die Stellen, für die gilt: $f'(x) = 0$.

a) $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3$
b) $f(x) = \frac{1}{2}(\cos(x))^2;\ -2 < x < 2$
c) $f(x) = a\,x\,e^{-0{,}25x};\ a \neq 0$
d) $f(x) = \frac{1}{4}x(x^2-2)^2$

3 Zeigen Sie: Das Schaubild von f mit $f(x) = 4x^2 e^{3-2x};\ x \in \mathbb{R}$ hat zwei Punkte, für deren x-Koordinaten gilt: $f'(x) = 0$. Bestimmen Sie deren Koordinaten.

4 Geben Sie die Ableitung von f an.

a) $f(x) = \frac{1}{7}x^3 + 3x - 5$
b) $f(x) = \frac{1}{4}(8-2x^2)$
c) $f(x) = x^2 + x\,e^x$
d) $f(x) = \sin(3x) \cdot e^{2x}$
e) $f(x) = e^{\sin(x)}$
f) $f(x) = 4x^2 + x^2 e^{3x-5}$
g) $f(x) = x\,e^{4x} - x^2 e^{4x}$
h) $f(a) = e^a(e^{-a} + 3)$
i) $f(u) = \frac{5}{u} + 2\sqrt{u}$
j) $f(x) = 5 + 3x\,e^{-ax}$
k) $f(x) = \frac{t}{2}x^4 + 2t\,x^2 - \pi$
l) $f(x) = e^{x^2} + e^x + e$

5 Bilden Sie die Ableitung mit und ohne Produktregel.

a) $f(x) = (x^2-4)(3x+5)$
b) $f(x) = e^x(e^x+3)$

6 Die Ladung eines Kondensators in Abhängigkeit von der Zeit wird beschrieben durch die Funktion Q mit $Q(t) = 0{,}06\,(1 - e^{-0{,}08t})$; t in s, Q(t) in As. Wie groß ist die Stromstärke I am Anfang der Messung und nach 10 Sekunden? (s: Sekunden, As: Amperesekunden)

Höhere Ableitungen

Beispiele

a) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5;\ x \in \mathbb{R}$.

Ableitung von f:	$f'(x) = -2x^2 - 3x$	1. Ableitung von f
Ableitung von f':	$(f'(x))' = f''(x) = -4x - 3$	2. Ableitung von f
Ableitung von f'':	$(f''(x))' = f'''(x) = -4$	3. Ableitung von f

b) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x+1)\,e^{2x};\ x \in \mathbb{R}$.

1. Ableitung von f: $f'(x) = 1 \cdot e^{2x} + (x+1)\,e^{2x} \cdot 2 = (2x+3)\,e^{2x}$
2. Ableitung von f: $f''(x) = 2 \cdot e^{2x} + (2x+3)\,e^{2x} \cdot 2 = (4x+8)\,e^{2x}$
3. Ableitung von f: $f'''(x) = 4 \cdot e^{2x} + (4x+8)\,e^{2x} \cdot 2 = (8x+20)\,e^{2x}$

f'' ist die Ableitungsfunktion von f'.
Einsetzen der x-Werte in $f''(x)$ liefert die Steigungswerte des Schaubildes von f'.

Aufgaben

1 Leiten Sie die gegebene Funktion zweimal ab.

a) $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x$

b) $f(x) = -\frac{1}{6}(x^5 - x^3 - x^2)$

c) $f(x) = \sin(2x - 1) - \cos(x)$

d) $g(a) = 3a - e + e^{2-a}$

e) $f(x) = -\frac{3}{2}x^2(x^2 + 5)$

f) $f(x) = \frac{1}{8}(x-1)^3$

g) $f(x) = (6x+5)\,e^{-x}$

h) $f(x) = a\,e^{-x} + b\,e^{-2x}$

i) $f(x) = (\cos(x))^2$

j) $A(u) = (u^2 - 2)e^{-u}$

k) $f(x) = -\frac{1}{2}\sin(\pi x) - x^2$

l) $f(x) = 3x\left(\frac{1}{8}x^2 - x + 2\right)$

m) $f(x) = a x^4 + 2a x^2 + c$

n) $f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$

o) $f(x) = \frac{2}{x} - x^2$

p) $f(t) = 0{,}02\,t^3 + 18\,t^2 + 256\,t + 2050$

2 Zeigen Sie, dass für f mit $f(x) = (1 - x^2)\,e^x$ auf $\mathbb{R}$ gilt: $f(x) = -f''(x) + 2f'(x) - 2e^x$.

3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(ax);\ a \neq 0;\ x \in \mathbb{R}$.
Formulieren Sie eine Vermutung für die n-te Ableitung ($n \in \mathbb{N}^*$, n gerade).

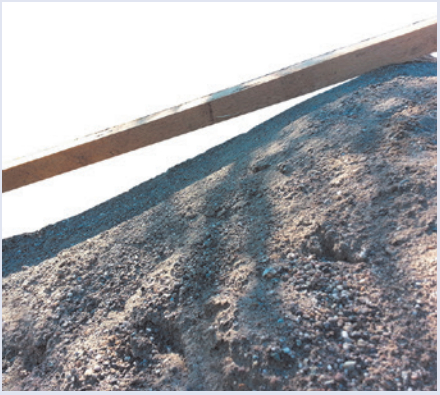
4 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = t x^3 - 5x^2 + 3t x - 6t;\ x, t \in \mathbb{R}$.
Berechnen Sie $f'(1);\ f''(1);\ f''(0);\ f''(-1)$.

5 Gegeben ist die Kostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}25x^3 - 0{,}5x^2 + 2x + 12$.
Bestimmen Sie die Grenzkostenfunktion und deren Ableitung.

3.1.3 Tangente

Beispiel 1

K ist der Graph der Funktion f mit
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$; $x \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an K im Punkt $A(3\,|\,f(3))$.
Wie lautet die Gleichung der Tangente an K im Punkt $B(0\,|\,f(0))$ bzw. im Punkt $C(1\,|\,f(1))$?
Zeichnen Sie das Schaubild K von f und die Tangenten in ein Koordinatensystem ein.



Lösung

Ableitung $f'(x) = -x + 1$

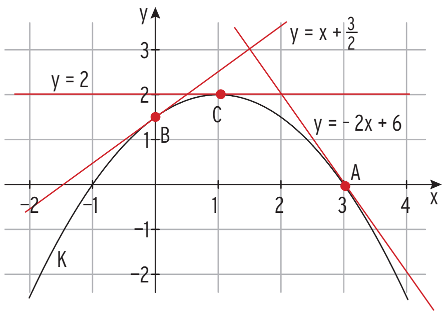
Tangente in $A(3\,|\,f(3))$:

$y = f(3) = 0$; also ist $A(3\,|\,0)$ Berührpunkt von Tangente und Kurve.

Steigung in A:	$f'(3) = -2$
Tangentengleichung mithilfe der Hauptform	
Hauptform:	$y = mx + b$
Einsetzen von $m = f'(3) = -2$:	$y = -2x + b$
Punktprobe mit $A(3\,|\,0)$:	$0 = -2 \cdot 3 + b$
	$b = 6$
Tangentengleichung:	$y = -2x + 6$

Tangente in $B(0\,|\,f(0))$:
$m = f'(0) = 1$
$y = f(0) = \frac{3}{2} = b$
Tangentengleichung: $y = x + \frac{3}{2}$

Tangente in $C(1\,|\,f(1))$:
$m = f'(1) = 0$
$y = f(1) = 2$
Tangentengleichung: $y = 2$
(waagrechte Tangente)



Die **Tangente** an den Graphen K von f im Kurvenpunkt $B(u\,|\,f(u))$ ist eine Gerade mit der Steigung $m = f'(u)$ durch B.

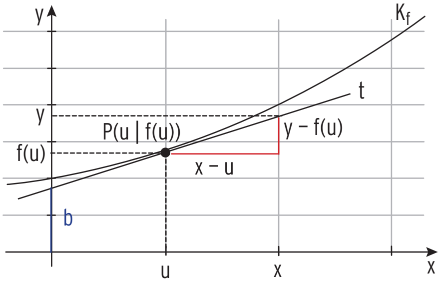
Punkt-Steigungs-Form der Tangentengleichung

Die Tangente t an K_f verläuft durch den Punkt P(u I f(u)).

Steigung der Tangente in P

$f'(u) = \frac{y - f(u)}{x - u}$

Umformung ergibt: $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$
(Punkt-Steigungs-Form)



Gleichung der Tangente t an den Graphen von f durch den Punkt P(u I f(u)):

$$y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$$

Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -2x^2 + 6x$; $x \in \mathbb{R}$. K ist das Schaubild von f. Die Tangente an K im Punkt $P(2 \mid f(2))$ heißt t.

a) Bestimmen Sie die Gleichung von t.

b) Überprüfen Sie, ob die Gerade H mit $y = -6x + 18$ Tangente an K ist.

Lösung

a) Ableitung: $f'(x) = -4x + 6$

Punkt-Steigungs-Form: $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

Mit $f'(2) = -2$ und $f(2) = 4$: $y = -2 \cdot (x - 2) + 4$

Gleichung der Tangente in P: t: $y = -2x + 8$

Alternative

Hauptform: $y = mx + b$

Mit $f(2) = 4$ erhält man den Kurvenpunkt: $P(2 \mid 4)$

Steigung in $x = 2$: $f'(2) = -2$

Einsetzen von $m = f'(2)$: $y = -2x + b$

Punktprobe mit $P(2 \mid 4)$: $4 = -2 \cdot 2 + b$

$b = 8$

Gleichung der Tangente in P: t: $y = -2x + 8$

b) Die Gerade H hat die Steigung −6.

Bedingung: $f'(x) = -6$ $\quad -4x + 6 = -6$

$x = 3$

y-Wert berechnen: $y = f(3) = 0$

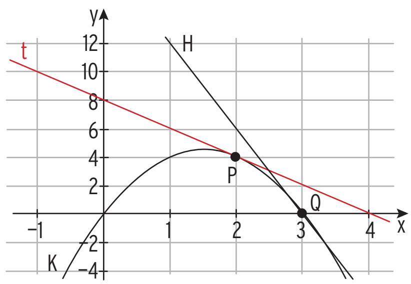
Der Punkt Q(3 I 0) liegt auf K.

Überprüfung, ob Q auch auf H liegt.

y-Wert berechnen: $y = -6 \cdot 3 + 18 = 0$

Der Punkt Q(3 I 0) liegt auf H.

H ist Tangente an K in Q.



3.2.4 Kurvenuntersuchung

Um den Kurvenverlauf beschreiben zu können, ist es zweckmäßig, **markante Kurvenpunkte** zu kennen.
Solche Kurvenpunkte sind die **Schnittpunkte mit den Achsen, Extrempunkte und Wendepunkte.** Die Kenntnis des Symmetrieverhaltens erleichtert eine Kurvenuntersuchung.

Beispiel 1

K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{4}$; $x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, eine Wendetangente schneidet die x-Achse in $x_1 = -\frac{1}{2}$.
Skizzieren Sie K in einem geeigneten Bereich.

Lösung

Ableitungen: $f'(x) = x^3 - 3x$; $f''(x) = 3x^2 - 3$; $f'''(x) = 6x$

Wendepunkte

Notw. Bedingung für Wendestellen: $f''(x) = 0$ $\qquad 3x^2 - 3 = 0$
$x_{1|2} = \pm 1$

Nachweis durch Einsetzen der x-Werte in $f'''(x)$:
$f'''(1) = 6 \neq 0$ $\qquad$ K hat einen Wendepunkt an der Stelle $x_1 = 1$.
K ist symmetrisch zur y-Achse, K hat einen weiteren Wendepunkt an der Stelle $x_2 = -1$.
Mit $f(\pm 1) = -3$ erhält man die Wendepunkte: $\qquad W_{1|2}(\pm 1 | -3)$

Wendetangente an der Stelle 1

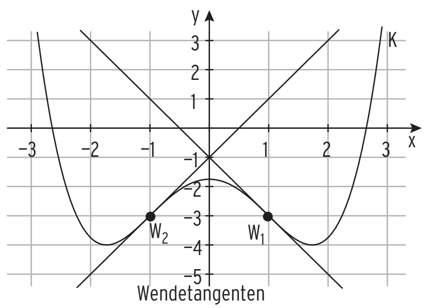
Steigung in $W_1(1\|-3)$:	$f'(1) = -2$
Hauptform:	$y = mx + b$
Einsetzen von $m = f'(1)$:	$y = -2x + b$
Punktprobe mit $W_1(1\|-3)$:	$-3 = -2 \cdot 1 + b$
	$b = -1$
Gleichung der Wendetangente in W_1:	$y = -2x - 1$
Punktprobe mit $N\left(-\frac{1}{2} \middle\| 0\right)$:	$0 = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1$ wahre Aussage

Hinweis:
K ist **achsensymmetrisch** zur y-Achse, da

$$f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - \frac{3}{2}(-x)^2 - \frac{7}{4}$$
$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{4} = f(x)$$

Im Funktionsterm f(x) kommen nur gerade Exponenten von x vor.

Die Gleichung der Wendetangente in W_2 lautet: $y = 2x - 1$ (wegen Symmetrie zur y-Achse).



Beispiel 2

➡ Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x - 2\sin(x)$; $x \in [-2; 6]$ mit Schaubild K.

a) Die Hochpunkte von K liegen auf der Geraden g mit $y = x + \sqrt{3}$.
Nehmen Sie Stellung zu dieser Behauptung.

b) Begründen Sie, warum f genau eine Nullstelle in dem Intervall $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$ hat

Lösung

a) Ableitungen: $f'(x) = 1 - 2\cos(x)$; $f''(x) = 2\sin(x)$; $f'''(x) = 2\cos(x)$

Extrempunkte

Notw. Bed. für Extremstellen: $f'(x) = 0$ $\quad 1 - 2\cos(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos(x) = 0{,}5$

Stellen mit waagrechter Tangente auf D: $\quad x_{1|2} = \pm\frac{\pi}{3}$; $x_3 = \frac{5\pi}{3}$

Nachweis durch Einsetzen in $f''(x)$:

$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} > 0$ in $x = \frac{\pi}{3}$ hat K einen Tiefpunkt $T\left(\frac{\pi}{3} \,\middle|\, \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$.

$f''\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} > 0$ in $x = -\frac{\pi}{3}$ hat K einen Hochpunkt $H_1\left(-\frac{\pi}{3} \,\middle|\, -\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\right)$.

Weiterer Hochpunkt $H_2\left(\frac{5\pi}{3} \,\middle|\, \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}\right)$

Gleichung von g: $y = x + \sqrt{3}$

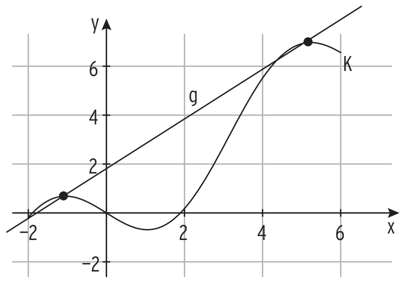
Punktprobe mit $H_1\left(-\frac{\pi}{3} \,\middle|\, -\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\right)$:

$-\frac{\pi}{3} + \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}$ wahre Aussage

Punktprobe mit $H_2\left(\frac{5\pi}{3} \,\middle|\, \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}\right)$

$\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$ wahre Aussage

Die zwei Hochpunkte liegen auf einer Geraden.



b) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$ und $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) > 0$, damit hat f mindestens eine Nullstelle im Intervall $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$.

Zwischen der Minimalstelle $\left(x_1 = \frac{\pi}{3}\right)$ und der Maximalstelle $\left(x_3 = \frac{5\pi}{3}\right)$

ist f streng monoton wachsend $(f'(x) > 0)$.

f hat auf diesem Bereich nur eine Nullstelle ($x_1 \approx 1{,}895$).

Beispiel 3

➡ K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = e^{x-2} + t$; $x, t \in \mathbb{R}$.
Für welchen Wert von t berührt K die erste Winkelhalbierende?

Lösung

Ableitung: $f'(x) = e^{x-2}$

Gleichung der ersten Winkelhalbierenden: $y = x$; Steigung $m = 1$

Berühren: $f'(x) = 1$ $\quad e^{x-2} = 1$

$\quad x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2$

Punkt auf der 1. Winkelhalbierenden: $\quad B(2|2)$

Ansatz: $y = f(2) = 2$ $\quad e^0 + t = 2 \;\Leftrightarrow\; t = 1$

Für $t = 1$ berührt K die erste Winkelhalbierende.

Beispiel 4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x+2)\,e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$. K ist das Schaubild von f.
Geben Sie den Wertebereich von f an.

Lösung

Untersuchung von K auf Extrempunkte

Ableitungen

Mit der Produkt- und Kettenregel: $f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + (x+2)\,e^{-x} \cdot (-1) = (-x-1)\,e^{-x}$

$f''(x) = -1 \cdot e^{-x} + (-x-1)\,e^{-x}\,(-1) = x\,e^{-x}$

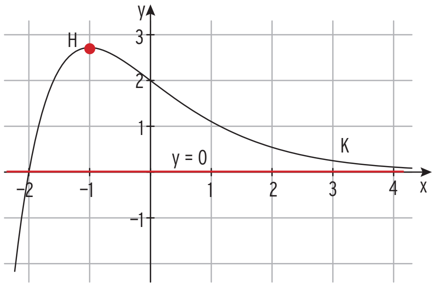
Extrempunkte

Notw. Bedingung für Extremstellen:

$f'(x) = 0$ $\quad (-x-1)\,e^{-x} = 0$

Stelle mit waagrechter Tangente: $x_1 = -1$

Nachweis durch Einsetzen
des x-Wertes in $f''(x)$
$f''(-1) = -e^1 < 0$
K hat den Hochpunkt $H(-1\,|\,e)$.



$H(-1\,|\,e)$ ist Hochpunkt und der einzige Extrempunkt von K für $x \in \mathbb{R}$.
Damit ist die Funktion f für $x < -1$ monoton wachsend und für $x > -1$ monoton fallend.

Für $x \to -\infty$ strebt $f(x) \to -\infty$.
Für $x \to \infty$ strebt $f(x) \to 0$.
Wertebereich von f: $W =]-\infty;\, e]$

Beispiel 5

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x + 0{,}5\,e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$. K ist das Schaubild von f.

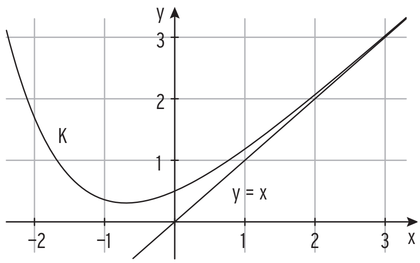
a) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K.

b) Zeichnen Sie K und ihre Asymptote in ein Koordinatensystem ein.

Lösung

a) Ableitungen:
$f'(x) = 1 - 0{,}5\,e^{-x}$; $f''(x) = 0{,}5\,e^{-x}$
$f''(x) = 0{,}5\,e^{-x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
K ist eine Linkskurve.

b) Asymptote von K
$e^{-x} \to 0$ für $x \to \infty$:
$f(x) = x + 0{,}5\,e^{-x} \approx x$ für $x \to \infty$
Gleichung der schiefen Asymptote: $y = x$



mvurl.de/39nw

Was man wissen sollte – über eine Kurvenuntersuchung

Symmetrie

Das Schaubild K der Funktion f ist symmetrisch

I. **zur y-Achse,** wenn $f(-x) = f(x)$ ist.
II. **zum Ursprung,** wenn $f(-x) = -f(x)$ ist.

Gemeinsame Punkte des Schaubildes K von f mit den Koordinatenachsen

a) **Mit der x-Achse:** $f(x) = 0$ liefert die Nullstellen von f.

Hinweis: x_0 ist **doppelte** Nullstelle von f $\Rightarrow$ x_0 ist Extremstelle von f.
K von f berührt die x-Achse in x_0, der Extrempunkt liegt auf der x-Achse.
x_0 ist **dreifache** Nullstelle von f $\Rightarrow$ x_0 ist Wendestelle von f.
K von f hat einen Sattelpunkt auf der x-Achse.

b) **Mit der y-Achse:** $x = 0$ in $f(x)$ einsetzen liefert den y-Wert des Schnittpunkts.

Monotonie

$f'(x) > 0$ im Intervall J $\Rightarrow$ f ist **streng monoton wachsend** im Intervall J.
$f'(x) < 0$ im Intervall J $\Rightarrow$ f ist **streng monoton fallend** im Intervall J.

Krümmung

$f''(x) > 0$ im Intervall J $\Rightarrow$ K von f ist im Intervall J **linksgekrümmt.**
$f''(x) < 0$ im Intervall J $\Rightarrow$ K von f ist im Intervall J **rechtsgekrümmt.**

Extrempunkte

Notwendige Bedingung: $f'(x_0) = 0$

Nachweis: 1. Möglichkeit durch **Vorzeichenuntersuchung** von $f'(x)$.
VZW von + nach − in x_0: K hat den Hochpunkt $H(x_0 \mid f(x_0))$.
VZW von − nach + in x_0: K hat den Tiefpunkt $T(x_0 \mid f(x_0))$.
2. Möglichkeit durch **Einsetzen** von x_0 in $f''(x)$.
$f''(x_0) < 0$: f besitzt in x_0 ein lokales (relatives) Maximum; $H(x_0 \mid f(x_0))$
$f''(x_0) > 0$: f besitzt in x_0 ein lokales (relatives) Minimum; $T(x_0 \mid f(x_0))$

Wendepunkte

Notwendige Bedingung: $f''(x_1) = 0$

Nachweis: 1. Möglichkeit durch **Vorzeichenuntersuchung** von $f''(x)$.
Wechselt $f''(x)$ das Vorzeichen an der Stelle x_1, so hat K von f den Wendepunkt $W(x_1 \mid f(x_1))$.
2. Möglichkeit durch **Einsetzen** von x_1 in $f'''(x)$.
Ist $f'''(x_1) \neq 0$, so hat K von f den Wendepunkt $W(x_1 \mid f(x_1))$.

Hinweis: Bedeutung der folgenden Bedingungen für das Schaubild von f.

- $f(x) = 0$ liefert die Nullstellen von f.
  $f'(x) = 0$ liefert die Stellen mit waagrechter Tangente.
  $f''(x) = 0$ liefert die möglichen Wendestellen.
- $f(x) > 0$: Das Schaubild von f verläuft oberhalb der x-Achse.
  $f'(x) > 0$: Das Schaubild von f ist (streng) monoton wachsend.
  $f''(x) > 0$: Das Schaubild von f ist eine Linkskurve.

Aufgaben

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{16}x^2(x^2 - 24)$; $x \in \mathbb{R}$, mit Schaubild K.

a) Geben Sie die Nullstellen von f an. Skizzieren Sie K.

b) Bestimmen Sie die Monotoniebereiche.

c) K hat zwei Wendepunkte.
Auf welcher Geraden liegen diese zwei Wendepunkte?

2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}e^{2x} - x + 2$; $x \in \mathbb{R}$, mit Schaubild K.

a) In welchem Quadranten liegt der Extrempunkt von K?

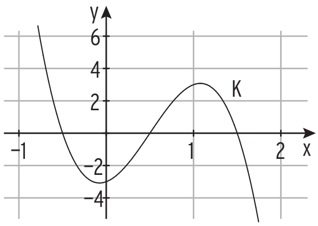
b) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K.

c) Zeichnen Sie K und seine Asymptote in ein Koordinatensystem ein.

3 K ist das Schaubild der Funktion f mit
$f(x) = -8x^3 + 12x^2 + 2x - 3$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: $-0{,}5$; $0{,}5$ und $1{,}5$ sind die Nullstellen von f.
Zerlegen Sie f(x) in Linearfaktoren.

b) Zeigen Sie: Die Wendetangente an K bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck mit dem Inhalt $A = 1$.



4 K_f ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Der Hochpunkt von K_f liegt in $H\left(-1 \middle| \frac{5}{3}\right)$.
Geben Sie Tief- und Wendepunkt von K_f ohne weitere Rechnung an. Begründen Sie.

b) Die Gerade n schneidet die Kurve K_f im Wendepunkt senkrecht.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von n und K_f.

5 Das Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades ist nach oben geöffnet und hat mit der x-Achse nur den Punkt P(3 | 0) gemeinsam. Füllen Sie die Tabelle aus.

x	f(x)	f′(x)	f″(x)
3			

6 Machen Sie Aussagen über das Schaubild der Funktion f, wenn gilt: $f'(x) = x^2(x - 3)$.

7 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{\pi}{2} - \sin(x)$; $x \in [-4; 4]$ mit Schaubild K.

a) Zeigen Sie: Das Schaubild K von f hat keine gemeinsamen Punkte mit der x-Achse.

b) Die Differenz der y-Werte von Hoch- und Tiefpunkt beträgt 2.
Überprüfen Sie diese Behauptung rechnerisch.

8 K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = e^{0{,}5x-1} - 0{,}5x$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: Der Extrempunkt liegt auf der x-Achse.
Begründen Sie, warum K keinen Wendepunkt besitzt.

b) Im Kurvenpunkt P verläuft die Tangente an K parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = 2x + 3$. Bestimmen Sie P.

9 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (2 - 0{,}5x)\,e^{x-1}$; $x \in \mathbb{R}$, mit Schaubild K.

a) Geben Sie drei Eigenschaften von K an.

b) g ist die Tangente an K im Schnittpunkt mit der y-Achse. h verläuft parallel zur y-Achse durch den Hochpunkt von K. g und h schneiden sich in S.
Berechnen Sie die Koordinaten von S.

10 Eine Polynomfunktion h hat folgende Eigenschaften:

(1) $h(0) = 2$ (2) $h'(x) = 0$ für $x = -4$ und für $x = 2$
(3) $h'(x) \geq 0$ für $x \leq 2$ (4) $h''(x) > 0$ für $-4 < x < 0$

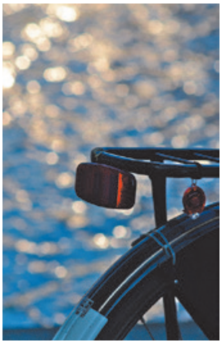
Welche Bedeutung hat jede einzelne Eigenschaft für das Schaubild von h?
Skizzieren Sie ein mögliches Schaubild von h.

11 Eine Firma produziert eine neue PlayStation. Marktanalysen haben ergeben, dass die wöchentlichen Verkaufszahlen durch die Funktion f mit $f(t) = 1000\,t\,e^{-0{,}1t}$; $t \in \mathbb{R}_+^*$ modellhaft beschrieben werden können.
(t in Wochen nach Verkaufsbeginn;
f(t) in Stück pro Woche.)

a) Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion f.
Wie viel Geräte werden höchstens pro Woche verkauft?
Wie entwickeln sich die Verkaufszahlen langfristig?

b) In welcher Woche nach Verkaufsbeginn nimmt die Verkaufszahl am stärksten ab?

12 Komfortable Fahrradbeleuchtungen enthalten einen Kondensator. Die Entladung dieses Kondensators kann beschrieben werden durch die Funktion I mit $I(t) = 5 \cdot e^{-0{,}08t}$; $t \geq 0$.
Dabei bedeutet I(t) die Stromstärke in Milliampere zur Zeit t in Minuten.
Ein Ingenieur behauptet, dass sich die Stromstärkenabnahme pro Minute in den ersten 5 Minuten halbiert.
Überprüfen Sie.



3.3 Aufstellen von Kurvengleichungen aus gegebenen Bedingungen

mvurl.de/hnxe

Beispiel 1

K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = a\,x\,(x-1)(x-3)$; $x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
Im Ursprung hat K die Steigung 6.
Bestimmen Sie a.

Lösung

$f(x) = a\,x\,(x-1)(x-3) = a\,(x^3 - 4x^2 + 3x)$

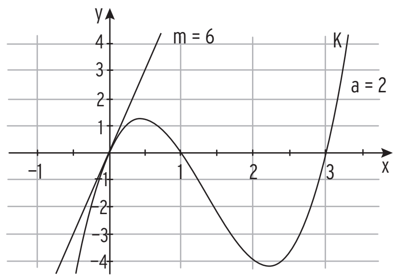
Ableitung von f: $f'(x) = a\,(3x^2 - 8x + 3)$

K hat an der Stelle 0 die Steigung 6:

$f'(0) = 6$

$a \cdot 3 = 6$

$a = 2$



Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2$; $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f hat den Wendepunkt W(1|8).
Bestimmen Sie den Funktionsterm f(x).

Lösung

Ableitungen von f: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$; $f''(x) = 6ax + 2b$

Eigenschaft	Bedingung	Gleichung
W ist ein Kurvenpunkt	$f(1) = 8$	$a + b = 8$
W ist ein Wendepunkt	$f''(1) = 0$	$6a + 2b = 0$

Die zwei Bedingungen führen auf ein lineares Gleichungssystem (LGS) für a und b.

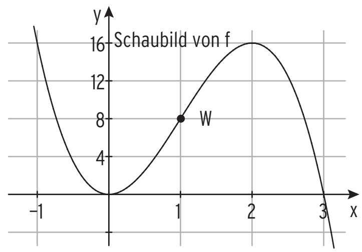
$$\begin{array}{rcll} a + b & = & 8 & \mid \cdot (-2) \\ 6a + 2b & = & 0 & + \\ \hline 4a & = & -16 & \end{array}$$

Das Additionsverfahren ergibt: $4a = -16$

Ergebnis für a: $a = -4$

Einsetzen von $a = -4$ in die Gleichung $a + b = 8$ führt auf $b = 12$.

Ergebnis: $f(x) = -4x^3 + 12x^2$



Beispiel 3

Das Schaubild K einer Polynomfunktion 4. Grades ist symmetrisch zur y-Achse und hat in $x_0 = 2$ eine waagrechte Tangente.
Die Gerade g mit $y = 6x + 7{,}5$ berührt K in $x_1 = -1$.
Bestimmen Sie den Funktionsterm.

Lösung

Ansatz: Das Schaubild ist symmetrisch zur y-Achse: $\mathbf{f(x) = a x^4 + c x^2 + e}$

Die 3 Unbekannten a, c und e sind zu bestimmen.

Ableitung: $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$

Der Berührpunkt B(−1|...) liegt auf g: $y = 6 \cdot (-1) + 7{,}5 = 1{,}5$

Berührpunkt: $B(-1|1{,}5)$

Die Tangente bzw. die Kurve hat in $x_1 = -1$ die Steigung 6.

Eigenschaft	Bedingung	Gleichung	Vereinfachung
waagrechte Tangente in $x_0 = 2$	$f'(2) = 0$	$32a + 4c = 0 \quad \vert :4$	$8a + c = 0$
Steigung in $x_1 = -1$ ist 6	$f'(-1) = 6$	$-4a - 2c = 6 \quad \vert :2$	$-2a - c = 3$
Berührpunkt $B(-1\vert 1{,}5)$	$f(-1) = 1{,}5$	$a + c + e = 1{,}5$	$a + c + e = 1{,}5$

Die ersten beiden Bedingungen führen auf ein (2; 2)-LGS für a und c:

$$8a + c = 0$$
$$-2a - c = 3 \quad +$$

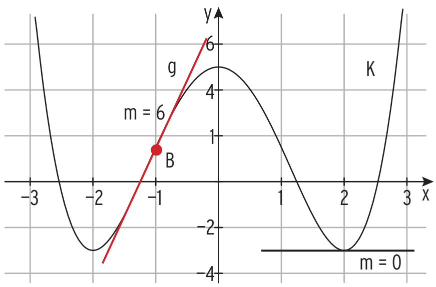
Addition: $6a = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Einsetzen von $a = \frac{1}{2}$ in z, B. $8a + c = 0$: $8 \cdot \frac{1}{2} + c = 0 \Rightarrow c = -4$

Einsetzen von $a = \frac{1}{2}$ und $c = -4$ in $a + c + e = 1{,}5$: $\frac{1}{2} - 4 + e = 1{,}5 \Rightarrow e = 5$

Funktionsterm: $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 5$

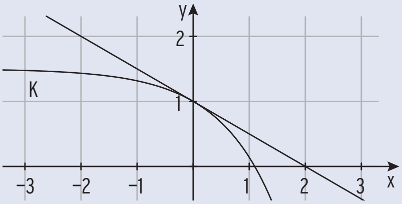
Schaubild:



Allgemeiner Ansatz	**Vereinfachter Ansatz bei Symmetrie**
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$f(x) = ax^3 + cx$ (zum Ursprung)
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ (zur y-Achse)

Beispiel 4

K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = a e^x + b;\ x \in \mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie a und b und geben Sie den Funktionsterm f(x) an.



Lösung

Man kann ablesen: Die Tangente an K im $S_y(0\,|\,1)$ hat die Gleichung $y = -0{,}5x + 1$.

Ableitung von f: $f'(x) = ae^x$

Steigung der Kurve an der Stelle 0 ist gleich der Tangentensteigung $f'(0) = -0{,}5$, damit ist $a = -0{,}5$.

Die Tangente berührt K im Schnittpunkt von K mit der y-Achse.

S_y liegt auf K, Punktprobe ergibt: $1 = a + b$

Einsetzen von $a = -0{,}5$ in $1 = a + b$ liefert b: $b = 1{,}5$

Ergebnis: $a = -0{,}5;\ b = 1{,}5$

Funktionsterm: $f(x) = -0{,}5e^x + 1{,}5$

Beispiel 5

K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = a\sin(bx);\ x \in \mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{R}^*$.
Die Funktion f hat die Periode 2. K hat im Ursprung die Steigung 5.
Bestimmen Sie den Funktionsterm.

Lösung

Periode $p = 2$: $b = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Funktionsterm: $f(x) = a\sin(\pi x)$

Ableitung: $f'(x) = \pi \cdot a\cos(\pi x)$

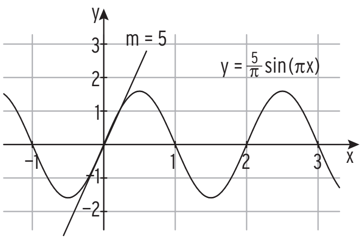
Steigung im Ursprung ist 5: $f'(0) = 5$

$\pi \cdot a = 5$

$a = \frac{5}{\pi}$

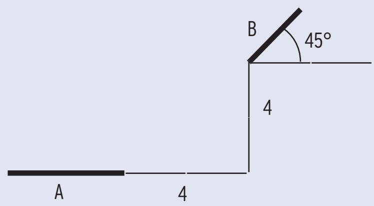
Funktionsterm:

$f(x) = \frac{5}{\pi}\sin(\pi x)$



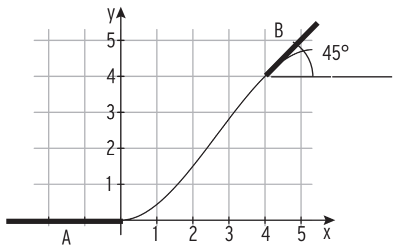
Beispiel 6

➡ Zwei Wege A und B sollen ohne Knick (optimal) verbunden werden.
Bestimmen Sie den Term einer Funktion, die den Wegverlauf beschreibt.



Lösung

Koordinatenursprung: Endpunkt der Strecke A
f ist z. B. eine Polynomfunktion 3. Grades.



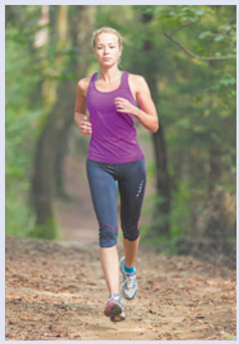
Ansatz: $f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$
$f'(x) = 3 a x^2 + 2 b x + c$
Steigungswinkel $\alpha = 45°$ entspricht $m = 1$.
Die Bedingungen:
$f(0) = 0$; $f'(0) = 0$ führen auf $c = 0$; $d = 0$.

$f(4) = 4$; $f'(4) = 1$ führen auf das LGS:
$$64 a + 16 b = 4$$
$$48 a + 8 b = 1$$

Lösung des Gleichungssystems: $a = -\frac{1}{16}$; $b = \frac{1}{2}$ und damit ergibt sich $f(x) = -\frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{2}x^2$.

Beispiel 7

➡ Anna ist eine Läuferin. Zum Laufen benötigt ihr Körper Energie. Der Körper gewinnt Energie z. B. durch die sogenannte anaerobe Energiegewinnung (d. h. ohne Sauerstoffverbrauch). Diese Energiegewinnung in Kilojoule pro Sekunde $\left(\frac{kJ}{s}\right)$ wird zwischen der 10. und der 100. Sekunde durch eine Funktion f mit $f(t) = a \cdot t \cdot e^{bt}$ dargestellt. Dabei gibt t die Zeit in Sekunden an. Nach 26 Sekunden hat die anaerobe Energiegewinnung mit $2{,}5\,\frac{kJ}{s}$ ihren größten Wert.
Bestimmen Sie a und b.



Lösung

Ableitung mit der Produkt- und Kettenregel: $f'(t) = a e^{bt} + a \cdot t \cdot b e^{bt} = a(1 + b t) e^{bt}$
Extrempunkt in $t = 26$: $f'(26) = 0$ — $a(1 + 26 b) e^{26 b} = 0$
Mit $a \neq 0$ und $e^{26 b} \neq 0$: $1 + 26 b = 0$
$b = -\frac{1}{26} = -0{,}0385$
Funktionsterm: $f(t) = a t e^{-\frac{1}{26}t}$
Kurvenpunkt $P(26 | 2{,}5)$: $f(26) = 2{,}5$ — $2{,}5 = a \cdot 26 e^{-1}$
$a = 0{,}2614$

Ergebnis: $a = 0{,}2614$ und $b = -0{,}0385$

Was man wissen sollte – über das Aufstellen von Kurvengleichungen aus gegebenen Bedingungen

Häufig auftretende **Formulierungen** und die entsprechenden **Bedingungen** beim Aufstellen von Kurvengleichungen. K ist das Schaubild von f; G ist das Schaubild von g.

Formulierung in der Aufgabe	**Bedingungen**
• K verläuft durch P(**u**|v).	**$f(u) = v$**
• K berührt die x-Achse in x = **u.**	**$f(u) = 0$; $f'(u) = 0$**
• K hat in x = **u** die **Steigung** 5.	**$f'(u) = 5$**
• K hat in P(**u**|v) eine Tangente mit Steigung −2.	**$f(u) = v$; $f'(u) = -2$**
• K hat den **Extrempunkt** T(**u**|v).	**$f(u) = v$; $f'(u) = 0$**
• K hat den **Wendepunkt** W(**u**|v).	**$f(u) = v$; $f''(u) = 0$**
• Die Tangente im Wendepunkt W(**u**|v) hat die Steigung 0,5.	**$f(u) = v$; $f''(u) = 0$; $f'(u) = 0{,}5$**
• W(**u**|v) ist **Sattelpunkt.** (W ist Wendepunkt mit waagrechter Tangente.)	**$f(u) = v$; $f''(u) = 0$; $f'(u) = 0$**
• K und G **berühren sich** in x = **u.**	**$f(u) = g(u)$; $f'(u) = g'(u)$**
• K und G schneiden sich in P(**u**|v) **senkrecht.**	**$f(u) = g(u)$; $f'(u) \cdot g'(u) = -1$**

Aufgaben

1 Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades hat in W(1|3) einen Wendepunkt und in T(3|1) einen Tiefpunkt. Geben Sie die Bedingungen für f(x) an und stellen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem auf.

2 Die Wertetabelle gehört zu einer Polynomfunktion f 4. Grades.

x	−2	−1	0	1	2	3	4
f(x)	2,5	0	−1,5	−8	−13,5	0	62,5
f′(x)	−8	0	−4	−8	0	32	100
f″(x)	18	0	−6	0	18	48	90

a) Welche Aussagen können Sie mithilfe der Tabelle über Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte des Schaubildes von f machen?
Begründen Sie Ihre Aussagen.

b) Geben Sie die Gleichung der Tangente an K an der Stelle 1 an.

3 Zu der Polynomfunktion f 3. Grades gehört die nebenstehende Tabelle.
Bestimmen Sie den Funktionsterm f(x).
Vervollständigen Sie die Tabelle.

x	−1	0	2
f(x)		0	
f′(x)	3		6
f″(x)		0	

4 K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + \frac{9}{2}x$.
K hat an den Stellen 1 und 3 je eine waagrechte Tangente.
Bestimmen Sie den zugehörigen Funktionsterm.
Welche Bedeutung hat der Punkt $A(2|1)$?

5 Eine Polynomfunktion 3. Grades hat die Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -3$.
Ihr Schaubild hat im Ursprung die Steigung 12.
Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$.

6 Das Schaubild K einer Polynomfunktion 4. Grades hat in $E(-1|2)$ einen Extrempunkt.
An der Stelle 1 hat K eine waagrechte Tangente, an der Stelle 0 eine Tangente mit der Gleichung $y = 3x + 5$.
Geben Sie ein LGS zur Bestimmung des zugehörigen Funktionsterms an.

7 Das Schaubild einer trigonometrischen Funktion mit der Periode $p = \pi$ hat den Hochpunkt $H(3|5)$.
Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm.

8 Eine trigonometrische Funktion hat die Periode $p = 4$. Das zugehörige Schaubild hat im Schnittpunkt mit der y-Achse eine Wendetangente mit der Gleichung $y = 2x + 3$.
Geben Sie einen Funktionsterm an.

9 Gegeben ist die 2. Ableitung der Funktion f durch $f''(x) = 6x + b$; $b \in \mathbb{R}$.
Die Wendetangente hat die Gleichung $y = 4x - 8$. Diese berührt das Schaubild von f auf der x-Achse. Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$.

10 Der Graph einer Polynomfunktion 5. Grades verläuft symmetrisch zum Ursprung.
f erfüllt die Bedingungen $f(-1) = 1$, $f''(-1) = 0$ und $f'(-1) = 3$.
Was bedeuten diese Bedingungen?

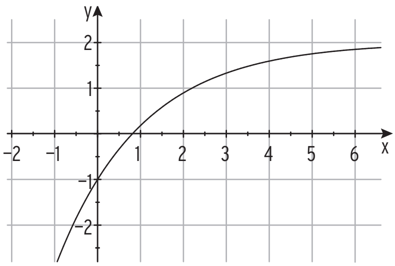
11 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = ax^4 + bx^2 + 2$; $a \neq 0$ mit Schaubild K.
a) Zeigen Sie: K ist symmetrisch zur y-Achse.
b) Die Tangente an K in $P(2|0)$ hat die Steigung 4.
Bestimmen Sie a und b.

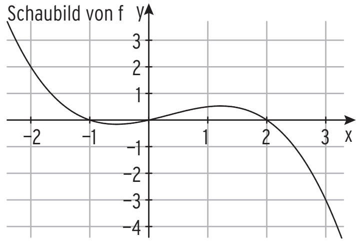
12 Eine Polynomfunktion 3. Grades hat einen Extrempunkt in $A(2|0)$.
Geben Sie für drei verschiedenartige Funktionen jeweils einen Funktionsterm an.

13 Der Graph einer Polynomfunktion f 3. Grades berührt die x-Achse an der Stelle 1 und schneidet die x-Achse an der Stelle -2.
Geben Sie für drei verschiedene Funktionen, die die gegebenen Bedingungen erfüllen, den Funktionsterm an.

14 Das Schaubild K von f mit $f(x) = (ax + b)e^x$; $x \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ berührt die Gerade mit $y = e$ an der Stelle 1. Bestimmen Sie den Funktionsterm.

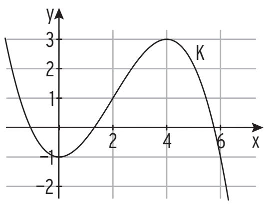
15 Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Exponentialfunktion. Diese kann durch einen der folgenden Funktionsterme beschrieben werden:
$g_1(x) = a - b\,e^{-0{,}5x}$
$g_2(x) = ax - b\,e^{-0{,}5x}$
$g_3(x) = a - b\,e^{0{,}5x}$
Begründen Sie, welche Terme zur Beschreibung ungeeignet sind. Ermitteln Sie für den geeigneten Funktionsterm Werte für a und b.

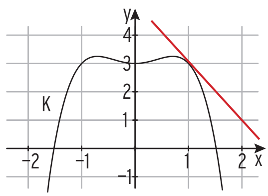


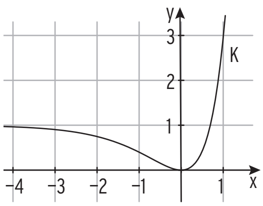


16 Die gezeichnete Kurve ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = a\,x\,(x - x_1)(x - x_2)$; $x \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie a, x_1 und x_2 mithilfe der Zeichnung.

17 K ist das Schaubild einer Funktion f.
Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm aus der Abbildung.

a)


b)


c)


18 In eine Tasse Tee wird 90 °C heißer Tee eingeschenkt.
Der Tee kühlt auf die Zimmertemperatur von 20°C ab.
Die Funktion h mit $h(t) = a + be^{-0{,}2t}$ beschreibt diesen Abkühlvorgang.
Dabei ist t die Zeit in Minuten und h(t) die Temperatur in °C.

a) Bestimmen Sie a und b. Skizzieren Sie das Schaubild von h.
b) Berechnen Sie die Zeit, die vergeht, bis der Tee auf Trinktemperatur (50 °C) abgekühlt ist.
c) Berechnen Sie die momentane Änderungsrate der Temperatur in $t_1 = 1$ und in $t_2 = 10$. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.
d) Die Temperatur nimmt höchstens um 14 °C pro Minute ab. Überprüfen Sie diese Behauptung.

19 Der Bestand an fester Holzmasse h(t) zum Zeitpunkt t in einem Wald wird durch die Funktion h mit $h(t) = a \cdot e^{kt}$ beschrieben. Dabei wird die Zeit t in Jahren und der Bestand h(t) in m^3 gemessen. Zu Beginn des Jahres 2016 (t = 0) beträgt der Bestand $10^5\,m^3$, die momentane Änderungsrate liegt bei $2500\,m^3$/Jahr. Bestimmen Sie a und k.

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

1 Untersuchen Sie das Schaubild der Funktion f auf Hoch- und Tiefpunkte.

a) $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 3;\ x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = (x - 3)e^x;\ x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \sin(\pi x - 2);\ \ x \in \,]-0{,}5;\ 2{,}5[$

d) $f(x) = e^{2x} - e^x;\ x \in \mathbb{R}$

2 Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1;\ x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 + 3;\ x \in \mathbb{R}$

3 Machen Sie eine Aussage über das Krümmungsverhalten des Graphen K von f. Skizzieren Sie K.

a) $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x^3;\ x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = \cos(2x) + 1;\ \ x \in \,]-2;\ 2[$

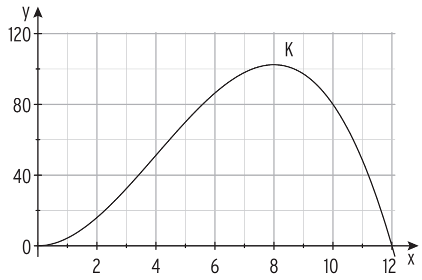
4 Die Abbildung zeigt das Schaubild K einer Funktion f.
Begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(1) K hat zwei Wendepunkte.

(2) f' ist wachsend auf [4; 8].

(3) $f''(2) < f''(8)$

(4) Die maximale momentane Änderungsrate von f liegt bei 8.



5 Das Schaubild einer Polynomfunktion 3. Grades ist symmetrisch zum Ursprung und hat den Extrempunkt $E(2\,|\,8)$.
Bestimmen Sie den zugehörigen Funktionsterm.

6 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x;\ \ x \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie: f ist monoton fallend für $-2 \leq x \leq 1$.

4.4 Flächeninhaltsberechnung mithilfe der Integralrechnung

4.4.1 Fläche zwischen Kurve und x-Achse

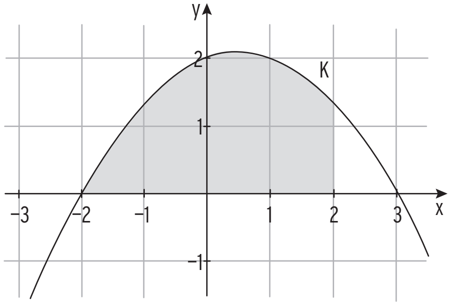
Beispiele

K: $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + 2x\right]_{-2}^{2}$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{56}{9}$$

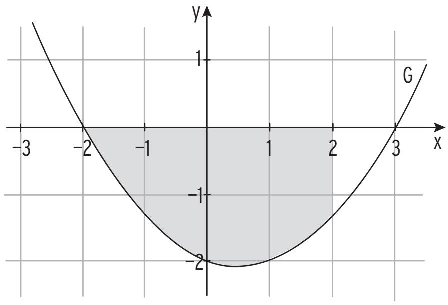
Die Fläche zwischen Kurve und x-Achse liegt **oberhalb** der x-Achse.
Die Fläche hat den Inhalt $\frac{56}{9}$.



G: $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 2$

$$\int_{-2}^{2} g(x)\,dx = -\frac{56}{9} < 0$$

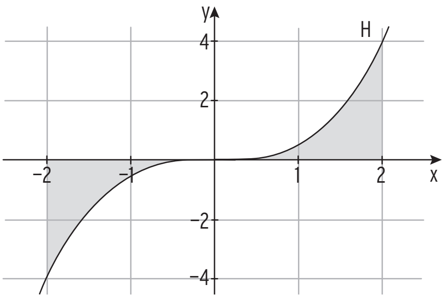
Das Integral liefert **nicht** den Inhalt der Fläche.
Die Fläche zwischen Kurve und x-Achse liegt **unterhalb** der x-Achse.
Die Fläche hat den Inhalt $\frac{56}{9}$.
(G entsteht aus K durch Spiegelung an der x-Achse.)



H: $h(x) = 0{,}5\,x^3$

$$\int_{-2}^{2} h(x)\,dx = \left[\frac{1}{8}x^4\right]_{-2}^{2} = 0$$

Das Integral liefert **nicht** den Inhalt der Fläche.
Die Fläche zwischen Kurve und x-Achse liegt **unterhalb** und **oberhalb** der x-Achse.
Wegen $\int_{0}^{2} h(x)\,dx = 2$ und der Symmetrie von H zu O hat die Fläche den Inhalt $2 \cdot 2 = 4$.



Man stellt fest:
Der Graph K der Funktion f verläuft **nicht unterhalb der x-Achse.**
Dann liefert das zugehörige Integral den Inhalt der Fläche zwischen K und der x-Achse.

Die Fläche liegt oberhalb der x-Achse

Beispiel

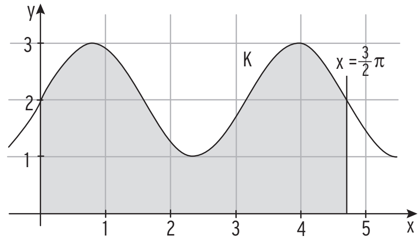
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(2x) + 2;\ x \in \mathbb{R}$ mit Schaubild K.
K schließt mit der x-Achse auf $\left[0; \frac{3}{2}\pi\right]$ eine Fläche ein. Berechnen Sie den Inhalt.

Lösung

K von f verläuft wegen $\sin(2x) \geq -1$ oberhalb der x-Achse: $f(x) > 0$

$$\int_0^{1{,}5\pi} (\sin(2x) + 2)\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x) + 2x\right]_0^{1{,}5\pi}$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot(-1) + 3\pi - \left(-\frac{1}{2}\cdot 1\right) = 3\pi + 1$$

Inhalt der Fläche: $A = 3\pi + 1$



Verläuft K von f für alle $x \in [a; b]$ **oberhalb der x-Achse**, so liefert das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ die Maßzahl für den **Flächeninhalt zwischen K, der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$:** $A = \int_a^b f(x)\,dx$

Die Fläche liegt unterhalb der x-Achse

Beispiel

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x;\ x \in \mathbb{R}$, die Koordinatenachsen und die Gerade mit $x = 1$ begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Lösung

Nullstellen von f: $f(x) = 0$ $\quad \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^x(e^x - 4) = 0$

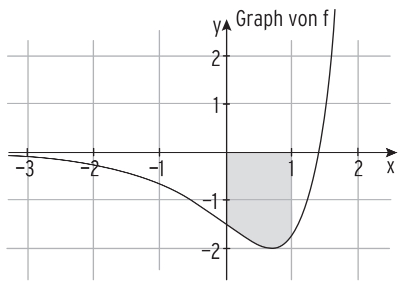
Satz vom Nullprodukt ergibt wegen $e^x \neq 0$: $\quad x = \ln(4) > 1$

f hat keine Nullstelle auf [0; 1].

Berechnung des Flächeninhalts:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{4}e^{2x} - 2e^x\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{4}e^2 - 2e - \left(\frac{1}{4} - 2\right) \approx -1{,}84$$

Die Fläche hat den Inhalt $A = |-1{,}84| = 1{,}84$.



Verläuft K von f für alle $x \in [a; b]$ **unterhalb der x-Achse,** liefert $\int_a^b f(x)\,dx$ **eine negative Zahl.** Der **Inhalt der Fläche** zwischen Kurve, x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$ ist der **Betrag** dieser Zahl: $A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$

Die Funktion f hat eine Nullstelle im Integrationsintervall

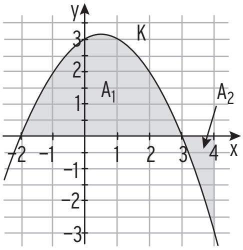
Beispiel 1

K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$.
Wie groß ist die Fläche, die von K und der x-Achse auf $[-2;\ 4]$ begrenzt wird?

Lösung

Nullstelle von f: $f(x) = 0$ ergibt $x_1 = -2;\ x_2 = 3$

f hat 2 einfache Nullstellen auf dem Integrationsintervall $[-2;\ 4]$.



Das Integral $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = 9$ **liefert nicht den Inhalt der Fläche.**

Der gesuchte Inhalt muss also **in zwei Schritten** berechnet werden:

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 3x\right]_{-2}^{3} = 10{,}42$$

$A_1 = 10{,}42$; die zugehörige Fläche liegt **oberhalb der x-Achse.**

$\int_{3}^{4} f(x)\,dx = -1{,}42 < 0$; $A_2 = 1{,}42$; die zugehörige Fläche liegt **unterhalb der x-Achse.**

$A_{ges} = A_1 + A_2 = 10{,}42 + 1{,}42 = 11{,}84$

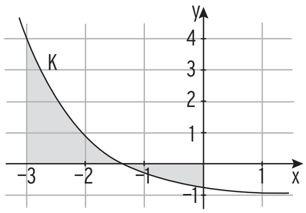
Beispiel 2

Der Graph von f mit $f(x) = 0{,}25\,e^{-x} - 1$ begrenzt mit der x-Achse und den Geraden mit $x = -3$ und $x = 0$ eine Fläche. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Lösung

Nullstelle von f: $f(x) = 0 \quad 0{,}25\,e^{-x} - 1 = 0$

$x = -\ln(4)$



Stammfunktion von f: $F(x) = -0{,}25\,e^{-x} - x$

Da f auf $[-3;\ 0]$, in $x = -\ln(4)$, das Vorzeichen wechselt, muss der Inhalt in zwei Schritten berechnet werden:

- $\int_{-3}^{-\ln(4)} f(x)\,dx = 2{,}41$
- $\int_{-\ln(4)}^{0} f(x)\,dx = -0{,}64$

$A_{ges} = 2{,}41 + 0{,}64 = 3{,}05$. Der Inhalt der Gesamtfläche beträgt etwa 3,05.

Hinweis: $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx = \int_{-3}^{-\ln(4)} f(x)\,dx + \int_{-\ln(4)}^{0} f(x)\,dx = 2{,}41 + (-0{,}64) = 1{,}77$

Das Integral $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx = 1{,}77$ liefert nicht den gesuchten Inhalt, sondern den Wert der **Flächenbilanz.**

Dieser Wert entspricht dem Wert des **orientierten Flächeninhalts.**

Der Inhalt der Fläche oberhalb der x-Achse ist 1,77 größer als der Inhalt der Fläche unterhalb der x-Achse.

Beispiel 3

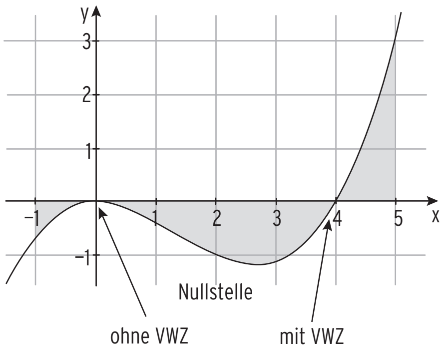
K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2$; $x \in \mathbb{R}$.
Wie groß ist die Fläche, die von K und der x-Achse auf $[-1; 5]$ begrenzt wird?

mvurl.de/azu1

Lösung

Nullstelle von f: $f(x) = 0$ $x_{1/2} = 0$; $x_3 = 4$
f hat auf dem Integrationsintervall $[-1; 5]$ eine Nullstelle ohne VZW ($x_{1|2} = 0$) und eine Nullstelle mit VZW ($x_3 = 4$).

Das Integral $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = -1{,}5$ liefert nicht den Inhalt der Fläche.



Flächeninhaltsberechnung:

- $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = -2{,}86$
- $\int_{4}^{5} f(x)\,dx = 1{,}36$

Gesamtinhalt: $A_{ges} = 2{,}86 + 1{,}36 = 4{,}22$

Bemerkung: Bei der Flächeninhaltsberechnung darf man **über eine doppelte Nullstelle** (Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel) hinweg integrieren.

Hinweis: $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = \int_{-1}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{5} f(x)\,dx = -2{,}86 + 1{,}36 = -1{,}50$

$-1{,}50$ ist der Wert der **Flächenbilanz**, bzw. des **orientierten Flächeninhalts.**
Der Inhalt der Fläche unterhalb der x-Achse ist um 1,5 größer als der Inhalt der Fläche oberhalb der x-Achse.

Berechnung des Inhalts der Fläche zwischen dem Graph von f und der x-Achse auf [a; b]

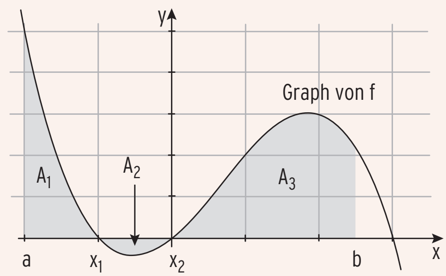
1) Berechnung der Nullstellen von f auf [a; b]: $f(x) = 0$ liefert $x_1, x_2, \ldots$

2) Berechnung der Integrale $\int_{a}^{x_1} f(x)\,dx$

$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$

$\int_{x_2}^{b} f(x)\,dx$

3) Addition der Beträge der Integralwerte ergibt den gesamten Flächeninhalt:
$A = A_1 + A_2 + A_3$



Aufgaben

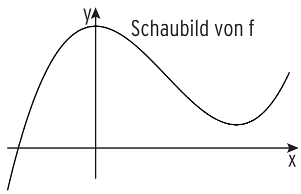
1 Gegeben ist die Funktion f mit $x \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie das Schaubild von f. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f und damit den Inhalt der Gesamtfläche, die vom Graph von f und der x-Achse eingeschlossen wird.

a) $f(x) = (x-2)(x+1)$ b) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2$ c) $f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + 2x^3 - 3x^2$

2 Gegeben ist die Funktion f. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graph von f und der x-Achse über dem Intervall $[a; b]$. f hat keine Nullstelle in $[a; b]$.

a) $f(x) = \cos(x) + 2;\ [-\pi; 1]$ b) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5;\ [-1; 0]$

3 K ist das Schaubild der Funktion f mit
$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5;\ x \in \mathbb{R}$.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von K, den Koordinatenachsen und der Parallelen zur y-Achse durch den Tiefpunkt eingeschlossen wird.



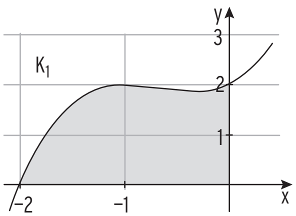
4 Die Funktion f mit $f(x) = 3 - 0{,}5e^{-x};\ x \in \mathbb{R}$, hat das Schaubild K.
K und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt exakt.

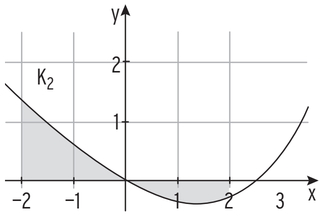
5 Interpretieren Sie das Ergebnis von $\int_{-1}^{3} (-x+1)\,dx$.

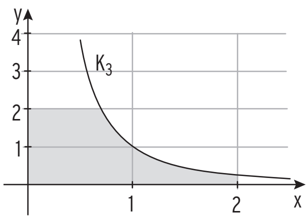
6 Zeigen Sie: $\int_{0}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{6}(x-1)\right)dx = \frac{3}{\pi}$

7 Bestimmen Sie den Inhalt der gefärbten Fläche.

K_1: $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$; K_2: $f(x) = -x + e^{0{,}5x} - 1$; K_3: $f(x) = \frac{1}{x^2}$



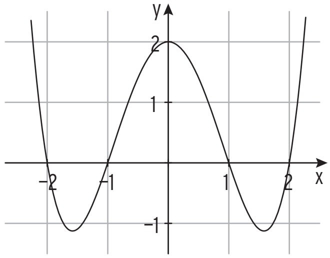




8 Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x(x^2 - 6x + 8);\ x \in \mathbb{R}$, schließt mit der x-Achse zwei Flächenstücke ein. Zeigen Sie: Die Flächenstücke sind inhaltsgleich.

9 Nehmen Sie Stellung: $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 0$.
Welche Aussagen lassen sich über den Graphen von f machen?

10 Die Abbildung zeigt den Graph der Funktion f.
Wählen Sie aus {0,73; −1; 2,53; −1,067; 6,62; 1,27} für jedes Integral einen geeigneten Integralwert aus:
$\int_0^1 f(x)\,dx$, $\int_2^1 f(x)\,dx$, $\int_2^{-2} f(x)\,dx$
Begründen Sie Ihre Wahl.



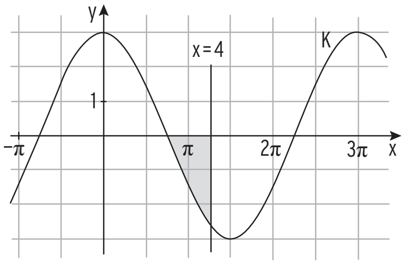
11 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(x - 1)$. Das Schaubild von f schließt mit der x-Achse auf dem Intervall [0; 4] eine Fläche ein. Bestimmen Sie a so, dass die Fläche den Inhalt 10 hat.

12 K ist der Graph von f mit $f(x) = 3\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$; $x \in \mathbb{R}$.

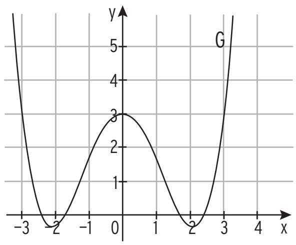
a) K und die x-Achse begrenzen auf $[0; 3\pi]$ drei Flächenstücke.
Bestimmen Sie den Inhalt der Gesamtfläche.

b) Berechnen Sie den Inhalt der gefärbten Fläche.
Formulieren Sie einen geeigneten Aufgabentext.

c) Bestimmen Sie ohne Rechnung: $\int_{-\pi}^{2\pi} f(x)\,dx$.



13 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 3$; $x \in \mathbb{R}$, mit Graph G (s. Abb.).
Der Graph G und die x-Achse schließen im I. und II. Quadranten eine Fläche vollständig ein (1 LE ≙ 1 m). Diese Fläche A beschreibt modellhaft die Querschnittsfläche eines Lärmschutzwalls. Zum Aufschütten des Lärmschutzwalls stehen 1870 m^3 Material zur Verfügung. Berechnen Sie, wie viel Meter des Walls damit aufgeschüttet werden können.



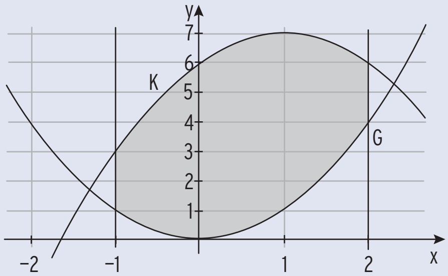
14 Der symmetrische, acht Meter breite und vier Meter hohe Giebel eines Berliner Altbaus muss instandgesetzt werden. Auf dem Foto sehen Sie ein derartiges Haus.
Der Giebelrand wird beschreiben durch die Funktion f mit
$f(x) = \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4$; $x \in [-4; 4]$.

Für die Fassadenfarbe gibt der Hersteller eine Ergiebigkeit von 350 cm^3 Farbe pro m^2 an. Berechnen Sie, wie viele Dosen Farbe für einen zweimaligen Anstrich des Giebels mindestens geliefert werden müssen, wenn es 2-, 4- und 5-Liter-Dosen gibt.

4.4.2 Fläche zwischen zwei Kurven

Beispiel 1

K ist der Graph von f mit
$f(x) = -x^2 + 2x + 6$
und G ist der Graph von g mit $g(x) = x^2$.
K und G umschließen die markierte Fläche.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.



Lösung

K verläuft oberhalb der x-Achse.

Inhalt der Fläche zwischen der Kurve K und der x-Achse in den Grenzen

$x = -1$ und $x = 2$: $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 6x\right]_{-1}^{2} = 18$

$A_1 = 18$

G verläuft oberhalb der x-Achse.

Inhalt der Fläche zwischen der Kurve G, der x-Achse und den Geraden mit $x = -1$ und

$x = 2$: $\int\limits_{-1}^{2} g(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = 3$

$A_2 = 3$

$f(x) \geq g(x)$ für $-1 \leq x \leq 2$; K verläuft oberhalb von G für $-1 \leq x \leq 2$.

Inhalt der Fläche zwischen K und G: $A = A_1 - A_2 = 18 - 3 = 15$

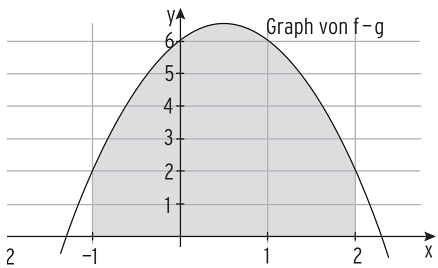
Berechnung mit einem Integral:

$$\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,dx - \int\limits_{-1}^{2} g(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{2} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

$$= \int\limits_{-1}^{2} (-x^2 + 2x + 6 - x^2)\,dx = \int\limits_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 6)\,dx$$

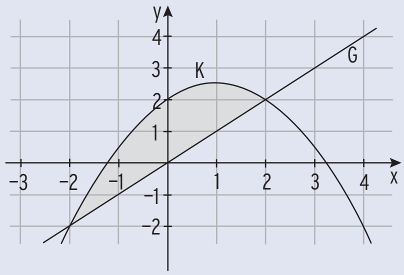
$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 6x\right]_{-1}^{2} = 15$$

Hinweis: Mit dem Integral $\int\limits_{-1}^{2} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$ wird der Inhalt der Fläche zwischen dem Schaubild der Differenzfunktion $f - g$ und der x-Achse bestimmt.



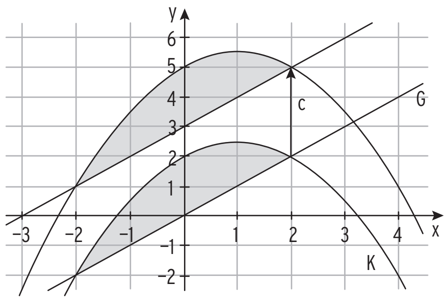
Beispiel 2

Gegeben sind die Funktionen f und g mit
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$ und $g(x) = x$; $x \in \mathbb{R}$.
Die Schaubilder K von f und G von g begrenzen eine Fläche (siehe Abbildung)
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.



Lösung

K und G schneiden sich in $x = -2$ und $x = 2$.
Nach Verschiebung um c in y-Richtung $(c > 2)$ liegt die eingeschlossene inhaltsgleiche Fläche oberhalb der x-Achse.
Der Inhalt lässt sich mithilfe der Integration über die Differenzfunktion mit $f(x) + c - (g(x) + c)$ bestimmen.



$$\int_{-2}^{2} \left(f(x) + c - (g(x) + c)\right) dx = \int_{-2}^{2} \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

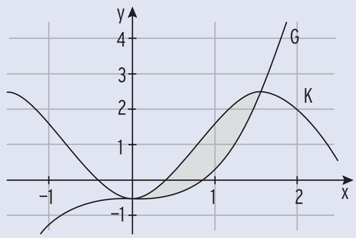
Flächeninhaltsberechnung:
Inhalt der Fläche zwischen den Kurven K und G: $\int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,dx = \int_{-2}^{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 2 - x\right) dx$

$$= \int_{-2}^{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\right) dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + 2x\right]_{-2}^{2} = \frac{16}{3}$$

Der Inhalt der Fläche zwischen K und G beträgt $\frac{16}{3}$.

Beispiel 3

Gegeben sind die Funktionen
f mit $f(x) = -1{,}5\cos(2x) + 1$; $x \in \mathbb{R}$ und
g mit $g(x) = \frac{24}{\pi^3}x^3 - \frac{1}{2}$; $x \in \mathbb{R}$, mit den Graphen K und G. Die Graphen haben die gemeinsamen Punkte $P(0|-0{,}5)$ und $H\left(\frac{\pi}{2}\middle|\frac{5}{2}\right)$ und begrenzen eine Fläche mit Inhalt A.
Zeigen Sie: $A = \frac{3}{8}\pi$.



Lösung

Integrationsgrenzen: $a = 0$; $b = \frac{\pi}{2}$

Integration über $f(x) - g(x)$: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-1{,}5\cos(2x) + 1 - \left(\frac{24}{\pi^3}x^3 - \frac{1}{2}\right)\right) dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-1{,}5\cos(2x) - \frac{24}{\pi^3}x^3 + \frac{3}{2}\right) dx = \left[-0{,}75\sin(2x) - \frac{6}{\pi^3}x^4 + \frac{3}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{3}{8}\pi + \frac{3}{4}\pi\right) - 0 = \frac{3}{8}\pi$$

Flächeninhalt: $A = \frac{3}{8}\pi$

Beispiel 4

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = (x + 2)e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$ und g mit $g(x) = (x + 1)e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$.
K ist das Schaubild von f, G ist das Schaubild von g.

a) Zeigen Sie, dass K und G keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

b) Die Schaubilder K und G, die y-Achse und die Gerade mit $x = -1{,}5$ begrenzen eine Fläche mit Inhalt A. Zeigen Sie: $A = e^{1{,}5} - 1$

Lösung

a) Schnittstellen von K und G

Bedingung: $f(x) = g(x)$

$(x + 2)e^{-x} = (x + 1)e^{-x} \quad | \cdot e^x \neq 0$

$x + 2 = x + 1$

$2 = 1$ f. A.

Damit schneiden sich K und G nicht.

b) Flächeninhaltsberechnung

Integration über $f(x) - g(x)$:

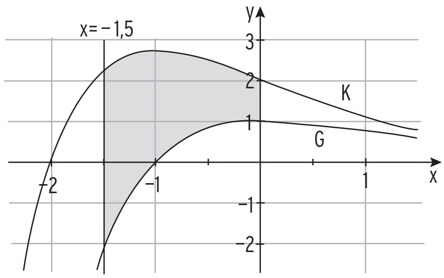
$$\int_{-1{,}5}^{0} (f(x) - g(x))\,dx$$

$$= \int_{-1{,}5}^{0} ((x + 2)e^{-x} - (x + 1)e^{-x})\,dx$$

$$= \int_{-1{,}5}^{0} e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_{-1{,}5}^{0} = -1 + e^{1{,}5} > 0$$

Flächeninhalt $A = -1 + e^{1{,}5}$

Hinweis: $\int_{-1{,}5}^{0} (g(x) - f(x))\,dx = 1 - e^{1{,}5} < 0$



Für $f(x) \geq g(x)$ auf [a; b] gilt:
Der Inhalt der **Fläche zwischen K von f und G von g** auf dem Intervall [a; b] ist

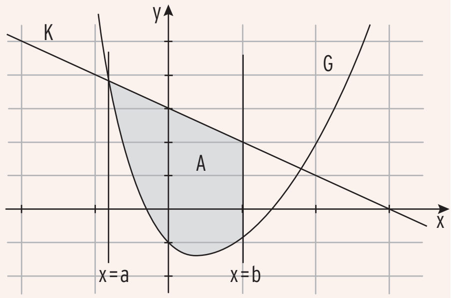
$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx,$$

unabhängig von der Lage der Kurven im Koordinatensystem.

Für $f(x) \leq g(x)$ auf [a; b] gilt:

$$A = -\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Hinweis: Die Nullstellen von f und g sind ohne Belang.



Aufgaben

1 Die Schaubilder K von f und G von g begrenzen eine Fläche.
Ermitteln Sie den Inhalt A dieser Fläche.

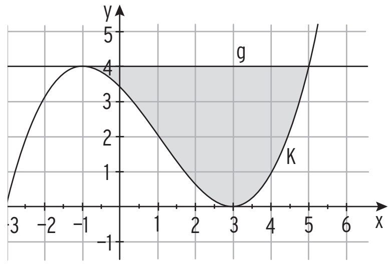
a) $f(x) = 2x - x^2$, $g(x) = x - 2$ **b)** $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = e^{-x} + x^2 - 1$

2 Gegeben ist das Schaubild K von f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$; $x \in \mathbb{R}$ und die Tangente t an K an der Stelle $-\frac{3}{2}$. K und t schneiden sich auf der x-Achse. Überpüfen Sie.
Berechnen Sie die Maßzahl der von K und t begrenzten Fläche.

3 K ist der Graph von f mit $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 9x + 27)$; $x \in \mathbb{R}$.

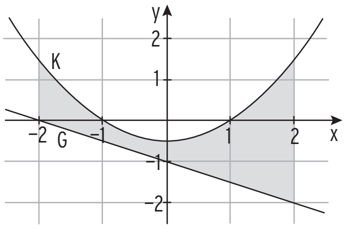
a) K und die Gerade g umschließen eine Fläche vollständig. Beschreiben Sie, wie Sie den Inhalt A_1 dieser Fläche berechnen können.
Bestimmen Sie die Maßzahl dieser Fläche.

b) K und die x-Achse begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt A_2. Zeigen Sie: $A_1 = A_2$.

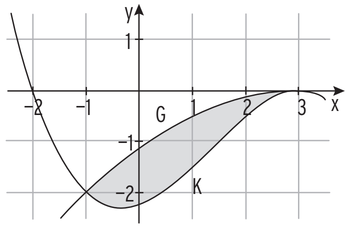


4 Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

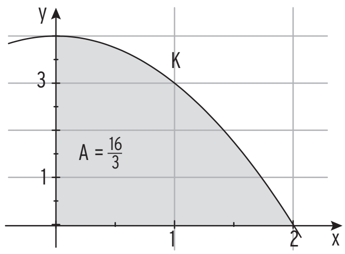
a)

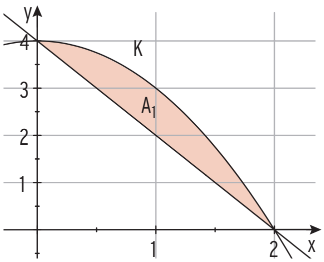


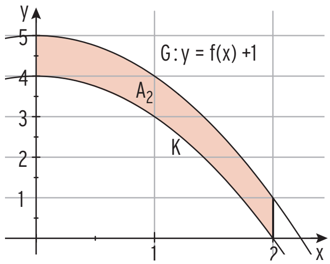
b)

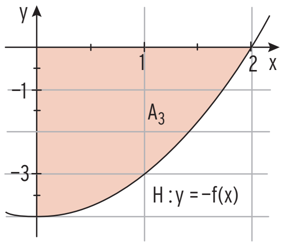


5 Für den Inhalt der grau markierten Fläche gilt $A = \frac{16}{3}$.
Bestimmen Sie mithilfe von A die Inhalte der rot markierten Flächen. K ist das Schaubild von f.
Begründen Sie Ihre Lösungen.





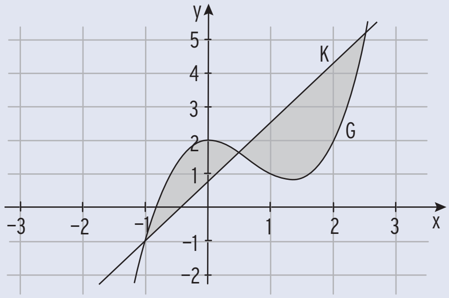




Schnittstellen im Integrationsintervall

Beispiel 1

Gegeben sind die Funktionen f und g durch $f(x) = 1{,}75x + 0{,}75$; $x \in \mathbb{R}$ und $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2$; $x \in \mathbb{R}$. Die zugehörigen Graphen K und G schließen zwei Flächenstücke ein. Gibt $\int_{-1}^{2{,}5} (f(x) - g(x))\,dx$ den Gesamtinhalt dieser Fläche an? Begründen Sie Ihre Antwort.



Lösung

Schnittstellen von K und G aus der Abbildung: $x_1 = -1$; $x_2 = 0{,}5$; $x_3 = 2{,}5$

Integration:

$$\int_{-1}^{2{,}5} (f(x) - g(x))\,dx$$

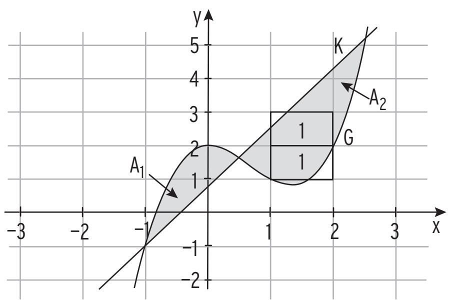
$$= \int_{-1}^{2{,}5} (-x^3 + 2x^2 + 1{,}75x - 1{,}25)\,dx$$

$$= \left[-\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{2}{3}x^3 + 0{,}875x^2 - 1{,}25x\right]_{-1}^{2{,}5}$$

$$= 1{,}79$$

Der **Vergleich mit der Abbildung** zeigt, dass der Inhalt der Gesamtfläche **größer als** 1,79 ist. Das Integral $\int_{-1}^{2{,}5} (f(x) - g(x))\,dx$ gibt **nicht** den Gesamtinhalt dieser Fläche an.

Abschätzung des Inhaltes mit Kästchen:
Wenn ein Kästchen den Inhalt 1 hat, ist der **Gesamtinhalt** größer als 2.



Da die Graphen von f und g eine Schnittstelle auf [−1; 2,5] haben, müssen die **Inhalte der Teilflächen getrennt berechnet** werden **(Integration von Schnittstelle zu Schnittstelle).**

- $\int_{-1}^{0{,}5} (f(x) - g(x))\,dx = -1{,}54$ — $A_1 = 1{,}54$
- $\int_{0{,}5}^{2{,}5} (f(x) - g(x))\,dx = 3{,}33$ — $A_2 = 3{,}33$

Inhalt der **Gesamtfläche:** $A_{ges} = A_1 + A_2 = 1{,}54 + 3{,}33 = 4{,}87$

Beispiel 2

K ist der Graph von f mit $f(x) = e^x$, G ist der Graph von g mit $g(x) = e^x - 2x + 1$; $x \in \mathbb{R}$. K und G schließen für $-1 \leq x \leq 1$ eine Fläche ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

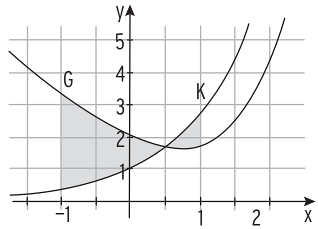
Lösung

Schnittstellen von K und G: $f(x) = g(x)$ für $2x - 1 = 0$

Schnittstelle mit VZW: $x = 0{,}5$

- $\int_{-1}^{0{,}5} (f(x) - g(x))\,dx = \int_{-1}^{0{,}5} (2x - 1)\,dx = [x^2 - x]_{-1}^{0{,}5} = -2{,}25$
- $\int_{0{,}5}^{1} (f(x) - g(x))\,dx = \int_{0{,}5}^{1} (2x - 1)\,dx = 0{,}25$

Inhalt der Fläche: $A = 2{,}25 + 0{,}25 = 2{,}5$



Beispiel 3

Der Graph K von f mit $f(x) = \sin(2x)$; $x \in \mathbb{R}$, begrenzt mit der Parallelen zur x-Achse durch $S(0\,|\,1)$ auf $[0;\, \pi]$ eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

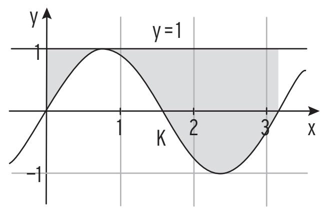
Lösung

Die Gerade mit $y = 1$ verläuft durch die Hochpunkte von K, sie berührt K auf dem Intervall $[0;\, \pi]$ nur an der Stelle $\frac{\pi}{4}$ (Schnittstelle ohne VZW).

Integration von 0 bis π:

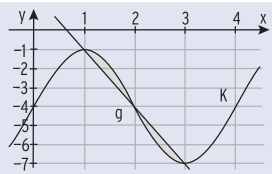
$$\int_0^{\pi} (1 - \sin(2x))\,dx = \left[x + \tfrac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi} = \pi$$

Flächeninhalt $A = \pi$



Beispiel 4

K ist der Graph von f mit $f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 4$; $x \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt zwei Flächenstücke. Berechnen Sie den Flächeninhalt eines der beiden Flächenstücke.



Lösung

Schnittstellen durch Ablesen: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$

Wegen der Symmetrie von K und g zu $W(2\,|\,-4)$ sind die Flächen gleich groß.

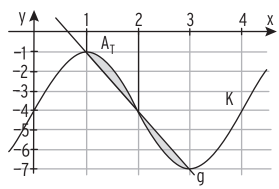
Fläche zwischen K und x-Achse:

$$\int_1^2 \left(3\sin\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) - 4\right)dx = \left[\tfrac{-6}{\pi}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) - 4x\right]_1^2 = \tfrac{6}{\pi} - 4 < 0$$

Flächeninhalt: $A_x = 4 - \frac{6}{\pi}$

Trapezinhalt: $A_T = \frac{1+4}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2}$ oder $A_{\triangle} + A_{\square} = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$

Gesuchte Fläche: $A = \frac{5}{2} - \left(4 - \frac{6}{\pi}\right) = \frac{6}{\pi} - \frac{3}{2}$



mvurl.de/qmdj

mvurl.de/znap

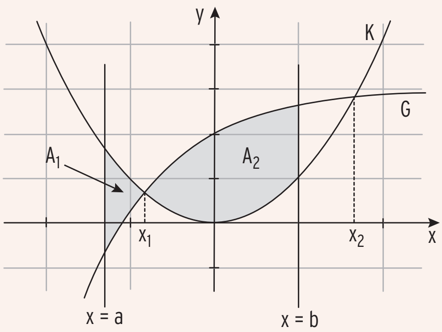
Berechnung des Inhalts der Fläche, die von den Kurven K von f und G von g auf dem Intervall [a; b] umschlossen wird.

a) Berechnung der Schnittstellen
Bed.: $f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = 0$ liefert die Schnittstellen $x_1, x_2, \ldots$

b) Integration der Differenzfunktion mit $f(x) - g(x)$

- $\int_a^{x_1} (f(x) - g(x))\,dx$
- $\int_{x_1}^{b} (f(x) - g(x))\,dx$

c) Addition der Beträge der Integralwerte ergibt den Inhalt der Gesamtfläche.
$A_{ges} = A_1 + A_2$



Hinweis: Nicht über eine **Schnittstelle mit Vorzeichenwechsel** hinweg integrieren.

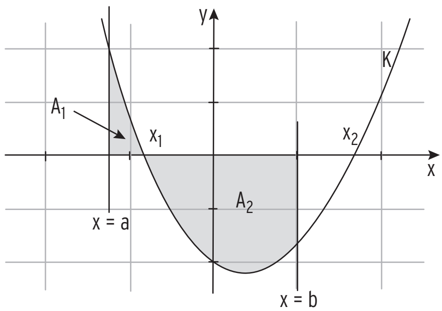
Vergleichen Sie mit der Berechnung des Inhalts der Fläche zwischen der Kurve K von f und der x-Achse auf dem Intervall [a; b]

a) Berechnung der Nullstellen
Bed.: $f(x) = 0$ liefert die Nullstellen $x_1, x_2, \ldots$

b) Integration über $f(x)dx$

- $\int_a^{x_1} f(x)\,dx$
- $\int_{x_1}^{b} f(x)\,dx$

c) Addition der Beträge der Integralwerte ergibt den Inhalt der Gesamtfläche.
$A_{ges} = A_1 + A_2$



Hinweis: Nicht über eine **Nullstelle mit Vorzeichenwechsel** hinweg integrieren.

Aufgaben

1 Für $x \in \mathbb{R}$ sind zwei Funktionen f und g gegeben mit $f(x) = 2(x^3 - 4x^2 + 4x)$ und $g(x) = \frac{2}{3}x^2$. Die zugehörigen Graphen begrenzen eine Fläche.

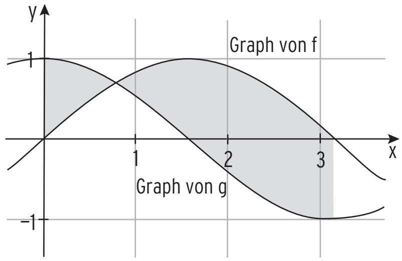
Berechnen Sie den Inhalt A dieser Fläche.

2 K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 4x$; $x \in \mathbb{R}$.

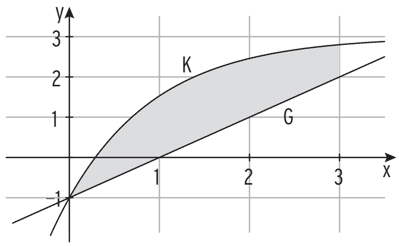
a) Geben Sie eine Stammfunktion von f an und berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von K und der x-Achse im 1. Feld eingeschlossen wird.

b) K schließt mit der Parabel P von g mit $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$; $x \in \mathbb{R}$, zwei Flächenstücke ein. Wie groß ist die Fläche, die den Punkt $D(1|0)$ enthält?

3 Die Funktionen f und g sind durch $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ gegeben. Wie groß ist die markierte Fläche?



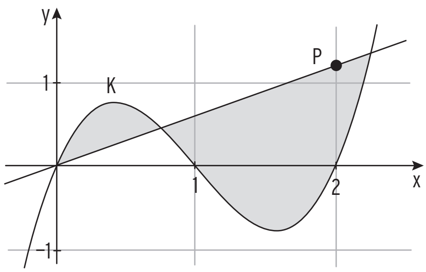
4 K und G sind die Schaubilder der Funktionen f mit $f(x) = -4e^{-x} + 3$ und g mit $g(x) = x - 1$. Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.



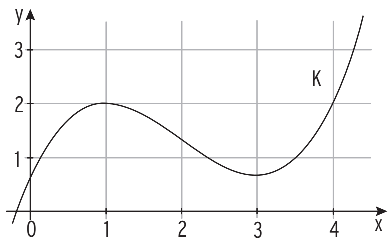
5 K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 2x(x-2)(x-1)$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie den Inhalt der markierten Fläche mit $P\left(2\middle|\frac{6}{5}\right)$.

b) Die Tangente an K im Ursprung begrenzt mit K eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt.

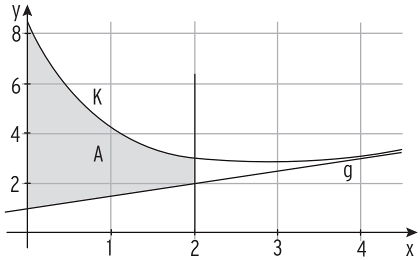


6 K und G sind die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}$; $x \in \mathbb{R}$ und $g(x) = 2$; $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: G berührt K in $x = 1$ und schneidet K in $x = 4$.
K und G begrenzen im 1. Quadranten eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

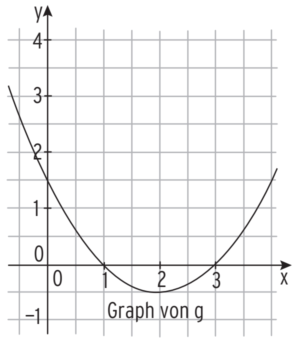


7 K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -x^2(3-x);\ x \in \mathbb{R}$.
Die Gerade g schneidet die Kurve K in $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$. K, g und die x-Achse schließen im 4. Feld eine Fläche ein. Berechnen Sie deren Inhalt.

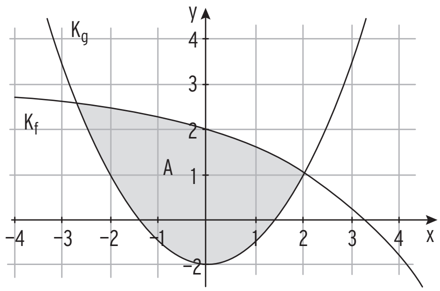
8 Gegeben ist f mit $f(x) = e^{2-x} + 0{,}5x + 1;\ x \in \mathbb{R}$ mit Graph K. Wie lässt sich der Inhalt A der markierten Fläche bestimmen?
Geben Sie A an.



9 Gegeben ist die Funktion f durch
$f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x;\ x \in \mathbb{R}$
und der Graph von g in der Abbildung.
Die Graphen von f und g begrenzen für $1 \leq x \leq 3$ einen See. Der Graph von f bildet modellhaft die nördliche und die zu g gehörende Parabel die südliche Uferbegrenzungslinie. Die x-Achse verläuft in West-Ost-Richtung (1 LE ≙ 1 km). Berechnen Sie die Größe der Seefläche.



10 Gegeben sind die Schaubilder K_g und K_f zweier Funktionen g und f (siehe Abbildung).
K_g und K_f begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt A.
A_1 ist der Flächenanteil von A, der im ersten Quadranten liegt.
Geben Sie ein geeignetes Vorgehen zur Bestimmung des Flächeninhaltes von A_1 an.



11 K ist das Schaubild von f mit $f(x) = \sin(2x),\ x \in \mathbb{R}$.
K begrenzt mit der x-Achse eine Fläche auf dem Intervall $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ mit Inhalt A.
Die Funktion f wird auf $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ durch eine Funktion p mit $p(x) = -\frac{4}{\pi}x^2 + 2x$ angenähert.
K und die Parabel G von p berühren sich in den gemeinsamen Punkten von K mit der x-Achse. G begrenzt mit der x-Achse eine Fläche mit Inhalt B.
Um wie viel % weicht B von A ab?

4.4.3 Besondere Aufgabenstellungen bei der Flächeninhaltsberechnung

Fläche zwischen Kurve, Gerade und x-Achse

Beispiel

Gegeben ist das Schaubild K von f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x;\ x \in \mathbb{R}$.

a) Geben Sie Eigenschaften der Kurve K an.

b) Die Gerade G mit Steigung −4 schneidet K in S(2|4). Übertragen Sie K in Ihr Heft und zeichnen Sie G in Ihr Achsenkreuz ein.

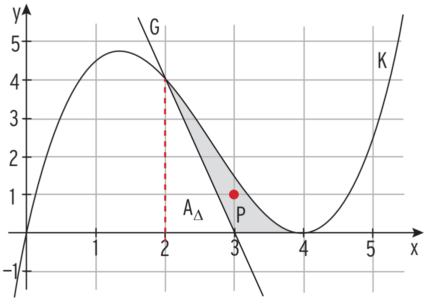
c) Kund G schließen mit der x-Achse zwei Flächenstücke ein.
Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das den Punkt P(3|1) enthält.

Lösung

a) K ist der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades. K verläuft vom 3. in das 1. Feld.
Schnittstellen mit der x-Achse:
$x_1 = 0;\ x_{2|3} = 4$
Tiefpunkt: T(4|0)

b) Zeichnung

c) Schnittstelle von K und G: $x_1 = 2$
Aus der Zeichnung:
Schnittstelle von G und x-Achse: $x_S = 3$
Flächeninhaltsberechnung:
Fläche zwischen K, der x-Achse und den Geraden mit $x = 2$ und $x = 4$



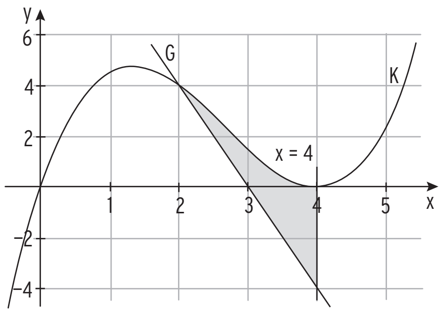
$$\int_2^4 f(x)\,dx = \frac{10}{3};\quad A_1 = \frac{10}{3}$$

Berechnung des Inhaltes der Dreiecksfläche: $A_\Delta = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b = \frac{1}{2}\cdot a\cdot f(2)$

$$= \frac{1}{2}\cdot(3-2)\cdot 4 = 2$$

Inhalt der gesuchten Fläche: $A = A_1 - A_\Delta = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3}$

Hinweis: Die in der Aufgabe gesuchte Fläche ist keine Fläche zwischen zwei Kurven.
$\int_2^4 (f(x) - g(x))\,dx$ liefert den Inhalt der gefärbten Fläche (Fläche zwischen K, G und der Geraden mit $x = 4$).



Verhältnis der Inhalte zweier Flächen

Beispiel

Gegeben sind die Funktionen f und g durch $f(x) = -x^2 - 2x + 8;\ x \in \mathbb{R}$ und $g(x) = 2x + 8;\ x \in \mathbb{R}$.
Der Graph K von f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche. Der Graph G von g unterteilt diese Fläche in zwei Teilflächen.
Zeigen Sie: Die Inhalte der Teilflächen verhalten sich wie 8:19.

Lösung

Schnittstellen von K mit der x-Achse: $f(x) = 0$ $\qquad -x^2 - 2x + 8 = 0$

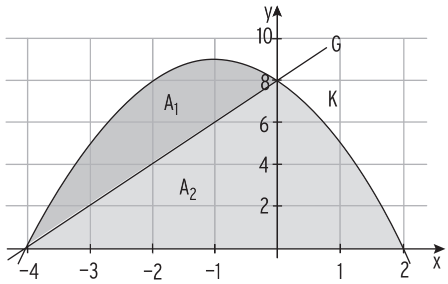
$x_1 = 2;\ x_2 = -4$

Schnittstellen von K und G: $f(x) = g(x)$ $\qquad -x^2 - 2x + 8 = 2x + 8$

Nullform: $-x^2 - 4x = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x_3 = -4;\ x_4 = 0$

Skizze:



Inhalt A der Fläche zwischen K und der x-Achse:

$$\int_{-4}^{2} f(x)\,dx = \left[-\tfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 8x\right]_{-4}^{2} = 36$$

Inhalt $A = 36$

Inhalt A_1 der Fläche zwischen K und G:

$$\int_{-4}^{0} (f(x) - g(x))\,dx$$
$$= \int_{-4}^{0} (-x^2 - 4x)\,dx$$
$$= \left[-\tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2\right]_{-4}^{0} = \frac{32}{3}$$

Inhalt $A_1 = \frac{32}{3}$

Inhalt A_2 der Fläche zwischen K, G

und der x-Achse: $\qquad A_2 = A - A_1 = 36 - \frac{32}{3} = \frac{76}{3}$

Für das Verhältnis gilt: $\qquad \frac{A_2}{A_1} = \frac{76}{3} : \frac{32}{3} = \frac{76}{32} = \frac{19}{8}$

Die Teilflächen A_1 und A_2 verhalten sich wie 8:19.

Hinweis: Die Teilflächen A_2 und A_1 verhalten sich wie 19:8.

Aufstellen von Kurvengleichungen mit gegebenem Flächeninhalt

Beispiel

Das Schaubild einer Polynomfunktion f 3. Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung und verläuft durch den Punkt $N(4|0)$. Sie schließt mit der x-Achse im 1. Feld eine Fläche mit dem Inhalt $A = 6{,}4$ ein. Bestimmen Sie $f(x)$.

Lösung

Ansatz wegen Punktsymmetrie: $f(x) = a x^3 + c x$

Ableitung: $f'(x) = 3 a x^2 + c$

Aufstellen der Bedingungen:

$N(4|0)$ ist Kurvenpunkt: $f(4) = 0$ (1)

Inhalt der Fläche zwischen x-Achse und Kurve: $\int_0^4 f(x)\,dx = 6{,}4$ (2)

Hinweis: Die Fläche liegt **oberhalb der x-Achse**, also liefert das Integral über $f(x)\,dx$ von $x_1 = 0$ bis $x_2 = 4$ die Maßzahl für den Flächeninhalt.

Aufstellen der Bestimmungsgleichungen für a und c

Bedingung (1): $64 a + 4 c = 0$

Integration: $\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 (a x^3 + c x)\,dx$

$= [0{,}25 a x^4 + 0{,}5 c x^2]_0^4 = 64 a + 8c$

führt auf die Bedingung (2): $64 a + 8c = 6{,}4$

Auflösen des LGS

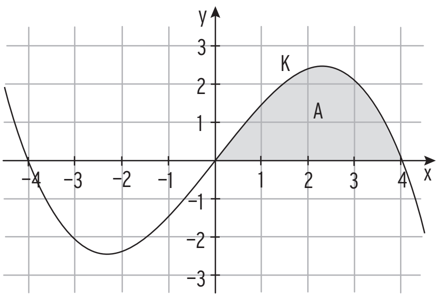
$64 a + 4 c = 0$

$64 a + 8 c = 6{,}4$

Subtraktion ergibt $4 c = 6{,}4 \Rightarrow c = 1{,}6$

Einsetzen ergibt $a = -0{,}1$.

Funktionsterm: $f(x) = -0{,}1 x^3 + 1{,}6 x$



Hinweis: Auflösen der Gleichung $64 a + 4c = 0$ nach z. B. c ergibt: $c = -16 a$

Einsetzen und Integration: $\int_0^4 (a x^3 - 16 a x)\,dx$

$= a[0{,}25 x^4 + 8 x^2]_0^4 = -64 a$

Die Bedingung $A = 6{,}4$ ergibt: $-64 a = 6{,}4$

$a = -0{,}1$

Einsetzen ergibt $c = 1{,}6$ und damit: $f(x) = -0{,}1 x^3 + 1{,}6 x$

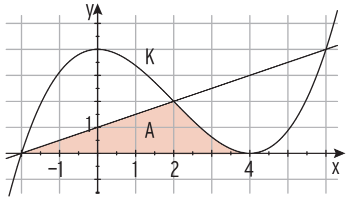
Aufgaben

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4;\ x \in \mathbb{R}$.

a) Das Schaubild K von f, die Wendetangente und die y-Achse begrenzen eine Fläche. Bestimmen Sie deren Inhalt.

b) Eine Gerade g schneidet K in U(−2 | ...) und V(6 | ...). Berechnen Sie den Inhalt der von K und der Geraden g im 1. und 2. Feld eingeschlossenen Fläche.

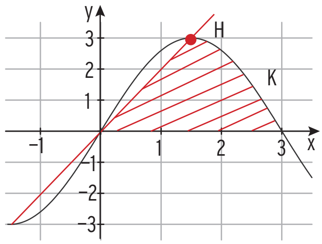
c) Wie groß ist die markierte Fläche? Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.



2 K ist der Graph der Funktion f mit
$f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right);\ x \in [-1; 4]$.

a) Beschreiben Sie, wie Sie den Inhalt A der markierten Fläche bestimmen. Ermitteln Sie A.

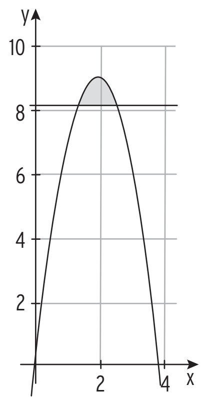
b) Die Parallele zur x-Achse durch H, die y-Achse und K begrenzen eine Fläche.
Berechnen Sie ihren Inhalt.



3 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x(x-3)^2;\ x \in \mathbb{R}$, ist K.
H(1 | 4) ist der Eckpunkt eines Rechtecks, von dem zwei Seiten auf den Koordinatenachsen liegen. K unterteilt das Rechteck in zwei Teile. In welchem Verhältnis stehen die Inhalte der beiden Teilflächen?

4 Das Schaubild K der Funktion f mit $f(x) = ax^4 + bx$ schneidet die x-Achse außer im Ursprung nur noch in N(1|0). K schließt mit der x-Achse im 1. Feld eine Fläche mit dem Inhalt $A = 9$ ein.
Ermitteln Sie a und b.

5 Die Form einer Wurfscheibe (Diskus) lässt sich näherungsweise beschreiben durch ein Parabelstück, das um die x-Achse rotiert (siehe Abb., alle Angaben in cm).
Das Parabelstück liegt im 1. Quadranten und wird beschrieben durch die Gleichung $y = -\frac{5}{2}x\left(x - \frac{19}{5}\right)$.
Bei einem Diskus besteht die Kante aus Stahl (siehe Abb.) und der Rest aus einem anderen Material.
Im Querschnitt lässt sich die Stoffgrenze beschreiben durch eine Gerade mit der Gleichung $y = \frac{65}{8}$.
Welchen Anteil an der Gesamtquerschnittsfläche hat die Querschnittsfläche der Stahlkante?



Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

1 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f.

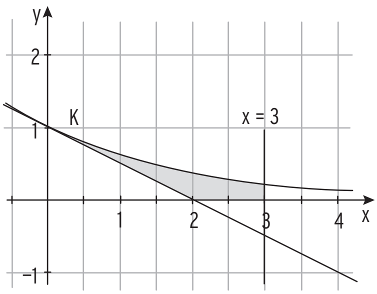
a) $f(x) = \frac{1}{7}(x^3 + 3x^2 + 4)$ b) $f(x) = -\frac{3}{2}x + 4e^{1-2x}$

2 Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f mit $f(x) = 1 + 5\sin(3x)$ und $F(0) = 3{,}5$.

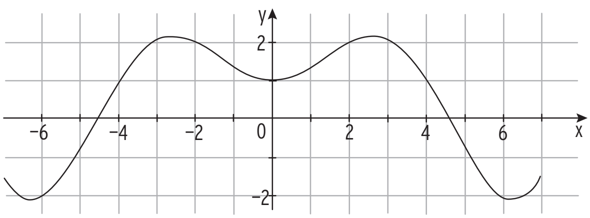
3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -0{,}25(x-1)(x-2)$; $x \in \mathbb{R}$, mit Schaubild K.
K schließt auf [0; 2] mit der x-Achse zwei Flächenstücke ein.
Berechnen Sie den Gesamtinhalt.

4 K ist der Graph von f mit $f(x) = x^3 + 4x^2$; $x \in \mathbb{R}$, G ist der Graph von g mit $g(x) = x^2$; $x \in \mathbb{R}$.
K und G schließen eine Fläche ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

5 K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^{-0{,}5x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Die Abbildung zeigt K mit der zugehörigen Tangente im Punkt S(0|1) sowie die Gerade mit der Gleichung $x = 3$.
Berechnen Sie den Inhalt der grau unterlegten Fläche.



6 Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f mit dem Definitionsbereich [−7; 7].
Begründen Sie für jede der folgenden Behauptungen, ob sie wahr oder falsch ist.



(1) Die Tangente an das Schaubild von f an der Stelle $x = -2$ hat die Steigung −1.

(2) Das Schaubild jeder Stammfunktion von f hat an der Stelle $x = 0$ eine waagerechte Tangente.

(3) Jede Stammfunktion von f hat fünf Wendestellen.

(4) $\int_{-4}^{4} f(x)\,dx > 10$

(5) $\int_{0}^{4} f'(x)\,dx = 0$

4.5 Anwendungen der Integralrechnung

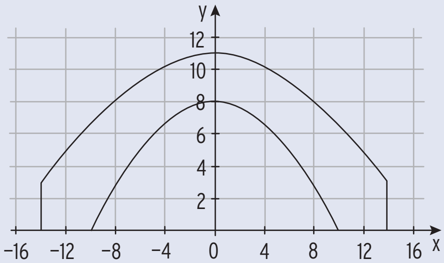
4.5.1 Flächen in anwendungsorientierten Aufgaben

Beispiel

➡ Die Abbildung zeigt den Querschnitt des Betonkörpers eines Tunnels.
Dieser wird durch die Graphen zweier Funktionen modelliert, innen durch K von f mit $f(x) = a x^2 + b$, außen durch G von g mit $g(x) = 8\cos\left(\frac{\pi}{28}x\right) + 3$.
Die lichte Tunnelhöhe beträgt 8 m.

a) Bestimmen Sie a und b.

b) Wie viel Beton wird benötigt, wenn der Betonkörper 5 m in den Tunnel reicht?



Lösung

a) Bedingungen für a und b: $f(0) = 8 \Rightarrow b = 8$

$f(10) = 0 \Rightarrow 100a + b = 0$

Einsetzen von $b = 8$ ergibt: $a = -\frac{2}{25}$

Funktionsterm: $f(x) = -\frac{2}{25}x^2 + 8$

b) Querschnittsfläche

Um den Inhalt der Querschnittsfläche zu berechnen, braucht man folgende Flächen:

A_1: Fläche zwischen der Kurve G und der x-Achse zwischen −14 und 14

A_2: Fläche zwischen der Parabel K und der x-Achse zwischen −10 und 10

Hinweis: Die Kurven K und G sind symmetrisch zur y-Achse.

A_1: $2\int_0^{14} 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{28}x\right) + 3\right)dx = 2\left[\frac{8\cdot 28}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{28}x\right) + 3x\right]_0^{14} = 226{,}6$ $\quad A_1 = 226{,}6$

A_2: $2\int_0^{10}\left(-\frac{2}{25}x^2 + 8\right)dx = 2\left[-\frac{2}{75}x^3 + 8x\right]_0^{10} = 106{,}66$ $\quad A_2 = 106{,}7$

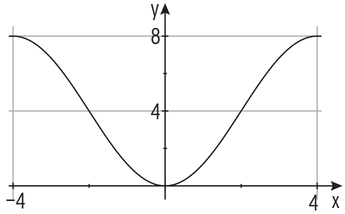
Inhalt der Gesamtfläche in m^2: $A = A_1 - A_2 = 119{,}9$

Volumen des Betonkörpers: $V = A \cdot h = 119{,}9 \cdot 5 = 599{,}5$

Man benötigt etwa 600 m^3 Beton.

Aufgaben

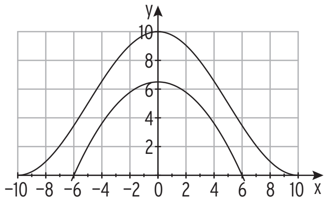
1 Eine Wasserrinne wird durch den Graph einer Polynomfunktion f mit $f(x) = -\frac{1}{32}x^4 + x^2$ modelliert. Eine LE in der Abbildung entspricht 1 dm in Wirklichkeit.



a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Wasserquerschnitts, wenn die Rinne ganz gefüllt ist.

b) Wie viel Prozent der maximalen Wassermenge fließt, wenn die Wasserrinne bis 3,5 dm gefüllt ist?

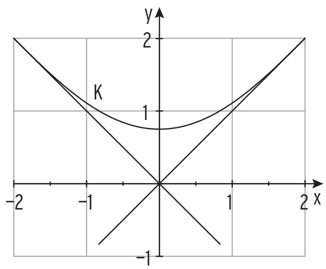
2 Die Abbildung zeigt den Querschnitt des Betonmantels einer Unterführung (Längen in Meter). Die Schaubilder der Funktionen f mit $f(x) = ax^2 + 6{,}5$ und g mit $g(x) = b\cos\left(\frac{\pi}{k}x\right) + c$ begrenzen den Querschnitt von unten bzw. von oben.



a) Bestimmen Sie a, b und c und k.

b) Wie viel Beton wird benötigt, wenn die Unterführung 80 m lang ist?

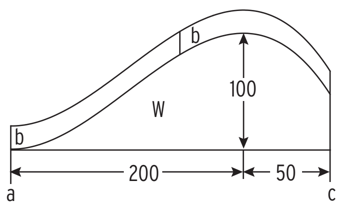
3 Zwei sich senkrecht kreuzende Autobahnen sollen miteinander verbunden werden.
Die Abbildung zeigt die Situation in einem geeigneten Koordinatensystem.
Die Verbindungskurve K mündet bei −2 und bei 2 ohne Knick in die Geraden ein.



a) Die Kurve K ist der Graph einer Polynomfunktion f. Welche Bedingungen muss f erfüllen?
Prüfen Sie ob die Bedingungen für f mit
$f(x) = -\frac{1}{64}x^4 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}$ erfüllt sind.

b) Wie groß ist die „vergeudete", d. h. von den Straßen eingeschlossene Fläche?

4 Herr Burg ist Eigentümer der Wiese W am Fluss. Die Abbildung zeigt die Lage von W und den Verlauf eines Flusses (Maße in m, nicht maßstabsgetreu).
Wie viel m^2 hat die Wiese?
Er verpachtet den Flusslauf von a bis c als Fischwasser für 1 € pro Jahr und m^2 Wasserfläche.
Wie hoch ist sein Pachtzins, wenn der Fluss immer $b = 25$ m breit ist? Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.



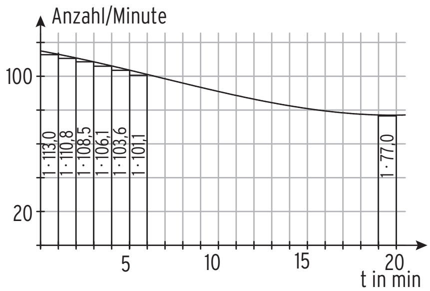
4.5.2 Interpretation von Flächen

mvurl.de/t49r

Beispiel 1

Das Schaubild von f mit $f(t) = 0{,}005t^3 - 0{,}1t^2 - 1{,}9t + 115;\ t \geq 0$,
beschreibt die Anzahl der Fahrzeuge pro Minute, die eine Mautstelle passieren.
Wie viele Fahrzeuge passieren in den ersten 20 Minuten insgesamt die Mautstelle?

Lösung



$f(1) = 113{,}0$; d. h. 113 Autos/Minute, konstant über eine Minute ergibt: 113 Autos in dieser Minute. Die Summe der Flächeninhalte aller Rechtecke ergibt **näherungsweise** die Gesamtzahl der Fahrzeuge:
$113{,}0 + 110{,}8 + 108{,}5 + \ldots + 77{,}0 = 1834{,}5$
Die **Gesamtzahl der Fahrzeuge** lässt sich durch den **Inhalt der Fläche** zwischen dem Graph von f und der t-Achse bestimmen:

$\int_0^{20} f(t)\,dt = 1853{,}3$. In den ersten 20 Minuten passieren 1853 Fahrzeuge die Mautstelle.

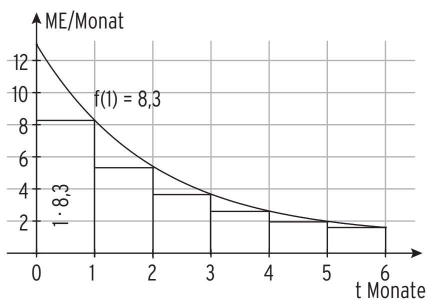
Vergleichen Sie die Einheiten: $\frac{\text{Anzahl der Fahrzeuge}}{\text{Minute}} \cdot \text{Minute}$ ergibt Anzahl der Fahrzeuge.

Hinweis: Bei gegebener Ankunftsrate f (Fahrzeuge pro Zeiteinheit) wird die Gesamtzahl der Fahrzeuge im Zeitraum [a; b] bestimmt durch $\int_a^b f(t)\,dt$.

Beispiel 2

Für die kommenden Monate kann die Absatzrate eines Produktes durch folgende Funktion f modelliert werden: $f(t) = 12e^{-0{,}5t} + 1;\ t \geq 0$; t in Monaten; f(t) Absatzrate (Absatz in ME/Monat). Berechnen Sie den Gesamtabsatz in den ersten 6 Monaten.

Lösung



Die Summe der Flächeninhalte aller Rechtecke ergibt näherungsweise den Gesamtabsatz.
Der Gesamtabsatz lässt sich durch den Inhalt der Fläche zwischen dem Schaubild von f und der t-Achse bestimmen: $\int_0^6 f(t)\,dt = 28{,}8$

In den ersten 6 Monaten können 28 ME abgesetzt werden.

Vergleichen Sie die Einheiten: $\frac{\text{ME}}{\text{Monat}} \cdot \text{Monat}$ ergibt ME.

Hinweis: Bei gegebener Absatzrate f (Absatz in ME pro Zeiteinheit) wird der Gesamtabsatz im Zeitraum [a; b] bestimmt durch $\int_a^b f(t)\,dt$.

Beispiel 3

Gegeben ist die Geschwindigkeitsfunktion v mit $v(t) = \frac{7}{2}t - \frac{1}{15}t^2$; $0 \leq t \leq 40$; v in $\frac{m}{s}$; t in s.
Bestimmen Sie die Maßzahl des insgesamt zurückgelegten Weges.

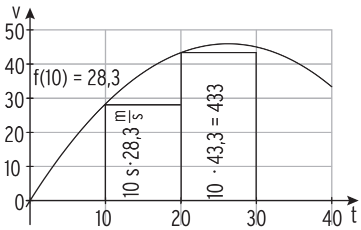
Lösung

Der zurückgelegte Weg entspricht der Fläche unter der Kurve im v-t-Diagramm.

$$\int_0^{40} v(t)\,dt = \int_0^{40} \left(\frac{7}{2}t - \frac{1}{15}t^2\right)dt$$

$$= \left[\frac{7}{4}t^2 - \frac{1}{45}t^3\right]_0^{40} = 1377{,}78$$

Der zurückgelegte Weg beträgt 1377,78 m.



Vergleichen Sie die Einheiten: $\frac{m}{s} \cdot s$ ergibt m.

Hinweis: Bei gegebener Geschwindigkeit wird der zurückgelegte Weg im Zeitraum [a; b] berechnet durch $\int_a^b v(t)\,dt$.

Aufgaben

1 Das Höhenwachstum eines Baumes kann für $0 \leq t \leq 5$ durch die Änderungsrate v beschrieben werden:
$v(t) = 1{,}25\,e^{-0{,}5t}$; t in Jahren; v(t) in Meter pro Jahr.

a) Zeichnen Sie einen Graphen, der die Entwicklung der Höhe des Baumes darstellt, wenn dieser zu Beginn (t = 0) 0,5 m hoch war.

b) Welche Bedeutung haben die folgenden Integrale für die vorgegebene Situation?

- $\int_0^1 v(t)\,dt$
- $\int_1^4 v(t)\,dt$
- $0{,}5 + \int_0^4 v(t)\,dt$

2 Der Kostenzuwachs eines Betriebes für die Produktion von x ME lässt sich beschreiben durch $K'(x) = 3x^2 - 14x + 135$, x in ME;
$K'(x)$ in $\frac{\text{Geldeinheit}}{\text{Mengeneinheit}}\left(\frac{GE}{ME}\right)$.
Berechnen Sie folgende Integrale und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse ökonomisch.

a) $\int_0^5 K'(x)\,dx$ **b)** $\int_5^{10} K'(x)\,dx$ **c)** $20 + \int_0^{10} K'(x)\,dx$

mvurl.de/nzps

1.2.4 Lineare Gleichungssysteme mit Parameter

Beispiel 1

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist das folgende lineare Gleichungssystem (LGS) gegeben:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ tx_2 + x_3 &= 4t \\ tx_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}$$

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist das LGS unlösbar, mehrdeutig lösbar, eindeutig lösbar?

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für den Fall der eindeutigen Lösbarkeit.

Lösung

a) Koeffizientenmatrix auf Dreiecksform bringen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & t & 1 & 4t \\ 0 & t & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & t & 1 & 4t \\ 0 & 0 & 2 & 4t+2 \end{array}\right)$$

Untersuchung der Diagonalelemente: $t = 0$

Für $t = 0$ ist das LGS **nicht eindeutig** lösbar.

Erweiterte Dreiecksform für $t = 0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$

Die 3. Zeile entspricht der Gleichung: $2x_3 = 2$

$x_3 = 1$

Die 2. Zeile entspricht der Gleichung: $x_3 = 0$

Für $t = 0$ ist das LGS **unlösbar**,

für $t \neq 0$ hat das LGS **genau eine Lösung**, da alle Diagonalelemente ungleich null sind.

Für kein $t \in \mathbb{R}$ ist das LGS mehrdeutig lösbar.

b) Lösungen für $t \neq 0$

Aus der erweiterten Dreiecksform: $2x_3 = 4t + 2$

$x_3 = 2t + 1$

Durch Einsetzen von $x_3 = 2t + 1$

in $t \cdot x_2 + x_3 = 4t$ (2. Zeile)

ergibt sich x_2: $tx_2 + (2t + 1) = 4t$

$tx_2 = 2t - 1$

$x_2 = 2 - \frac{1}{t}$

Einsetzen in $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ (1. Zeile): $x_1 + \left(2 - \frac{1}{t}\right) + 2t + 1 = 2$

$x_1 = \frac{1}{t} - 2t - 1$

Lösungsvektor für $t \neq 0$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} - 2t - 1 \\ 2 - \frac{1}{t} \\ 2t + 1 \end{pmatrix}$

Lösungsmenge für $t \neq 0$: $L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{t} - 2t - 1 \\ 2 - \frac{1}{t} \\ 2t + 1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$

Beispiel 2

➲ Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist das folgende LGS gegeben:

$$\begin{aligned} tx_1 + 4x_2 + \quad 2x_3 &= 4 \\ 4x_2 + (t+1)x_3 &= 2 \\ (t^2-1)x_3 &= t(t-1) \end{aligned}$$

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat das LGS genau eine, keine, mehr als eine Lösung?

b) Bestimmen Sie den Lösungsvektor im Falle der Mehrdeutigkeit.

Lösung

a) Koeffizientenmatrix in erweiterter Dreiecksform: $\left(\begin{array}{ccc|c} t & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & t+1 & 2 \\ 0 & 0 & t^2-1 & t(t-1) \end{array}\right)$

Untersuchung der Diagonalelemente: $t = 0$

$t^2 - 1 = 0$ für $t = \pm 1$

Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1, 1\}$ sind alle Diagonalelemente ungleich null.

Das LGS hat für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1, 1\}$ **genau eine Lösung.**

Untersuchung für $t = 0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

Für $t = 0$ hat das LGS **keine Lösung** (letzte Zeile: $0 \cdot x_3 = 2$).

Untersuchung für $t = -1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

Für $t = -1$ hat das LGS **keine Lösung.**

Untersuchung für $t = 1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Für $t = 1$ hat das LGS **mehr als eine Lösung** (letzte Zeile: $0 \cdot x_3 = 0$).

b) Lösung für $t = 1$

Mit $x_3 = r$, $r \in \mathbb{R}$ (x_3 ist frei wählbar) ergibt sich durch Einsetzen in

die Gleichung $4x_2 + 2x_3 = 2$: $\quad 4x_2 + 2r = 2 \Leftrightarrow \quad x_2 = 0{,}5 - 0{,}5r$

Einsetzen in $x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4$: $\quad x_1 + 4 \cdot (0{,}5 - 0{,}5r) + 2r = 4 \Leftrightarrow \quad x_1 = 2$

Lösungsvektor: $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 - 0{,}5r \\ r \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$

Aufgaben

1 Untersuchen Sie das LGS auf Lösbarkeit.
Bestimmen Sie den Lösungsvektor im Falle der mehrdeutigen Lösbarkeit.

a) $$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 &= -2 \\ (t+1)x_2 + 2x_3 &= 6 \\ tx_3 &= -3 \end{aligned}$$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & t & 2 & 4 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ t & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$

2 Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist das folgende LGS gegeben:
$x_1 + 4x_2 + tx_3 = 2 \wedge tx_2 + 2x_3 = 3t \wedge (1-t)x_3 = t - 1$
Bestimmen Sie für $t = 1$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems.
Für welche Werte von t hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung, unendlich viele Lösungen, genau eine Lösung?

Was man wissen sollte – über die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

Untersuchung in zwei Schritten (am Beispiel von 3 Gleichungen für 3 Unbekannte):

1. Umformung der erweiterten Koeffizientenmatrix mit dem Gaußverfahren in die **erweiterte Dreiecksform**: $\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{matrix}}_{A^*} & \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \end{array}\right)$

2. Untersuchung der **Diagonalelemente von A***

Alle Diagonalelemente von A* sind ungleich null.

↓

Das LGS ist **eindeutig** lösbar.

Mindestens ein Diagonalelement von A* ist gleich null.

↓

Das LGS ist **nicht eindeutig** lösbar.
Die rechte Seite entscheidet:
Das LGS ist

mehrdeutig lösbar.

z. B. $\left(\begin{array}{ccc|c} \neq 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \neq 0 & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

unlösbar.

$\left(\begin{array}{ccc|c} \neq 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \neq 0 & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & 0 & 0 & \neq 0 \end{array}\right)$

Beispiele

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ Das inhomogene LGS ist **eindeutig lösbar**.

$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Das homogene LGS ist **eindeutig lösbar**.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -12 + 4r \\ -4 + 2r \\ r \end{pmatrix}$ Das inhomogene LGS ist **mehrdeutig lösbar**.

$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 4r \\ 2r \\ r \end{pmatrix}$ Das homogene LGS ist **mehrdeutig lösbar**.

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Das inhomogene LGS ist **unlösbar**.

Aufgaben

1 Bestimmen Sie den Lösungsvektor.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ e) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ f) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

g) $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ h) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$

c) d)

2 Berechnen Sie die Lösungsmenge.

a) $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 6x_2 + 5x_3 &= 11 \\ 3x_1 + 11x_2 - 9x_3 &= 1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 8x_2 - 4x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 2 \\ -3x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= -5 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_2 + 4x_3 &= -0{,}5 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - x_3 &= 25 \\ x_1 + 7x_3 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 12 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 &= 2 \\ x_1 + 3x_3 &= 3 \end{aligned}$

g) $2x_2 + x_3 = -1$

h) $3x_1 - 7x_2 + x_3 = 0$

3 Bestimmen Sie den Lösungsvektor des Gleichungssystems.

a) $\begin{aligned} x_1 + 8x_2 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 6x_2 &= 3 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$

4 Gegeben ist das LGS $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$.
Untersuchen Sie auf Lösbarkeit. Ändern Sie eine Zahl so ab, dass sich die Lösbarkeit ändert. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Lösungsvektor.

5 Zeigen Sie, dass das LGS $x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \wedge x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \wedge -2x_2 + x_3 = -1$ unlösbar ist.

6 Bestimmen Sie r, s und t so, dass gilt:

$$\begin{aligned} 4 + r + 2s &= 4t + 3 \\ 3 + 3r + 2s &= 2t \\ 1 + 4r + 4s &= 4t. \end{aligned}$$

7 Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:
$2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = x_1 \wedge -x_1 + x_2 + x_3 = x_2 \wedge 4x_1 - 2x_2 = x_3$.

Zeigen Sie: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist ein Lösungsvektor. Berechnen Sie alle Lösungen.

8 Gegeben ist das LGS:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie den allgemeinen Lösungsvektor.

Prüfen Sie, ob $\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ -22 \\ 8 \end{pmatrix}$ ein Lösungsvektor ist.

Bestimmen Sie eine spezielle Lösung mit $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

9 Gegeben ist das LGS $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 2 & 9 & 10 & y \\ -1 & 3 & 0 & z \end{array}\right)$.

a) Ist das LGS lösbar für $x = y = z = 0$? Wenn ja, geben Sie den Lösungsvektor an.

b) Ist das LGS lösbar für $x = y = 0$ und $z = 1$? Wenn ja, geben Sie die Lösung an.

c) Welche Beziehung besteht zwischen x , y und z, wenn das LGS lösbar ist?

10 Für jedes $k \in \mathbb{R}$ ist das folgende LGS gegeben:

$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \wedge 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = -2 \wedge 3x_1 + 6x_2 - kx_3 = 0$

Untersuchen Sie das LGS auf Lösbarkeit. Bestimmen Sie alle Lösungen.

11 Welche der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind Lösungen der Gleichung $x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$?

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung.

12 Für welche Werte von t ist das LGS $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 & 4 \end{array}\right)$ eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar, unlösbar?

13 Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \qquad (1) \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \qquad (2) \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems, das aus den drei Gleichungen (1), (2) und (3) besteht.
Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems, das aus den Gleichungen (1) und (2) besteht.
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung (1).

14 Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist das folgende Gleichungssystem unlösbar, mehrdeutig lösbar, eindeutig lösbar?

a)
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= t \\ tx_2 + x_3 &= 1 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad &= 2 \\ (t+1)\,x_2 + x_3 &= 1 \\ tx_3 &= -1 \end{aligned}$$

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

1 Untersuchen Sie das LGS auf Lösbarkeit. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Lösungsvektor.

a) $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 9 \\ 4x_2 + x_3 &= -7 \end{aligned}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & -4 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right)$

2 Zeigen Sie: Das LGS ist mehrdeutig lösbar.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

3 Bestimmen Sie den Lösungsvektor des Gleichungssystems.

a) $\begin{aligned} x_1 + 8x_2 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 6x_2 &= 3 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= -1 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$

4 Gegeben ist folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 11x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Geben Sie eine Lösung des Gleichungssystems an, bei der $x_3 = 0$ ist.

5 Für ein Klassenfest kaufen drei Schüler im gleichen Getränkemarkt Mineralwasser (M), Saft (S) und Cola (C) ein. Die Tabelle gibt die Anzahl der gekauften Gebinde an.

	Mineralwasser (M)	Saft (S)	Cola (C)
Schüler 1	2	4	5
Schüler 2	3	2	6
Schüler 3	2	5	5

Die Einkäufer legen der Klassenkasse Belege über 80 Euro, 75 Euro und 89 Euro vor. Wie viel Gewinn erwirtschaftet die Klasse, wenn alle Getränke verkauft werden und der Verkaufspreis von M 20 %, der von S 30 % und der von C 25 % über dem jeweiligen Einkaufspreis liegt?

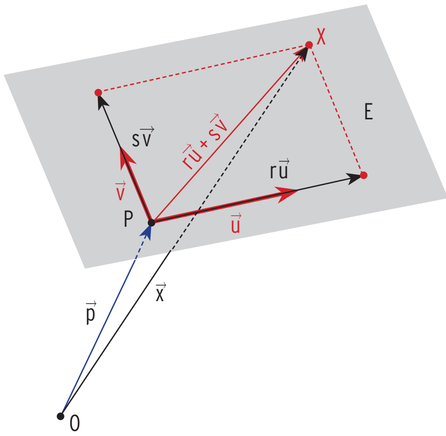
2.2 Ebenen

2.2.1 Ebenengleichung in Parameterform

mvurl.de/zg2q

Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt der Ebene E, die durch den Punkt P und die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ festgelegt ist.

Die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind nicht parallel.



Punkt-Richtungs-Form

Um die Ebene durch eine Gleichung zu beschreiben, überlegt man sich, wie ein Punkt auf E erreicht werden kann. Ein beliebiger Punkt X auf E hat den Ortsvektor $\overrightarrow{OX} = \vec{p} + r\vec{u} + s\vec{v}$. Für jede Wahl der Parameter r und s erhält man einen Ebenenpunkt X.

Ist P ein Punkt mit dem **Ortsvektor** $\vec{p}$ und sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei **nicht parallele** (nicht kollineare) **Richtungsvektoren**, dann kann eine Ebene E durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$E: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u} + s\vec{v};\ r, s \in \mathbb{R}.$$

Diese Form der Ebenengleichung nennt man **Parameterform** (oder Vektorform).
Da die Ebene durch einen Punkt und zwei Richtungsvektoren bestimmt ist, heißt diese Form der Ebenengleichung auch „**Punkt-Richtungs-Form**“.

Bemerkung: Der Vektor $\vec{p}$ heißt **Stützvektor (Aufpunktvektor)**.
Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind die **Richtungsvektoren** oder **Spannvektoren** der Ebene E.
Man sagt: Die Ebene E wird von den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ „**aufgespannt**“.

Beispiel

Die Ebene E enthält den Punkt P(1 | 3 | −3) und wird von den Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ aufgespannt. Geben Sie eine Gleichung von E an.

Lösung

Mit $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R}.$

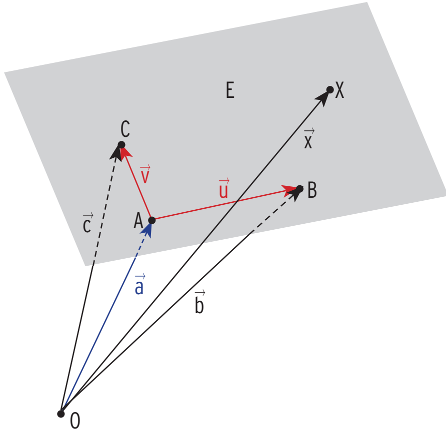
mvurl.de/x5t8

Drei-Punkte-Form

Die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ erhält man als Differenz der Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ bzw. $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OC}$.

Es gilt: $\vec{u} = \vec{b} - \vec{a}$ bzw. $\vec{v} = \vec{c} - \vec{a}$

oder: $\vec{u} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ bzw. $\vec{v} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$



Die Punkte A, B und C liegen nicht auf einer Geraden und die zugehörigen Ortsvektoren sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Die Ebene E, welche diese drei Punkte enthält, kann durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$E\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC};\quad r, s \in \mathbb{R}$$

bzw.

$$E\colon \vec{x} = \vec{a} + r(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a});\quad r, s \in \mathbb{R}.$$

Diese Parameterdarstellung heißt „**Drei-Punkte-Form**“ der Ebenengleichung.

Beispiel

Die Punkte A(2 | 1 | 3), B(–1 | –4 | 0) und C(5 | –6 | 0) legen eine Ebene E fest. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E.

Lösung

Möglicher **Stützvektor**: $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Bestimmung von zwei **Richtungsvektoren** $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

Richtungsvektor $\vec{u}$: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor $\vec{v}$: $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$

Punkt-Richtungs-Form von E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R}$

Die Richtungsvektoren sind nicht parallel, da es kein $k \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Die drei Punkte liegen nicht auf einer Geraden.
A, B und C spannen somit eine Ebene auf.

Weitere Beispiele zur Parameterform

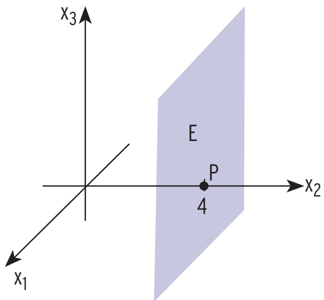
Beispiel 1

Eine Ebene E verläuft parallel zur parallel zur x_1x_3-Ebene durch P(0 | 4 | 0). Geben Sie eine Gleichung von E an.

Lösung

Die x_1x_3-Ebene wird z.B. von der Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ aufgespannt.

Mit dem Aufpunkt P ergibt sich die Gleichung von E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

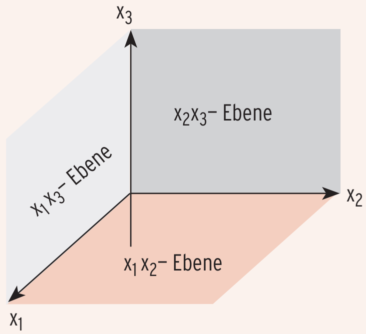


Koordinatenebenen

x_1x_2-Ebene: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

x_1x_3-Ebene: $x = r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

x_2x_3-Ebene: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$



Beispiel 2

Beschreiben Sie die Lage der Ebene E im Koordinatensystem.

a) E: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$;   b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

Lösung

a) E verläuft durch den Ursprung; E ist die x_1x_2-Ebene ($x_3 = 0$).

b) E verläuft parallel zur x_1x_3-Ebene durch P(1 | 3 | 1).
E ist die x_1x_3-Ebene (die 2. Koordinate der Richtungsvetoren ist null) um 3 in x_2-Richtung verschoben.

mvurl.de/kbmv

Beispiel 3

Gegeben sind der Punkt C(0 | 3 | −5) und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass der Punkt C und die Gerade g eine Ebene E aufspannen und geben Sie eine Gleichung von E an.

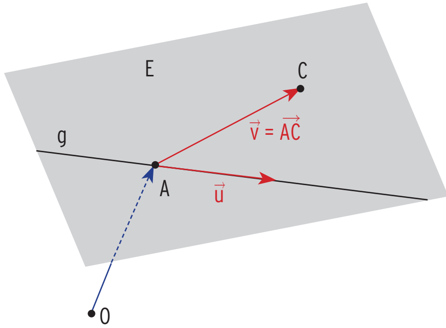
Lösung

Der Punkt C und die Gerade g spannen eine Ebene auf, wenn C nicht auf g liegt.
„Punktprobe" mit C:

Ansatz: $\overrightarrow{OC} = \vec{x}$ $\quad \begin{pmatrix}0\\3\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

2. Zeile: 3 = 5 falsche Aussage, d. h., $C \notin g$.

Als Richtungsvektoren können $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ mit A(1 | 5 | 2) gewählt werden.



Gleichung von E: $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\left(\begin{pmatrix}0\\3\\-5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}\right)$

$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\-2\\-7\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

Beispiel 4

Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-5\\1\\3\end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.
Die Geraden g und h haben genau einen Schnittpunkt. Bestimmen Sie diesen Schnittpunkt. Geben Sie die Gleichung einer Ebene an, die beide Geraden enthält.

Lösung

Schnittpunkt durch Gleichsetzen: $\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-5\\1\\3\end{pmatrix}$

LGS für r und s:

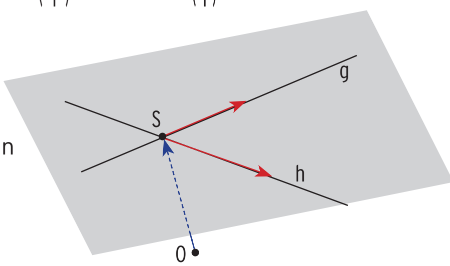
$$\begin{aligned} 1 + 2r &= -2 - 5s \\ -3 + 4r &= 2 + s \\ r &= 4 + 3s \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2r + 5s &= -3 \\ 4r - s &= 5 \\ r - 3s &= 4 \end{aligned}$$

Lösung des Gleichungssystems: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -11 & 11 \\ 0 & 11 & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -11 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

ergibt r = 1; s = −1
Schnittpunkt durch Einsetzen von r = 1 in $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ ergibt $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$.
Schnittpunkt S(3 | 1 | 1)

Gleichung von E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-5\\1\\3\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

Hinweis: Schneiden sich zwei Geraden g und h, kann man jeden Punkt von g oder von h als Aufpunkt der Ebene E wählen.



Beispiel 5

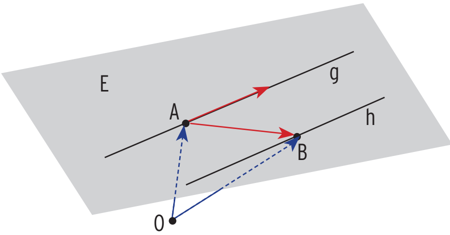
Die parallelen Geraden g und h mit g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$, spannen eine Ebene E auf.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E.

Lösung

2. Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ (Verbindungsvektor der Aufpunkte A und B)

Mit der Gleichung von g und dem 2. Richtungsvektor ergibt sich eine Gleichung von E.

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$



Beispiel 6

Gegeben ist die Ebene E durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$.

a) Überprüfen Sie, ob der Punkt D(5 | 0 | −3) auf E liegt.
b) Geben Sie die Gleichung einer Geraden an, die in der Ebene E liegt.

Lösung

a) „Punktprobe" mit D

Zum Punkt D(5 | 0 | − 3) gehört der Ortsvektor $\vec{d} = \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Wenn der Punkt D auf E liegt, muss es Zahlen r und s geben, sodass gilt: $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Umformung: $r\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

LGS für r und s
Hinweis: Das LGS enthält drei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

LGS umformen: $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Das LGS ist (eindeutig) lösbar: $s = -2;\ r = -3$
Der Punkt D liegt auf E.

b) Die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$, liegt in der Ebene E.

2.2.2 Spurpunkte und Spurgeraden einer Ebene

Beispiel 1

Gegeben ist die Ebene E durch ihre Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von E und den Koordinatenachsen.
Veranschaulichen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem.

b) Geben Sie die Gleichungen der Schnittgeraden von E mit den Koordinatenebenen an.

Lösung

a) **Schnittpunkt von E und x_1-Achse**

Für alle Punkte auf der x_1-Achse gilt $x_2 = x_3 = 0$.

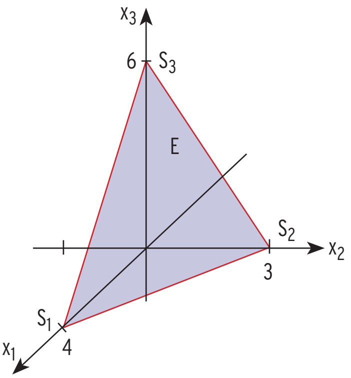
Aus der Parameterform:	$2 - 2r - s = 0$
	$2 + r - s = 0$
Lösung des Gleichungssystems:	$r = 0;\ s = 2$
Einsetzen in $x_1 = 2r + 2s$ ergibt:	$x_1 = 4$
Schnittpunkt S_1:	$S_1(4 \mid 0 \mid 0)$

Dieser Punkt heißt **Spurpunkt** der Ebene mit der x_1-Achse.

Schnittpunkt von E und x_2-Achse

Für alle Punkte auf der x_2-Achse gilt $x_1 = x_3 = 0$.

Aus der Parameterform:	$2r + 2s = 0$
	$2 + r - s = 0$
Lösung des Gleichungssystems:	$r = -1;\ s = 1$
Einsetzen in $x_2 = 2 - 2r - s$ ergibt:	$x_2 = 3$
Man erhält den Spurpunkt S_2:	$S_2(0 \mid 3 \mid 0)$



Schnittpunkt von E und x_3-Achse

Für alle Punkte auf der x_3-Achse gilt	$x_1 = x_2 = 0$.
Spurpunkt S_3:	$S_3(0 \mid 0 \mid 6)$

Hinweis: Die Ebene E schneidet alle drei Koordinatenachsen.
Mithilfe dieser drei Spurpunkte veranschaulicht man die Ebene E im Koordinatensystem.

b) Die Schnittgerade s_{12} von E und der x_1x_2-Ebene verläuft durch die Punkte $S_1(4 \mid 0 \mid 0)$ und $S_2(0 \mid 3 \mid 0)$.

Richtungsvektor $\vec{u}$ von s_{12}:

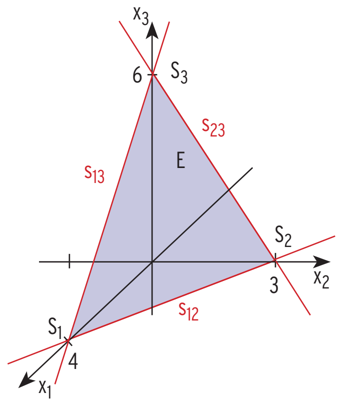
$$\vec{u} = \overrightarrow{OS_2} - \overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Stützvektor $\vec{p} = \overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Geradengleichung von s_{12}

$$s_{12}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}.$$

Diese Schnittgerade s_{12} heißt **Spurgerade von E** mit der x_1x_2-Ebene.



Spurgerade s_{13} von E mit der x_1x_3- Ebene durch $S_1(4 \mid 0 \mid 0)$ und $S_3(0 \mid 0 \mid 6)$

$$s_{13}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + s\left(\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$$

Spurgerade s_{23} von E mit der x_2x_3- Ebene durch $S_2(0 \mid 3 \mid 0)$ und $S_3(0 \mid 0 \mid 6)$

$$s_{23}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-3\\6\end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

Schneiden sich eine **Ebene** E und eine **Koordinatenachse** in einem Punkt, so heißt dieser Punkt **Spurpunkt** der **Ebene** E.

Bedingung für den Spurpunkt der Ebene E

S_1 auf der x_1-Achse: $x_2 = x_3 = 0$

S_2 auf der x_2-Achse: $x_1 = x_3 = 0$

S_3 auf der x_3-Achse: $x_1 = x_2 = 0$

Die Schnittgerade einer Ebene E mit einer Koordinatenebene heißt **Spurgerade** von E.

Beispiel 2

Die Ebene E ist gegeben durch ihre Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Spurpunkte. Beschreiben Sie die Lage der Ebene.

b) Skizzieren Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem.

Lösung

a) Schnittpunkt von E und x_1-Achse

Der Aufpunkt ist Spurpunkt S_1: $S_1(2 \mid 0 \mid 0)$

Schnittpunkt von E und x_2-Achse

Bedingung: $x_1 = x_3 = 0$ $\quad 2 - r = 0 \Rightarrow r = 2$

$s = 0$

Einsetzen ergibt: $x_2 = 4$

Spurpunkt S_2: $S_2(0 \mid 4 \mid 0)$

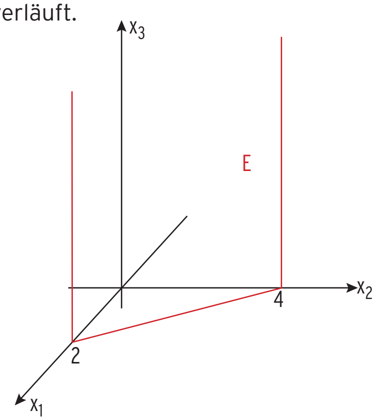
Einen Schnittpunkt von E und x_3-Achse gibt es nicht, da ein Richtungsvektor von E parallel zur x_3-Achse verläuft.

Die Ebene E verläuft parallel zur x_3-Achse.

Die Ebene E steht senkrecht auf der $x_1\,x_2$-Ebene.

b) Für eine Skizze ist es vorteilhaft, wenn man die Achsenschnittpunkte kennt.

Skizze:



Aufgaben

1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}75 \\ 0{,}75 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$, sodass nur ganze Zahlen in den Richtungsvektoren (Spannvektoren) auftreten.

2 Geben Sie zwei verschiedene Parameterdarstellungen der Ebene E durch A, B und C an.

a) A(1 | 1 | 1); B(3 | 1 | 2); C(0 | 3 | 3)

b) A(0 | 0 | 0); B(−2 | 4 | 1); C(3 | −1 | 3)

3 Gegeben ist die Ebene E durch die Gleichung E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$.

Prüfen Sie, ob die Punkte A(8 | −6 | 9) und B(12 | 1 | 1) in E liegen.

4 Welche Ebene E enthält den Punkt P und die Gerade g?

a) P(1 | 1 | −3); g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $k \in \mathbb{R}$

b) P(2 | 2 | 2); g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$; $k \in \mathbb{R}$

5 Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass die Geraden g und h eine Ebene E aufspannen und bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameterform.

6 Untersuchen Sie, ob folgende 4 Punkte in einer Ebene liegen.

a) A(1 | 1 | 2); B(3 | 3 | 3); C(1 | 4 | 5); D(3 | 6 | 6)

b) A(0 | 2 | −2); B(2 | −2 | 4); C(6 | −4 | 12); D(3 | −3 | 6)

7 Gegeben sind die Geraden g und h durch g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $k \in \mathbb{R}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass die Geraden g und h parallel und verschieden sind.

b) g und h legen eine Ebene E fest. Bestimmen Sie eine Gleichung von E.

8 Gegeben sind die Punkte A(4 | 2 | 1), B(8 | 6 | 1), C(6 | 8 | 1), D(2 | 4 | 1) und P(3,5 | 4,5 | 1). Prüfen Sie, ob der Punkt P im Inneren des Rechtecks ABCD liegt.

9 Welche besondere Lage hat die Ebene mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$?

a) Zeichnen Sie diese Ebene in ein geeignetes Koordinatensystem ein.

b) Geben Sie einen Punkt an, der nicht auf der Ebene E liegt.

c) Geben Sie die Gleichung einer Geraden an, die in der Ebene E liegt.

10 Bestimmen Sie die Spurpunkte und die Spurgeraden der Ebene E.

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $u, v \in \mathbb{R}$

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

1 Die Punkte A(− 5|2|1) , B(− 2|3|− 1) und C(− 1|3|− 2) legen eine Ebene E fest.

Bestimmen Sie eine Parametergleichung von E.

2 Gegeben ist der Punkt P(4|6|4) und die Ebene $E : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$; $s, t \in \mathbb{R}$.

a) Weisen Sie nach, dass der Punkt P in der Ebene E liegt.

b) Eine Gerade g_1 liegt in der Ebene E, eine Gerade g_2 geht durch den Punkt P und hat keinen Schnittpunkt mit der x_1x_2-Ebene.

Geben Sie jeweils eine Gleichung der Geraden g_1 und g_2 an.

3 In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt C(2|3|3) und die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\3\\-1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt C nicht auf g liegt.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene durch C, die die Gerade g enthält.

4 Bestimmen Sie die Spurpunkte der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$.

Veranschaulichen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem.

5 Die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$ spannen eine Ebene E auf. Begründen Sie.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameterform.
Geben Sie den Schnittpunkt der Ebene mit der x_1-Achse an.

6 Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie die Spurgerade von E mit der x_2x_3-Ebene.

7 Die Ebene E hat nur die Spurpunkte A(5 | 0 | 0) und B(0 | −3 | 0).
Bestimmen Sie eine Gleichung von E.

2.3 Abstandsberechnungen

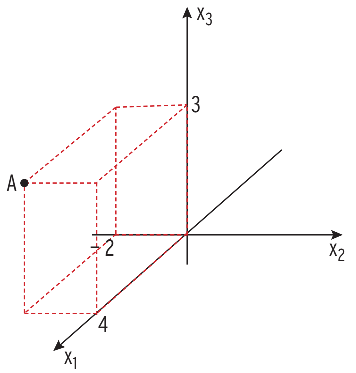
2.3.1 Abstand eines Punktes von einer Koordinatenebene

Beispiel

Berechnen Sie den Abstand des Punktes A(4 | −2 | 3) von den Koordinatenebenen.

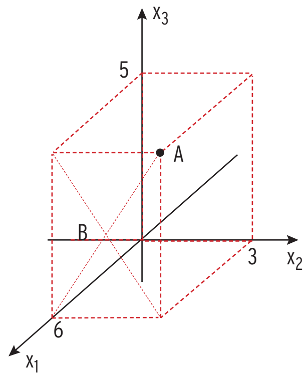
Lösung

Der Punkt A(4 | −2 | 3) hat die Koordinaten
$x_1 = 4$; $x_2 = -2$ und $x_3 = 3$.
$x_1 = 4$: A ist 4 LE von der x_2x_3-Ebene entfernt.
$x_2 = -2$: A ist 2 LE von der x_1x_3-Ebene entfernt.
$x_3 = 3$: A ist 3 LE von der x_1x_2-Ebene entfernt.



Die Koordinaten des Punktes geben die **kleinste Entfernung,** also den **Abstand** des Punktes von den Koordinatenebenen an.

Aufgaben



1 Geben Sie den Abstand des Punktes A(6 | 2 | −4) von den Koordinatenebenen an.

2 Geben Sie den Abstand der Punkte A und B aus der Abbildung von den Koordinatenebenen an.

3 Geben Sie drei Punkte an, die von der Ebene E: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$ einen Abstand von 6 LE haben.

4 Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Ebene E.

a) E: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$; A(1 | 2 | −3)

b) E: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$; A(−3 | 1 | −4)

c) E: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$; A(7 | −5 | 0)

d) E: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$; A(3 | −8 | −9)

5 Geben Sie zwei Punkte an,

a) die von der x_1x_3-Ebene einen Abstand von 5 LE haben.

b) die 4 LE senkrecht unter der x_1x_2-Ebene liegen.

c) die von A(0 | 2| −1) einen Abstand von 10 LE haben.

2.3.2 Abstand von zwei Punkten

Zwei Flugzeuge müssen einen Mindestabstand einhalten. Sind die Positionen der Flugzeuge (z. B. durch GPS) bekannt, so berechnet man den Abstand der beiden Punkte.
Der Abstand zwischen zwei Punkten A und B ist die Länge (der Betrag) des Vektors $\overrightarrow{AB}$.

Gegeben sind die zwei Punkte A $(a_1 \,|\, a_2 \,|\, a_3)$ und B $(b_1 \,|\, b_2 \,|\, b_3)$.
Für den **Abstand d der Punkte A und B** gilt:

$$d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Beispiel 1

Berechnen Sie den Abstand der Punkte A(−4 | −7 | 3) und B(5 | −3 | −2).

Lösung

Vektor $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Abstand d: $d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{9^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{122} = 11{,}05$

Beispiel 2

Gegeben sind die Punkte A(2 | 1 | 2), B(2 | 5 | 4) und C(2 | 3 | 0).
Zeigen Sie, das Dreieck ABC ist gleichschenklig, aber nicht gleichseitig.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

Lösung

Seite AB: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ Länge $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{20}$

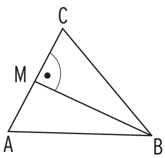
Seite AC: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ Länge $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{8}$

Seite BC: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ Länge $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{20}$

Die Seiten AB und BC sind gleichlang. Das Dreieck ABC ist gleichschenklig.
Mitte der Seite AC: M(2 | 2 | 1)

Höhe des Dreiecks: $\left|\overrightarrow{MB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{18}$

Flächeninhalt des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MB}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8 \cdot 18} = 6$



Beispiel 3

Gegeben sind die Punkte A(2 | 0 | 0), B(2 | 3 | 1) und C(6 | 2 | − 6).
Zeigen Sie, das Dreieck ABC ist rechtwinklig.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

Lösung

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$

Mithilfe des Skalarprodukts: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$

Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{56} = 11{,}83$

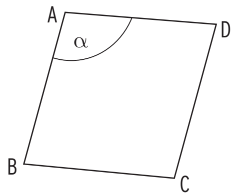
Beispiel 4

Gegeben sind die Punkte A(0| 0|0), B(− 3| 1|4), C(2| − 4|4) und D(5 | − 5| 0).

a) Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist und kein Rechteck.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms.

Lösung



a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\qquad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm,

wegen $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = -15 - 5 + 0 = -20 \neq 0$

Das Viereck ABCD ist kein Rechteck.

b) Flächeninhalt des Parallelogramms

$|\overrightarrow{AD}| = \left|\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{50}$; $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 1 + 16} = \sqrt{26}$

Winkel bei A: $\quad \cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|}$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{26}} = \frac{-20}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{26}}$$

ergibt $\quad \alpha = 123{,}69°$

in die Flächenformel einsetzen: $\quad A = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \sin(\alpha)$

$A = \sqrt{50} \cdot \sqrt{26} \cdot \sin(123{,}69°) = 30{,}0$

Hinweis: Das Dreieck ABC hat den Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \sin(\alpha)$.

Beispiel 5

Die Punkte P_1 und P_2 liegen auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$
und haben vom Punkt Q(0 | 2 | 1) den Abstand $3\sqrt{21}$.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2.

Lösung

Punkte auf g: P(1 + t | −2 − 4t | 3 + 2t)

Mit Q(0 | 2 | 1) ergibt sich: $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 1+t \\ -4-4t \\ 2+2t \end{pmatrix}$

Länge des Vektors: $\left|\overrightarrow{QP}\right| = \sqrt{(1+t)^2 + (-4-4t)^2 + (2+2t)^2}$

Radikand: $(1+t)^2 + (-4-4t)^2 + (2+2t)^2$

Zusammenfassung: $= 21t^2 + 42t + 21$

Bedingung für t: $\left|\overrightarrow{QP}\right| = 3\sqrt{21}$

Quadrieren ergibt: $21t^2 + 42t + 21 = 9 \cdot 21 \qquad | : 21$

Vereinfachung: $t^2 + 2t + 1 = 9$

$t^2 + 2t - 8 = 0$

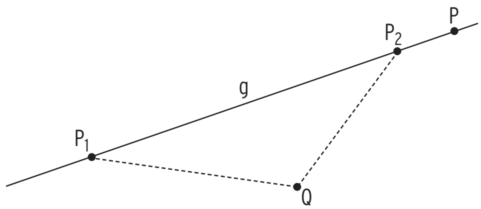
Lösungen: $t_1 = -4$; $t_2 = 2$

Einsetzen in P(1 + t | −2 − 4t | 3 + 2t):

$t_1 = -4$: $P_1(-3 \mid 14 \mid -5)$

$t_2 = 2$: $P_2(3 \mid -10 \mid 7)$

Die Punkte P_1 und P_2 haben von Q den Abstand $3\sqrt{21}$.

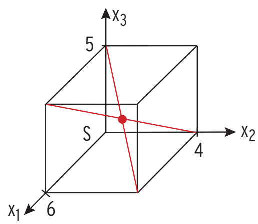


Aufgaben

1 Gegeben sind die Punkte A und B. Berechnen Sie den Abstand der Punkte A und B.

a) A(1 | −5 | 1), B(−3 | 0 | 6) **b)** A(−3 | −1 | 1), B(3 | 0 | −2)

2 Die Abbildung zeigt einen Quader.
S ist der Schnittpunkt der Raumdiagonalen.
Welchen Abstand hat S von den Eckpunkten des Quaders?



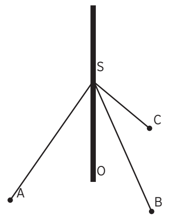
3 Zeigen Sie, dass die Punkte A(9 | 2 | 3), B(1 | 8 | 1) und C (1 | 2 | 1) ein rechtwinkliges Dreieck bilden.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

4 Die Punkte A(3|− 1| 1), B(3|2| 2) und C(1|1|0) sind die Eckpunkte eines Dreiecks.
Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist, aber nicht gleichseitig.

5 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Eckpunkte eines Vierecks vorgegeben: $A(3 \mid -2 \mid 1)$, $B(2 \mid 5 \mid 2)$, $C(-2 \mid 8 \mid 6)$, $D(-1 \mid 1 \mid 5)$.
Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist. Berechnen Sie die Seitenlängen, die Innenwinkel und den Flächeninhalt des Parallelogramms.

6 Das ebene Viereck ABCD mit $A(10 \mid 5 \mid 2)$, $B(3 \mid 6 \mid 4)$, $C(1 \mid 2 \mid 5)$ und $D(5 \mid 0 \mid 4)$ ist ein Drachen. Bestätigen Sie. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Drachens.

7 Ein Maibaum auf einem ebenen Dorfplatz soll an drei Seilen in den Punkten $A(1 \mid 2 \mid 0)$, $B(-2 \mid -1 \mid 0)$ und C am Boden gesichert werden. Die Seile werden außerdem in einem Punkt $S(0 \mid 0 \mid h)$ in der Höhe h (h in m) über dem Dorfplatz am Baum befestigt. Der Baum steht senkrecht zum Dorfplatz in $O(0 \mid 0 \mid 0)$.



a) S liegt nun in 3 m Höhe. An dem Seil AS werden farbige Bändchen befestigt. Jeweils zwei benachbarte Bändchen sind an Stellen angebracht, die einen Abstand von 30 cm haben. Wie viele Bändchen können maximal angebracht werden?

b) In welcher Höhe h müssen die Seile AS und BS am Baum befestigt werden, damit sie einen rechten Winkel einschließen?

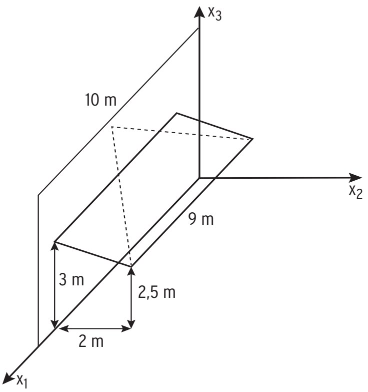
8 Im Anschauungsraum sind die Punkte $P(2 \mid 8 \mid 1)$, $Q(2 \mid 0 \mid -3)$ und $R(17 \mid 4 \mid -11)$ gegeben.
Weisen Sie nach, dass das Dreieck PQR rechtwinklig ist.
Bestimmen Sie einen weiteren Punkt T, sodass das Viereck PQRT ein Rechteck ist.
Zeigen Sie, dass dieses Rechteck kein Quadrat ist.

9 Die Punkte P_1 und P_2 liegen auf der Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ und haben vom Punkt $Q(3 \mid 0 \mid -1)$ den Abstand $\sqrt{14}$.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2.

10 An einer 10 m breiten Hauswand ist mittig ein 9 m breites rechteckiges Vordach in 3 m Höhe angebracht. In der Mitte der Hauswand befindet sich 5 m über dem Boden ein Haken, von dem aus zwei Drahtseile zu den äußeren Ecken des Vordaches gespannt sind. Weitere Maßangaben können der Abbildung entnommen werden.
Die Hauswand befindet sich in der x_1x_3-Ebene, der Erdboden in der x_1x_2-Ebene des eingezeichneten Koordinatensystems.

a) Berechnen Sie die Länge der Drahtseile.

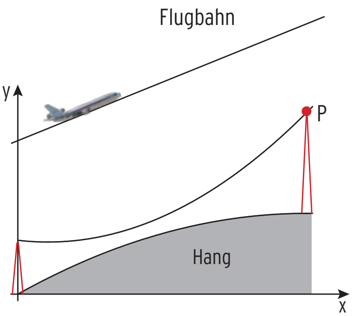
b) Das Vordach soll zusätzlich durch zwei Stangen mit der Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ abgestützt werden. Diese werden an den äußeren Ecken des Vordaches angebracht.
Bestimmen Sie die Verankerungspunkte der Stangen auf dem Erdboden.
Wie lang sind die Stangen?



mvurl.de/l9ts

2.3.3 Abstand eines Punktes von einer Geraden

Ein Flugzeug muss aus Sicherheitsgründen einen bestimmten Abstand von der Mastspitze P haben. Dazu muss man den Abstand des Punktes P von der Flugbahn berechnen. Der **Abstand** eines Punktes P von einer Geraden ist die **kleinste Entfernung** von P zur Geraden.



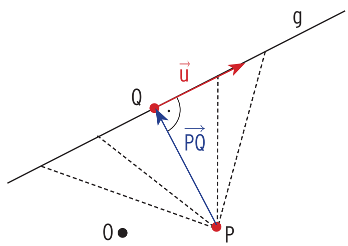
Beispiel

Berechnen Sie den Abstand des Punktes P(3 | 3 | 4) von der Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}.$

Lösung

Man sucht den Punkt Q auf g mit der kleinsten Entfernung zu P. Der Abstand von P und Q ist der Abstand von P zur Geraden g.



$\vec{x} = \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+t\\1+2t\\1+t\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}1+t\\1+2t\\1+t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t-2\\2t-2\\t-3\end{pmatrix}$

Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ steht senkrecht auf dem Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g.

Bedingung: $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$ $\qquad \begin{pmatrix}t-2\\2t-2\\t-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 0$

$t - 2 + 4t - 4 + t - 3 = 0$

Eine Gleichung in t: $\qquad 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1{,}5$

Einsetzen von t = 1,5 in $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}t-2\\2t-2\\t-3\end{pmatrix}$ ergibt: $\qquad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}-0{,}5\\1\\-1{,}5\end{pmatrix}$

Abstand: $\qquad \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(-0{,}5)^2 + 1^2 + (-1{,}5)^2} = \sqrt{3{,}5} = 1{,}87$

Vorgehensweise zur Berechnung des **Abstandes d eines Punktes P von der Geraden** $g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u};\ t \in \mathbb{R}$:

- Punkt Q auf der Geraden g in Abhängigkeit von t angeben.
- $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$ lösen, d. h. den t-Wert bestimmen.
- Für diesen t-Wert den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ bestimmen.
- Abstand $d = \left|\overrightarrow{PQ}\right|$ berechnen.

Hinweis: Der Abstand zweier paralleler Geraden g und h ist der Abstand eines beliebigen Punktes auf g von der Geraden h.

Aufgaben

a) b)

mvurl.de/sxfe

1 Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden g.

a) $P(2 \mid 3 \mid 0)$; $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

b) $P(0 \mid 0 \mid 0)$; $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

c) $P(2 \mid -3 \mid -1)$; $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

d) $P(9 \mid 0 \mid 17)$; $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

2 Berechnen Sie den Abstand der parallelen Geraden g und h.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$

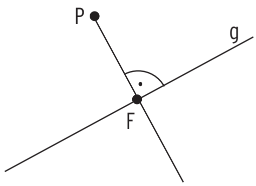
b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

3 Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B. Bestimmen Sie den Punkt F auf g so, dass der Vektor $\overrightarrow{FP}$ senkrecht auf g steht.
Der Punkt F heißt Lotfußpunkt.
Berechnen Sie die kleinste Entfernung des Punktes P von g.

a) $A(3 \mid 5 \mid 4)$, $B(1 \mid 3 \mid 4)$, $P(2 \mid 0 \mid 3)$

b) $A(3 \mid 0 \mid 0)$, $B(4 \mid 0 \mid 2)$, $P(0 \mid 2 \mid -1)$



4 Gegeben ist die Gerade g mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$. Der Punkt S liegt auf g.
Bestimmen Sie S so, dass der Abstand zum Punkt $A(9 \mid 0 \mid -3)$ 10 LE beträgt. Ist S der Lotfußpunkt der Lotgeraden von A auf die Gerade g? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

5 Eine Flugbahn wird durch die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $t \geq 0$, modelliert.
Der Punkt $P(2 \mid 3 \mid 0{,}4)$ beschreibt die Spitze eines Berges (Angaben im km). Ein Flugzeug muss einen Sicherheitsabstand von mindestens 1100 m einhalten. Überprüfen Sie, ob dieser Abstand eingehalten wird. Eine zu g parallele Flugbahn h hat von P den doppelten Abstand wie g von P. Geben Sie die Gleichung von h an.

6 Eine Radarstation mit einer Reichweite von 40 km befindet sich im Punkt $R(-9 \mid 100 \mid 1)$. Ein Flugzeug fliegt geradlinig von $A(6 \mid 5 \mid 4)$ nach $B(3 \mid 9 \mid 4)$ (Angaben in km).
Wird das Flugzug vom Radar erfasst?
Begründen Sie Ihre Antwort.

2.4 Volumenberechnungen

Beispiel 1

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ spannen einen Quader auf.

Überprüfen Sie und berechnen Sie das Volumen des Quaders.

Lösung

Die Vektoren stehen senkrecht aufeinander.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0;\ \vec{b} \cdot \vec{c} = 0;\ \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

Mit $|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{14};\ |\vec{b}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3};\ |\vec{c}| = \left|\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{42}$

ergibt sich das Volumen $V = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| = \sqrt{14 \cdot 3 \cdot 42} = 42$

Beispiel 2

Das Rechteck mit den Eckpunkten A(4|− 2|0), B(4|2 |0), C(− 4| 2| 0) und D ist die Grundfläche einer Pyramide mit Spitze S(0|0| 8).
Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide.

Lösung

Mit $|\overrightarrow{AB}| = 4$ und $|\overrightarrow{BC}| = 8$ ergibt sich der Flächeninhalt des Rechtecks ABCD: $G = 8 \cdot 4 = 32$
(Grundfläche der Pyramide)

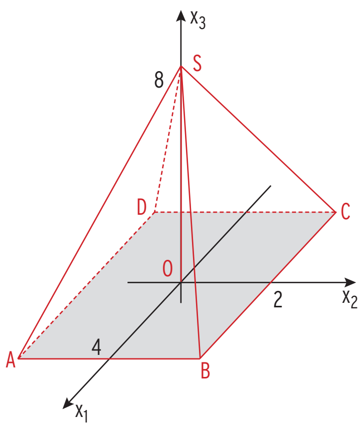
Pyramide
$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Mit der Höhe $h = |\overrightarrow{OS}| = 8$ ergibt sich das Volumen der Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 32 \cdot 8$$

$$V = \frac{256}{3}$$

Skizze:



Beispiel 3

➲ Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide OABC mit A(5|0|0), B(0|4 |0) und C(0| 0| 9).

Lösung

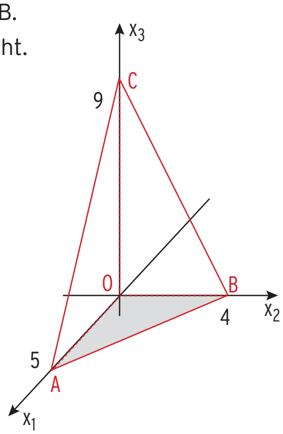
Die Grundfläche der Pyramide ist das rechtwinklige Dreieck OAB.
Die Seiten des Dreiecks OA und OB stehen aufeinander senkrecht.

Mit $|\overrightarrow{OA}| = 5$ und $|\overrightarrow{OB}| = 4$ ergibt sich der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks OAB: $G = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$
(Grundfläche der Pyramide)

Mit der Höhe $h = |\overrightarrow{OC}| = 9$ ergibt sich das Volumen der Pyramide: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 9 = 30$

Skizze:



Beispiel 4

➲ Eine Pyramide mit der Grundfläche OAB mit A(4 | 2 | 0) , B(− 3 | 1 | 0) und der Spitze in S(1 | 1 | 8) hat das Volumen V. Berechnen Sie V.

Lösung

Die Grundfläche ist ein Dreieck, das von den Vektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ aufgespannt wird.
Die Vektoren schließen den Winkel α ein.

Mit $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|\vec{a}| = \sqrt{20}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|\vec{b}| = \sqrt{10}$

$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

ergibt sich: $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-10}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{10}} \Rightarrow \alpha = 135°$

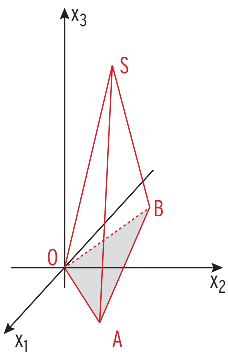
Berechnung der Grundfläche: $A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$

$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{10} \cdot \sin(135°) = 5$

Die Höhe der Pyramide ist 8,
da die Grundfläche in der x_1x_2-Ebene liegt.

Volumen: $V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{5 \cdot 8}{3} = \frac{40}{3}$

Das Volumen der Pyramide beträgt $\frac{40}{3}$ VE.



Aufgaben

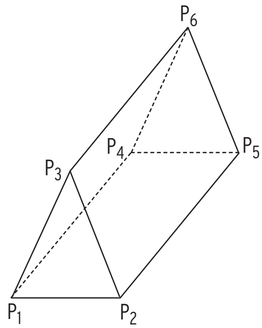
1 Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$ spannen einen Quader auf.

Überprüfen Sie und berechnen Sie dessen Volumen.

2 Gegeben sind die Punkte A(3 | 0 | 0), B(3 | 0 | 4), C(0 | 0 | 4) und S(2 | 7 | 2). Berechnen Sie das Volumen der Pyramide OABCS.

3 Das Rechteck mit den Eckpunkten A(2|6|0), B(− 3|6 |0), C(− 3| − 4| 0) und D ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S(1|1| 12). Geben Sie den fehlenden Eckpunkt der Grundfläche an und ermitteln Sie das Volumen der Pyramide.

4 Ein Zelt hat die Form eines senkrechten Primas, sein Boden ist rechteckig (vgl. Skizze).
Gegeben sind vier seiner Eckpunkte: P_1(2 | - 1 | 0); P_2(2 | 1 | 0);
P_3(2 | 0 | 3) und P_5(- 3 | 1 | 0).
Alle Längen sind in der Einheit Meter angegeben.
Skizze:



a) Bestimmen Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte.

b) Zeigen Sie, dass das Dreieck $P_1P_2\,P_3$ gleichschenklig ist.

c) Wie groß ist das Volumen des Zeltes?

5 Gegeben sind die Punkte A (5 | 4 | 0), B (1 | 4 | 0), C (1 | 0 | 0) und S (3 | 2 | 5).

a) Zeigen Sie, das das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig ist.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist.
Beschreiben Sie die besondere Lage des Quadrats im Koordinatensystem.

b) Das Quadrat ABCD bildet mit dem Punkt S eine senkrechte Pyramide.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.
Geben Sie die Koordinaten eines Punktes S* mit negativem x_3 -Wert an, so dass das Volumen der Pyramide 64 VE beträgt.

6 Die Grundfläche eines Spielplatzes liegt in der x_1x_2-Ebene. Auf ihm steht eine innen begehbare, senkrechte Pyramide aus Holz mit den Eckpunkten A(3 | 8 | 0), B(12 | 11| 0), C(9|20|0), D(0|17|0) und der Spitze S(6|14|10).

Paralleles Sonnenlicht fällt in Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ auf den Spielplatz.

a) Der Schatten der Pyramidenspitze fällt auf den Punkt S'(6 | $\frac{2}{3}$ |0). Überprüfen Sie.

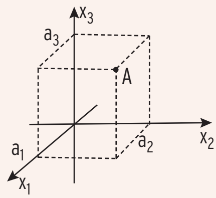
b) Zeigen Sie: Die Pyramide hat eine quadratische Grundfläche. Berechnen Sie den umbauten Raum.

c) Zum Bau werden zuerst die Seitenflächen der Pyramide vorbereitet. Berechnen Sie dazu die Länge einer Pyramidenkante und den Winkel α zwischen zwei Pyramidenkanten bei S.

Was man wissen sollte – über Abstände und Volumenberechnungen

Abstand d

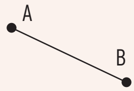
- **eines Punktes $A(a_1 \mid a_2 \mid a_3)$ von der Koordinatenebene:**
  Die Koordinaten des Punktes geben den **Abstand** des Punktes von den Koordinatenebenen an.



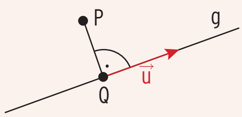
mvurl.de/rqgx

- **zwischen den Punkten $A(a_1 \mid a_2 \mid a_3)$ und $B(b_1 \mid b_2 \mid b_3)$:**

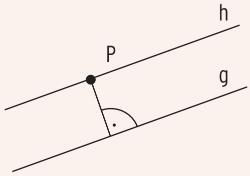
$$d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$



- **eines Punktes P von der Geraden g:**
  Mithilfe des Skalarprodukts $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$ oder einer Hilfsebene den Punkt auf der Geraden g bestimmen, der die kleinste Entfernung von P hat.

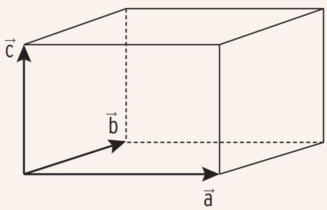


- **zweier paralleler Geraden g und h:**
  Einen Punkt P auf der Geraden h wählen und den Abstand des Punktes P von der Geraden g bestimmen.



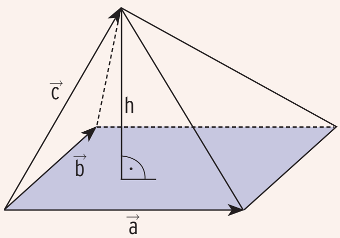
Volumen eines Quaders

$$V = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}|$$



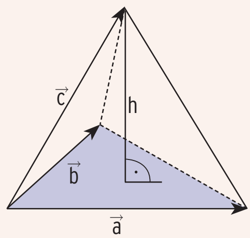
Volumen einer Pyramide

Grundfläche ist ein Parallelogramm



$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Grundfläche ist ein Dreieck



$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

1 Berechnen Sie den Abstand der Punkte A und B.

a) $A(6 \mid -2 \mid -5)$, $B(7 \mid -1 \mid -2)$ b) $A(0 \mid -2 \mid 0)$, $B(4 \mid -1 \mid 0)$

2 Zeigen Sie: Der Abstand des Punktes $P(3 \mid 0 \mid 1)$ von der Geraden g mit der Gleichung

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, beträgt $\sqrt{2}$.

3 Gegeben sind die Geraden g und h durch g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

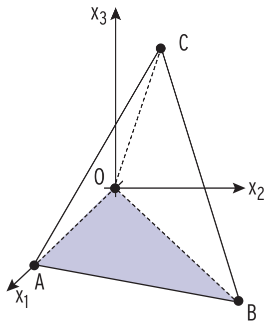
und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie den Abstand von g und h.

4 Zeigen Sie: Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 17 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ spannen einen Quader auf.

Berechnen Sie dessen Volumen.

5 Die Punkte $O(0 \mid 0 \mid 0)$, $A(4 \mid 0 \mid 0)$, $B(5 \mid 3 \mid 0)$ und $C(-2 \mid 2 \mid 4)$ sind die Eckpunkte einer Pyramide.
Ermitteln Sie die Höhe und das Volumen dieser Pyramide.



6 Im Anschauungsraum sind die Punkte $A(6 \mid 0 \mid -2)$, $B(1 \mid 0 \mid -2)$, $C(1 \mid 0 \mid 3)$, $D(6 \mid 0 \mid 3)$ und $S(3{,}5 \mid 5 \mid 5{,}5)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, C, D und S eine Pyramide mit der quadratischen Grundfläche ABCD bilden.

b) Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide ABCDS.

c) Bestimmen Sie einen Punkt S‘ als Spitze der Pyramide ABCDS‘ so, dass ihre Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind

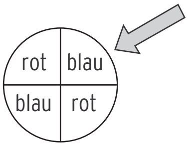
Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

1 Marc hat 9 Freunde aus seinem Hockeyverein. Aus Platzgründen kann er aber nur 5 auf einmal zum Grillen einladen

a) Wie viele Möglichkeiten der Einladung hat Marc?

b) Zwei seiner Freunde wollen nicht zusammentreffen. Wie viele Möglichkeiten bleiben Marc?

c) Auf wie viele Arten können die 5 Freunde an einem langen Tisch Platz nehmen?



2 Marc und Jannik haben sich folgendes Glücksspiel mit dem nebenstehend skizzierten Glücksrad ausgedacht: Sie drehen abwechselnd je zweimal das Glücksrad.

- Marc gewinnt (und Jannik verliert), wenn insgesamt zweimal „rot“ erscheint und die anderen beiden Male „blau“.
- Jannik gewinnt (und Marc verliert), wenn genau dreimal „rot“ erscheint und nur einmal „blau“ oder umgekehrt genau dreimal „blau“ erscheint und nur einmal „rot“.
- In den übrigen Fällen endet das Spiel unentschieden.

a) Bestimmen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeit für Marc und die für Jannik.

b) Am ersten Ferientag spielen die beiden um Geld. Jannik setzt pro Spiel 1 € und Marc 80 Cent. Der Gewinner erhält beide Einsätze, im unentschiedenen Fall erhält jeder seinen Einsatz zurück. Berechnen Sie Janniks mittleren Gewinn pro Spiel.

3 Zur Qualitätskontrolle wird eine Längenmessung bei Rohren durchgeführt. Dabei ergibt sich die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x_i (Länge in cm)	3,0	3,1	3,2
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,5

Berechnen Sie die Standardabweichung.

4 Die Firma Hofmann stellt gehärtete Wellen her.
Bei der Produktion der Wellen treten erfahrungsgemäß folgende Fehler auf:

	Welle ist zu lang ohne Härtefehler	Härtefehler
Wahrscheinlichkeit	3 %	4 %

Für die Wellen ohne Mängel wird ein Preis von 95 € erzielt. Für die Wellen, die zu lang und ohne Härtefehler sind, kann noch ein Preis von 35 € erzielt werden. Die Wellen mit Härtefehler müssen entsorgt werden. Dabei entstehen Kosten von 55 €.
Berechnen Sie den durchschnittlich zu erwartenden Erlös.

Was man wissen sollte – über Zufall und Wahrscheinlichkeit

Ergebnismenge eines Zufallsexperiments: $S = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$

Ereignis A: Teilmenge A der Ergebnismenge S

$A \cup \overline{A} = S$ $\quad$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$

$A \cup S = S$ $\quad$ $A \cap S = A$

Wahrscheinlichkeit P eines Ereignisses A: $0 \leq P(A) \leq 1$

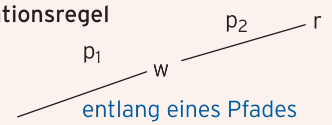
Gegenereignis $\overline{A}$: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

Laplace-Formel: $P(E) = \dfrac{\text{Anzahl der Ergebnisse, bei denen E eintritt}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$

Kurzschreibweise $P(E) = \dfrac{g}{m} = \dfrac{\text{günstig}}{\text{möglich}}$

Berechnungen von Wahrscheinlichkeiten mit dem Baumdiagramm

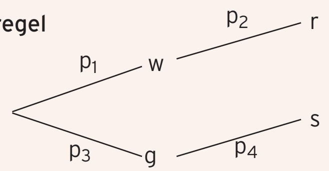
Pfadmultiplikationsregel



$P(w \wedge r) = p_1 \cdot p_2$

und Wahrscheinlichkeiten multiplizieren

Pfadadditionsregel



entlang mehrerer Pfade

$P(wr \vee gs) = p_1 \cdot p_2 + p_3 \cdot p_4$

oder Wahrscheinlichkeiten addieren

Zusammengesetzte Ereignisse

Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

wenn $A \cap B = \emptyset$ $\quad$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$

A und B stochastisch **unabhängig**: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Zufallsvariable X mit den Werten $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X: $x_i \mapsto P(X = x_i)$

Erwartungswert von X: $E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n)$

Varianz von X: $\sigma^2 = (x_1 - E(X))^2 \cdot P(X = x_1) + \dots + (x_n - E(X))^2 \cdot P(X = x_n)$

Standardabweichung von X: $\sigma = \sqrt{\text{Varianz}}$

2 Binomialverteilung

Die Binomialverteilung ist eine der wichtigsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Bernoulli-Experimente, Versuche, die jeweils genau zwei mögliche Ergebnisse haben, (Erfolg oder Misserfolg) sind im Alltag weit verbreitet. Bei der Materialprüfung entscheidet man defekt oder nicht defekt, bei der Verlosung gibt es einen Gewinn oder eine Niete.

mvurl.de/1mou

Qualifikationen & Kompetenzen

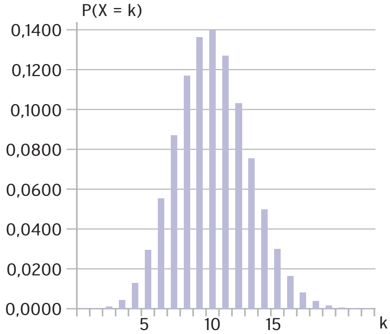
- Binomialverteilungen untersuchen und interpretieren
- Erwartungswert und Standardabweichung berechnen
- Erwartungswert interpretieren

Beispiel 1

Produktion von Vasen

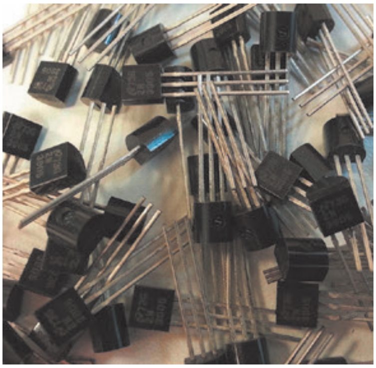
Qualitätskontrolle

Vasen werden nach dem Brennen kontrolliert. Man entnimmt eine Stichprobe, um die Verteilung der Anzahl der defekten Vasen zu bestimmen.
Die Auswertung der Stichprobe erfolgt mit der Binomialverteilung.



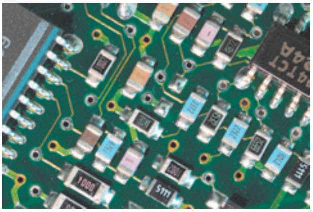
Beispiel 2

Transistorenherstellung



Stichprobe

Wieviele defekte Transistoren befinden sich voraussichtlich auf der Platine?



2.1 Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Ketten

Im Folgenden werden Zufallsexperimente betrachtet, die nur **zwei Ergebnisse** haben. Die beiden Ergebnisse werden häufig „Treffer" oder „Erfolg" (E) und „Niete" oder „Fehlschlag" ($\overline{E}$) genannt. Ein solches Experiment wird als **Bernoulli-Experiment** bezeichnet.

Beispiele für **Bernoulli-Experimente**
- Münzwurf: Wappen (E) – Zahl ($\overline{E}$)
- Materialprüfung: defekt (E) – nicht defekt ($\overline{E}$)
- Qualitätsprüfung: maßhaltig (E) – nicht maßhaltig ($\overline{E}$)
- Tombola: Gewinn (E) – Niete ($\overline{E}$)


Bernoulli, Jakob, 1655 bis 1705

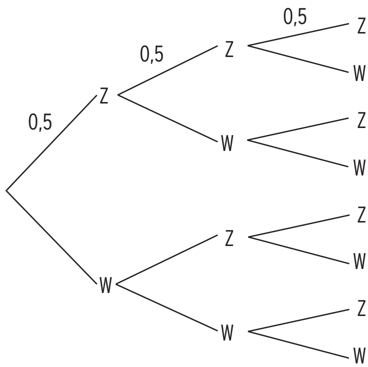
Ein Zufallsexperiment, bei dem nur zwei Ergebnisse (E und $\overline{E}$) betrachtet werden, heißt

Bernoulli-Experiment.

Eine Münze wird dreimal hintereinander geworfen. Jeder Wurf ist ein Bernoulli-Experiment mit den Ergebnissen Wappen (W) oder Zahl (Z). Die einzelnen Würfe (Durchführungen des Experiments) beeinflussen sich nicht gegenseitig, sie sind **voneinander unabhängig,** d. h., die Trefferwahrscheinlichkeit ändert sich nicht.
Das dreimalige Werfen wird als ein Zufallsexperiment aufgefasst, man spricht in diesem Fall von einer **Bernoulli-Kette der Länge 3.**

Baumdiagramm

Ein Ergebnis lässt sich darstellen als Tripel, z. B. (WWZ).



Ein Zufallsexperiment, das aus n unabhängigen Durchführungen eines

Bernoulli-Experiments besteht, heißt **Bernoulli-Kette** der Länge n.

Bemerkung: Ziehungen **ohne Zurücklegen** bilden **keine Bernoulli-Kette,** da sich die Wahrscheinlichkeit nach jedem Zug ändert.

Beispiel

Ein Unternehmen produziert Ventile. 4 % der Ventile sind defekt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 defekte Ventile entnommen werden.

a) Die Qualitätskontrolle entnimmt 4 Ventile aus einem Behälter mit 100 Ventilen.

b) Aus der laufenden Produktion werden 4 Ventile entnommen.

Lösung

X: Anzahl der defekten Ventile

a) Nach jeder Ziehung ändert sich die Wahrscheinlichkeit für ein defektes Ventil.
Es wird **ohne Zurücklegen** gezogen.
$P(X = 2) = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{4}{100} \cdot \frac{3}{99} \cdot \frac{96}{98} \cdot \frac{95}{97} = 0{,}0070$

b) Nach jeder Ziehung bleibt die Wahrscheinlichkeit für ein defektes Ventil erhalten.
Die Ziehung entspricht einer Ziehung **mit Zurücklegen**.
Es liegt eine Bernoulli-Kette der Länge 4 vor:
$P(X = 2) = 6 \cdot 0{,}04^2 \cdot 0{,}96^2 = 0{,}0088$

Aufgaben

1 Überprüfen Sie, ob es sich bei den genannten Zufallsexperimenten um ein Bernoulli-Experiment handelt. Sollte dies zutreffen, bestimmen Sie die Parameter n und p.

a) Ein idealer Würfel wird viermal geworfen.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Fünfen.

b) In einer Urne liegen vier rote, drei schwarze und eine gelbe Kugel. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. X beschreibt die Anzahl der gezogenen roten Kugeln.

c) Zu einer Ausfahrt in die Berge mit historischen Pkw treffen sich sieben Oldtimerfreunde.
Ein Oldtimer fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}2$ aus.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der ausgefallenen Oldtimer auf der Tour.

d) Ein Glücksrad mit 3 gleichgroßen Feldern in den Farben rot, grün und blau wird sechsmal gedreht. X beschreibt, wie oft der Zeiger auf rot stehen bleibt.

e) Der laufenden Produktion werden 25 Schrauben entnommen.
X ist die Anzahl der defekten Schrauben.
Aus Erfahrung weiß man, dass 2 % der Schrauben defekt sind.

2 In einer Urne liegen 6 rote und 2 gelbe Kugeln. Es werden drei Kugeln mit Zurücklegen bzw. ohne Zurücklegen gezogen.
Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 2 rote Kugeln gezogen werden. Liegt eine Bernoulli-Kette vor?

mvurl.de/szg2

mvurl.de/uiqo

2.2 Die Bernoulli-Formel

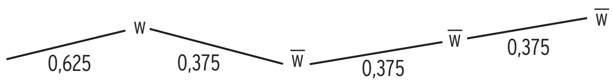
Beispiel 1

In einer Urne befinden sich 5 weiße und 3 Kugeln anderer Farbe. Es wird viermal eine Kugel **mit Zurücklegen** gezogen und jedesmal die Farbe notiert.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln an.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Lösung

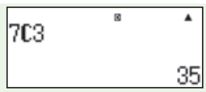
Die Ziehungen sind unabhängig. Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette der Länge 4.

Die Wahrscheinlichkeit für „Weiße Kugel" (Treffer) beträgt jedesmal $p = 0{,}625$ und für „Nichtweiße Kugel" $q = 1 - p = 0{,}375$.
Die Wahrscheinlichkeit für z. B. $(w\,\overline{w}\,\overline{w}\,\overline{w})$ beträgt $P = 0{,}625^1 \cdot 0{,}375^3$.



Das Ergebnis $(\overline{w}\,w\,\overline{w}\,\overline{w})$ hat dieselbe Wahrscheinlichkeit.
Die weiße Kugel kann an 4 verschiedenen Stellen notiert werden. Die Wahrscheinlichkeit **für eine weiße Kugel** beträgt somit: $P(X = 1) = 4 \cdot 0{,}625^1 \cdot 0{,}375^3 \approx 0{,}132$

Wahrscheinlichkeit für zwei weiße Kugeln
Die Wahrscheinlichkeit für z. B. $(w\,w\,\overline{w}\,\overline{w})$ beträgt $P = 0{,}625^2 \cdot 0{,}375^2$.
Das Ergebnis $(w\,\overline{w}\,w\,\overline{w})$ hat dieselbe Wahrscheinlichkeit.
Mit zwei weißen Kugeln gibt es $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6 = \binom{4}{2}$ Ergebnisse.
(4 über 2; **Binomialkoeffizient)**
Die Wahrscheinlichkeit **für zwei weiße Kugeln** beträgt somit
$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}625^2 \cdot 0{,}375^2 \approx 0{,}330$.



$\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$

Weitere Wahrscheinlichkeiten
mithilfe des Binomialkoeffizienten:

$P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0{,}625^3 \cdot 0{,}375^1 = 4 \cdot 0{,}625^3 \cdot 0{,}375^1 \approx 0{,}366$

$P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot 0{,}625^4 \cdot 0{,}375^0 = 1 \cdot 0{,}625^4 \cdot 0{,}375^0 \approx 0{,}152$

$P(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot 0{,}625^0 \cdot 0{,}375^4 = 1 \cdot 0{,}625^0 \cdot 0{,}375^4 \approx 0{,}020$ mit $\binom{4}{0} = 1$

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ (gelesen: n über k)

mit $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ (gelesen: n Fakultät)

Festlegung: $0! = 1$

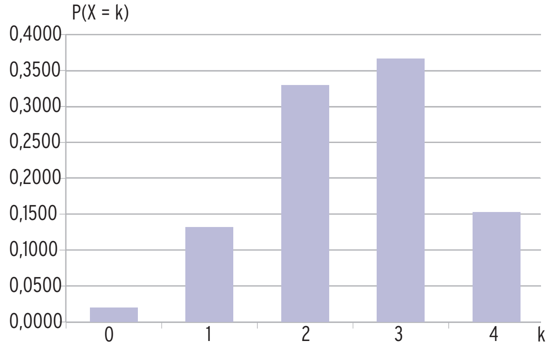
Hinweis: $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{n} = 1$

Beispiele: $\binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190$; $\binom{50}{0} = 1$

Wahrscheinlichkeitsverteilung

k	0	1	2	3	4
P (X = k)	$\binom{4}{0}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^4$ $\approx 0{,}020$	$\binom{4}{1}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^3$ $\approx 0{,}132$	$\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2$ $\approx 0{,}330$	$\binom{4}{3}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^1$ $\approx 0{,}366$	$\binom{4}{4}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^0$ $\approx 0{,}152$

Grafische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung:
x-Achse: Anzahl der Treffer k
y-Achse: Wahrscheinlichkeit P (X = k)



Formel von Bernoulli
Die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Durchführungen eines Bernoulli-Experiments genau k-mal das Ereignis E (der Treffer E mit $P(E) = p$) eintritt, ist gegeben durch:
$P(X = k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Treffer.

Schreibweise: $P(X = 3) = B_{4;\frac{5}{8}}(3)$

Anzahl der Ziehungen   Wahrscheinlichkeit für Treffer   Anzahl der Treffer

Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Trefferwahrscheinlichkeit p bei 4 Ziehungen

k	0	1	2	3	4
P (X = k)	$\binom{4}{0}\cdot p^0(1-p)^4$	$\binom{4}{1}\cdot p^1(1-p)^3$	$\binom{4}{2}\cdot p^2(1-p)^2$	$\binom{4}{3}\cdot p^3(1-p)^1$	$\binom{4}{4}\cdot p^4(1-p)^0$

Gegeben ist eine **Bernoulli-Kette** der Länge n für die Trefferwahrscheinlichkeit p.
Ist X die Anzahl der Treffer, so heißt die **Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X Binomialverteilung.**
Diese Verteilung kann in Tabellenform angegeben werden.

Bemerkung: Für P(X = k) schreibt man auch $\mathbf{B_{n;p}(k)}$.
Die Zufallsvariable X ist **binomialverteilt. X ist $\mathbf{B_{n;p}}$-verteilt.**
Da X nur ganzzahlige Werte annimmt, ist die Binomialverteilung eine **diskrete** Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Beispiel 2

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 4$ und $p = 0{,}6$.
Berechnen Sie $P(X = 0)$ bis $P(X = 4)$ mithilfe der Bernoulli-Formel.
Vergleichen Sie die Werte.

Lösung

X ist $B_{4;\,0{,}6}$-verteilt.

$P(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^4 = 1 \cdot 0{,}4^4 = 0{,}0256$

$P(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^3 = 4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}064 = 0{,}1536$

$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^2 = 6 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}16 = 0{,}3456$

$P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^1 = 4 \cdot 0{,}216 \cdot 0{,}4 = 0{,}3456$

$P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^0 = 1 \cdot 0{,}1296 \cdot 1 = 0{,}1296$

Die Wahrscheinlichkeiten für $X = 2$ und $X = 3$ sind gleich groß.

Beispiel 3

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}2$.
Berechnen Sie $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ und $P(X = 3)$.
Stellen Sie die Binomialverteilung grafisch dar. Vergleichen Sie.

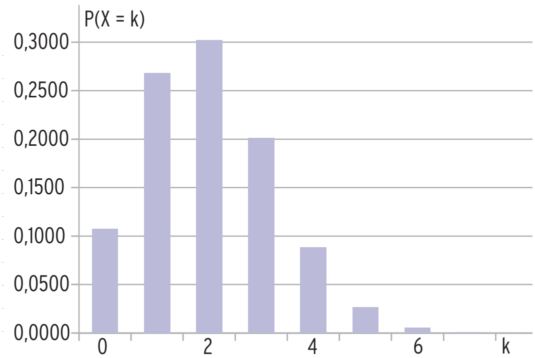
Lösung

X ist $B_{10;\,0{,}2}$-verteilt.

$P(X = 1) = B_{10;\,0{,}2}(1) = 0{,}2684$

$P(X = 2) = B_{10;\,0{,}2}(2) = 0{,}3020$

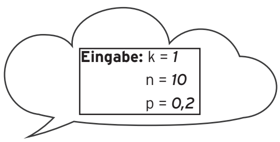
$P(X = 3) = B_{10;\,0{,}2}(3) = 0{,}2013$



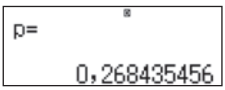
Der Vergleich ergibt: $P(X = 2)$ ist der größte Wahrscheinlichkeitswert.

Berechnung mit dem WTR

$P(X = 1)$



Eingabe von $x = 1$ bzw. $k = 1$, $n = 10$ und $p = 0{,}2$
im Binomial-PD-Menü bzw. im Binomialpdf-Menü:



Aufgaben

mvurl.de/hgyt

1 Die Zufallsvariable X ist $B_{n,p}$-verteilt. Berechnen Sie $P(X = 0)$ und $P(X = 1)$.

a) $n = 4;\ p = 0{,}5$ **b)** $n = 3;\ p = 0{,}3$ **c)** $n = 4;\ p = \frac{1}{6}$

2 Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten $B_{n,p}(k)$:

a) $n = 8;\ k = 2;\ p = 0{,}5$ **b)** $n = 20;\ k = 5;\ p = 0{,}8$ **c)** $n = 50;\ k = 9;\ p = 0{,}1$

3 Die Zufallsvariable X ist $B_{n,p}$-verteilt. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:
Stellen Sie die Verteilung grafisch dar und vergleichen Sie die Werte.

a) $n = 5;\ p = 0{,}4$: $P(X = 1);\ P(X = 2);\ P(X = 3)$

b) $n = 8;\ p = 0{,}7$: $P(X = 5);\ P(X = 6);\ P(X = 7)$

4 Es gibt zwei Schreibweisen für die Wahrscheinlichkeit bei einer binomialverteilten Zufallsgröße X: $P(X = k) = B_{n,p}(k)$. Schreiben Sie in der anderen Form und berechnen Sie.

a) $n = 12;\ p = 0{,}85;\ P(X = 9)$ **b)** $B_{25,\,0{,}15}(6)$

c) $n = 120;\ p = 0{,}99;\ P(X = 0)$ **d)** $B_{200,\,0{,}65}(130)$

5 Berechnen Sie den Wert und beschreiben Sie die zugrundeliegende Binomialverteilung.

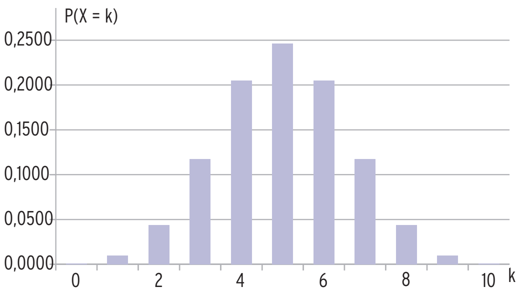
a) $\binom{5}{4}\cdot 0{,}4^4\cdot 0{,}6^1$ **b)** $\binom{15}{4}\cdot 0{,}3^4\cdot 0{,}7^{11}$

c) $\binom{50}{10}\cdot 0{,}1^{10}\cdot 0{,}9^{40}$ **d)** $\binom{100}{44}\cdot 0{,}2^{44}\cdot 0{,}8^{56}$

6 Vervollständigen Sie den Term und beschreiben Sie die zugrundeliegende Binomialverteilung.

a) $\binom{50}{\dots}\cdot 0{,}7^{\triangle}\cdot 0{,}\square^{10}$ **b)** $\binom{\dots}{8}\cdot 0{,}\square^{\triangle}\cdot 0{,}7^{52}$

7 Die Abbildung zeigt die Binomialverteilung mit den Parametern $n = 10$ und $p = 0{,}5$.
Bestimmen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Abbildung:
$P(X = 3);\ P(X = 5);\ P(X = 8)$.
Welche Eigenschaften hat der Graph dieser Binomialverteilung?



8 Ein Korb enthält 25 Bälle, die sich durch das aufgedruckte Muster unterscheiden.
15 Bälle sind mit Punkten, 10 mit Sternen gemustert.
Aus dem Korb wird ein Ball „blind“ entnommen. Es wird festgestellt, ob er Sterne trägt oder nicht, dann wird er wieder in den Korb zurückgelegt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim 10-maligen Ziehen genau drei Bälle mit Sternen zu ziehen?

Summierte (kumulierte) Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 1

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 4$ und $p = 0{,}6$.
Berechnen Sie $P(X \leq 1)$ und $P(X \geq 2)$ ohne Verwendung des WTR.

Lösung

X ist $B_{4;\,0{,}6}$-verteilt.

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{4}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^4 + \binom{4}{1} \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}0256 + 0{,}1536$

$P(X \leq 1) = 0{,}1792$ Summierte (kumulierte) Wahrscheinlichkeit

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0{,}1792 = 0{,}8208$ Gegenereignis

Hinweis: $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$
$= 0{,}3456 + 0{,}3456 + 0{,}1296 = 0{,}8208$

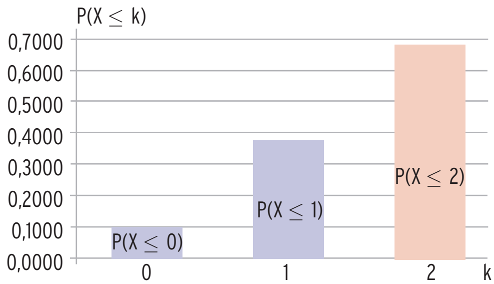
Beispiel 2

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}2$.
Berechnen Sie $P(X \leq 2)$ und stellen Sie den Wert grafisch dar.
Berechnen Sie $P(2 \leq X \leq 5)$ und $P(X > 3)$.

Lösung

X ist $B_{10;\,0{,}2}$-verteilt.

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$
$= 0{,}6778$



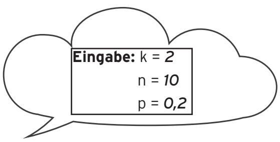
$P(2 \leq X \leq 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = P(X \leq 5) - P(X < 2)$
$= P(X \leq 5) - P(X \leq 1) = 0{,}9936 - 0{,}3758 = 0{,}6178$

$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0{,}8791 = 0{,}1209$
Berechnung mit dem Gegenereignis

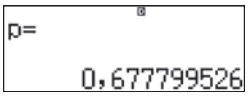
Berechnung mit dem WTR

$P(X \leq 2)$:

Eingabe von x = 2 bzw. k = 2, n = 10 und p = 0,2

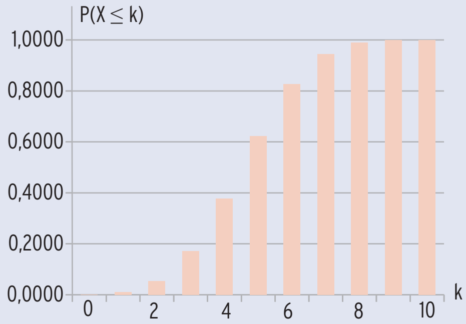


im Binomial-CD-Menü bzw. im Binomialcdf-Menü:



Beispiel 3

Die Abbildung zeigt die kumulierte Binomialverteilung für $n = 10$ und $p = 0{,}5$.



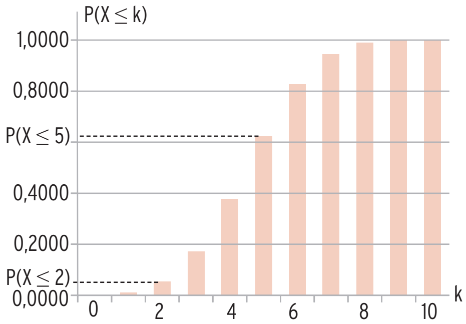
a) Welche besondere Eigenschaft hat diese Verteilung?

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Abbildung:
- $P(X \leq 5)$
- $P(X = 5)$
- $P(X > 5)$
- $P(3 \leq X \leq 5)$

c) Bestimmen Sie das kleinste k, sodass gilt: $P(X \leq k) > 0{,}90$

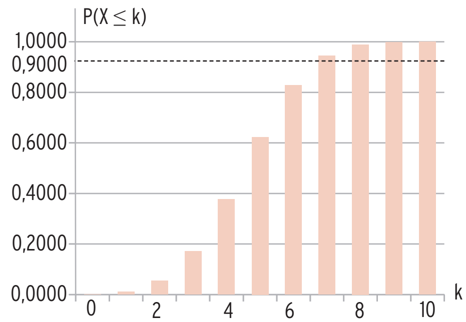
Lösung

a) Die Wahrscheinlichkeitswerte wachsen und $P(X \leq 10) = 1 = 100\,\%$



b) Wahrscheinlichkeiten:
- $P(X \leq 5) = 0{,}62$
- $P(X = 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 4)$
  $= 0{,}62 - 0{,}38 = 0{,}24$
- $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 0{,}38$
  Berechnung mit dem Gegenereignis
- $P(3 \leq X \leq 5)$
  $= P(X \leq 5) - P(X \leq 2)$
  $\approx 0{,}62 - 0{,}05$
  $= 0{,}57$

c) $P(X \leq k) > 0{,}90$ für $k \geq 7$
Die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$ ist für $k = 7$ erstmals größer als 0,9.
$P(X \leq k)$ strebt gegen 1 für k gegen 10.
$k = 7$ ist das kleinste k, sodass gilt: $P(X \leq k) > 0{,}90$.



mvurl.de/eqkq

Beispiel 4

Ein Unternehmen produziert Tonvasen. Beim Brennen der Vasen sind erfahrungsgemäß 20 % defekt. Der Produktion wird eine Stichprobe von 50 Vasen entnommen.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Die Stichprobe enthält genau 10 defekte Vasen.
B: Die Stichprobe enthält höchstens 10 defekte Vasen.
C: Man stellt mindestens 10 und höchstens 15 defekte Vasen fest.
D: Die Stichprobe enthält mehr als eine defekte Vase.

Lösung

X ist die Anzahl defekter Vasen. Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 50$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}2$; X ist $B_{50;\,0{,}2}$-verteilt.

$P(A) = P(X = 10) = 0{,}1398$ kann mit dem WTR berechnet werden.

$P(B) = P(X \leq 10) = 0{,}5836$ kann mit dem WTR berechnet werden.

$P(C) = P(10 \leq X \leq 15) = P(X \leq 15) - P(X \leq 9)$
$P(C) = 0{,}9692 - 0{,}4437 = 0{,}5255$

$P(D) = P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0{,}0002$
$P(D) = 0{,}9998 = 99{,}98\,\%$

Binomialverteilung: $P(X = k)$
$n = 50;\ p = 0{,}2$

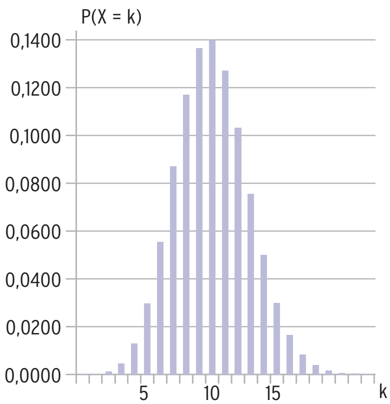


Schaubild der Wahrscheinlichkeitsfunktion: $k \rightarrow P(X = k)$

summierte Binomialverteilung: $P(X \leq k)$
$n = 50;\ p = 0{,}2$

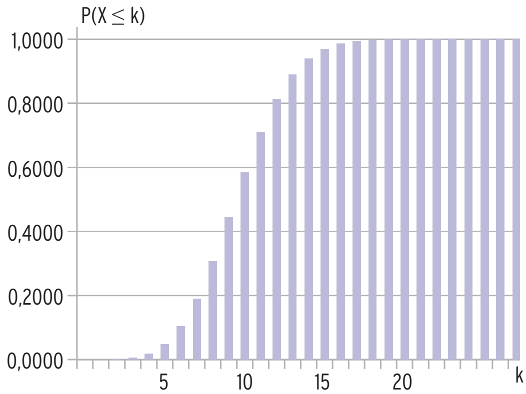


Schaubild der Verteilungsfunktion: $k \rightarrow P(X \leq k)$

Summenschreibweise der kumulierten Binomialverteilung

$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \sum_{i=0}^{3} \binom{50}{i} 0{,}2^i \cdot 0{,}8^{50-i} = \sum_{i=0}^{3} B_{50;\,0{,}2}(i)$

$P(X \leq k) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + \ldots + P(X = k)$

$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i \cdot (1-p)^{n-i} = \sum_{i=0}^{k} B_{n;\,p}(i)$ **Summierte Binomialverteilung**

Beispiel 5

➲ Eine Box der Firma Fabert enthält 25 Bleistifte, die sich durch das aufgedruckte Muster unterscheiden. 15 Bleistifte sind mit Punkten, 10 mit Sternen gemustert.
Aus der Box wird ein Bleistift „blind" entnommen. Es wird festgestellt, ob er Sterne trägt oder nicht, dann wird er wieder in die Box zurückgelegt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim fünfmaligen Ziehen weniger als 4 Bleistifte mit Sternen zu ziehen?
b) Die Wahrscheinlichkeit, dass beim fünfmaligen Ziehen wenigstens ein Bleistift mit Sternen gezogen wird, ist größer als 90 %. Überprüfen Sie.
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beim fünfmaligen Ziehen mindestens zwei Bleistifte und höchstens vier Bleistifte einen Stern haben.
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim 20-maligen Ziehen mindestens 8 Bleistifte mit Sternen zu ziehen?

Lösung

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der gezogenen Bleistifte mit Sternmuster. Das Experiment ist ein **Bernoulli-Experiment**, da es nur **zwei Ergebnisse** gibt (Stern oder nicht Stern) und **mit Zurücklegen** gezogen wird (Bernoulli-Kette der Länge 5).

a) X ist $B_{5;\,0,4}$-verteilt.
Mit $p = 0{,}4$; $n = 5$ und $k = 3$ erhält man für die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als 4 Bleistifte mit Sternmuster gezogen werden:
$P(X < 4) = P(X \leq 3) = 0{,}9130$

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}0778 = 0{,}9222$
oder $P(X \geq 1) = 1 - 0{,}6^5 \approx 0{,}9222$
Die Wahrscheinlichkeit ist also größer als 90 %.

c) $P(2 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 1) = 0{,}9898 - 0{,}3370 = 0{,}6528$

d) X ist $B_{20;\,0,4}$-verteilt.
$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - 0{,}4159 = 0{,}5841$

Bernoulli-Formel $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = B_{n;\,p}(k)$

Summierte Binomialverteilung: $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\, p^i \cdot (1-p)^{n-i}$

$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} B_{n;\,p}(i)$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a)$

Beispiel 6

Jan spielt in seiner Freizeit Basketball. Er trifft den Basketballkorb bei einem Freiwurf mit der Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}35$.

a) Wie oft muss er mindestens werfen, damit er den Basketballkorb mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 0,995 mindestens ein Mal trifft?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er bei 13 Versuchen genau ein Mal?

Lösung

a) X: Anzahl der Treffer; X ist $B_{n;\,0{,}35}$-verteilt.

$X \geq 1$: Mindestens ein Treffer

Bei $n = 3$ Versuchen: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}2746 = 0{,}7254$

Bei $n = 6$ Versuchen: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}0754 = 0{,}9246$

Bei $n = 8$ Versuchen: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}0319 = 0{,}9681$

Steigt die Anzahl n der Versuche, so steigt auch die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Treffer.

Bei n Versuchen:

Bedingung: $P(X \geq 1) \geq 0{,}995$ $\quad P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \geq 0{,}995$

Mit $\quad P(X = 0) = \binom{n}{0} \cdot 0{,}35^0 \cdot 0{,}65^n$

$P(X = 0) = 0{,}65^n$

erhält man $\quad P(X \geq 1) = 1 - 0{,}65^n \geq 0{,}995$

Daraus folgt die Bedingung für n: $\quad 0{,}65^n \leq 0{,}005$

Auflösung der Gleichung $\quad 0{,}65^n = 0{,}005$

durch Logarithmieren: $\quad \ln(0{,}65^n) = \ln(0{,}005)$

Mit $\ln(a^r) = r \cdot \ln(a);\ a > 0$: $\quad n \cdot \ln(0{,}65) = \ln(0{,}005)$

$$n = \frac{\ln(0{,}005)}{\ln(0{,}65)} = 12{,}30$$

oder

WTR mit der $\log_a b$- Taste: $\quad n = \log_{0{,}65}(0{,}005) = 12{,}30$

Er muss mindestens 13-mal werfen.

b) X: Anzahl der Treffer; X ist $B_{13;\,0{,}35}$-verteilt.

$P(X = 1) = 0{,}0259$

Die Wahrscheinlichkeit für genau einen Treffer bei 13 Versuchen liegt bei 0,0259.

Aufgaben

mvurl.de/9hy7

1 Die Zufallsvariable X ist $B_{n,p}$-verteilt. Berechnen Sie $P(X \le k)$.

a) $n = 8;\ k = 2;\ p = 0{,}5$ **b)** $n = 20;\ k = 5;\ p = 0{,}8$ **c)** $n = 50;\ k = 20;\ p = 0{,}1$

2 Die Zufallsvariable X ist $B_{n,p}$-verteilt. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

a) $n = 5;\ p = 0{,}5$: $P(X = 3);\ P(X \le 1);\ P(X \ge 1)$

b) $n = 20;\ p = 0{,}2$: $P(X = 4);\ P(X \le 1);\ P(X \ge 2);\ P(2 \le X \le 6)$

c) $n = 200;\ p = 0{,}05$: $P(X = 25);\ P(X \le 1);\ P(20 < X < 45);\ P(10 \le X < 15)$

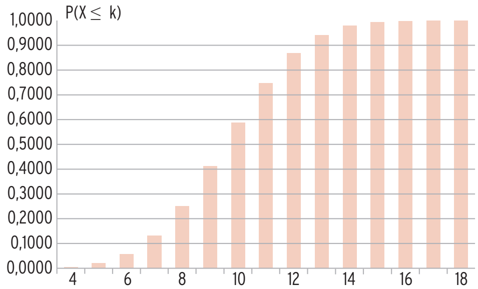
3 Die Abbildung zeigt die kumulierte Binomialverteilung mit n = 20 und p = 0,5.

a) Welche Eigenschaft hat diese Verteilung?

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten:
- $P(X \le 10)$
- $P(X = 10)$
- $P(6 \le X \le 12)$
- $P(X > 12)$

Vergleichen Sie mit der Abbildung.

c) Ermitteln Sie den kleinsten k-Wert, sodass gilt: $P(X \le k) > 0{,}90$.



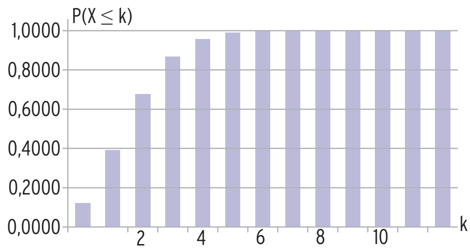
4 Das nebenstehende Diagramm zeigt die summierten Wahrscheinlichkeiten für die Zufallsvariable X. X ist $B_{20;\,0{,}1}$-verteilt. Beurteilen Sie folgende Aussage anhand des Diagramms.

a) $P(X = 2) \approx 0{,}68$

b) $P(X \le 3) \approx 0{,}87$

c) $P(2 \le X \le 6) \approx 0{,}60$

d) $P(X \ge 1) \approx 0{,}88$



5 Die Druckfix GmbH stellt Walzen her. Es werden 100 Walzen einer Qualitätsanalyse unterzogen. Die Wahrscheinlichkeit für einen Defekt beträgt p = 0,05.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Höchstens 2 Walzen sind defekt.

B: Es gibt mindestens 3 defekte Walzen.

C: Es befinden sich mindestens 4 und höchstens 7 defekte Walzen in der Stichprobe.

D: In der Stichprobe befinden sich 95 intakte Walzen.

E: Alle Walzen sind intakt.

6 Begründen Sie, welche der Verteilungen zu einer Binomialverteilung gehört.

Abb. 1

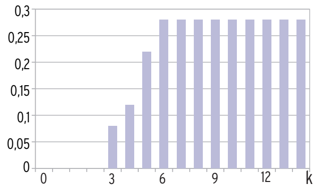


Abb. 2

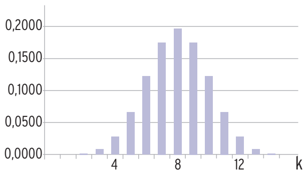
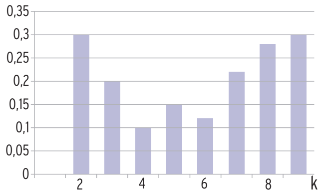
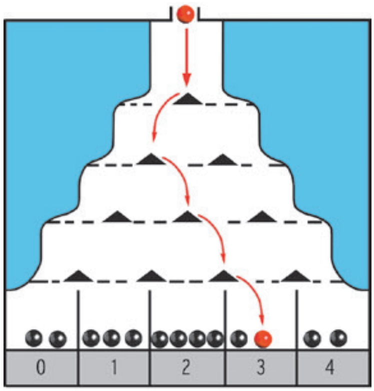


Abb. 3



mvurl.de/m2ub

7 Das Galton-Brett besteht aus einer regelmäßigen Anordnung von Hindernissen (z. B. Nagelreihen). Eine von oben herunterfallende Kugel prallt am Hindernis nach links oder nach rechts ab. Nach dem Passieren der Hindernisse werden die Kugeln in Fächern aufgefangen, um dort abgezählt zu werden. Die Abbildung zeigt ein vierstufiges, symmetrisches Galton-Brett.



a) Begründen Sie, dass das Galton-Brett ein Modell für eine Bernoulli-Kette ist.

b) Wieviel % der Kugeln fallen in Fach „3"?

8 Für die Produktion eines Elektro-Autos werden unter anderem Scheinwerfer benötigt. Zunächst wird die Lux AG mit der Produktion beauftragt. Diese garantiert, dass der Anteil an defekten Einheiten etwa 10 % betragen.
Unter der Voraussetzung p = 0,1 sollen die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse untersucht werden.

a) Es werden 10 Scheinwerfereinheiten geprüft.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse.
E_1: Genau eine Scheinwerfereinheit ist defekt.
E_2: Die erste Scheinwerfereinheit ist defekt, aber alle anderen sind einwandfrei.

b) Erklären Sie den Unterschied zwischen den beiden Ereignissen E_1 und E_2 aus Teilaufgabe a).

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Stichprobenumfang von 100 mehr als 15 defekt sind.

9 BEL FRUTI produziert Papaya- und Ananaskonserven. Nachdem die Etikettiermaschine ausgefallen ist, befinden sich mehrere Tausend Dosen, davon zwei Drittel Papaya und ein Drittel Ananas, im Lager. Für die Qualitätskontrolle werden fünfzig Dosen an verschiedenen Stellen des Lagers zufällig ausgewählt. Die Anzahl der Ananas- bzw. Papayakonserven unter den fünfzig ausgewählten Dosen sei eine binomialverteilte Zufallsgröße. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten.

a) Es werden genau 16 Ananaskonserven gefunden.

b) Es werden mindestens 25 Papayakonserven gefunden.

10 Eine Laplace-Münze wird fünfmal geworfen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau dreimal Wappen fällt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keinmal Wappen fällt?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens einmal Wappen fällt?

11 Es ist bekannt, dass 2 % der Bevölkerung eine Extremsportart betreiben. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von 50 Personen genau ein Extremsportler ist bzw. höchstens zwei Extremsportler sind.

12 Ein Batteriehersteller geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für einen vorzeitigen Ausfall einer Batterie 20 % beträgt.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Von 100 Batterien fallen weniger als ein Viertel vorzeitig aus.

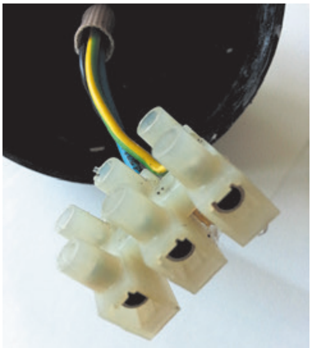
B: Von 50 Batterien fallen höchstens 10 vorzeitig aus.

C: Von 5 Batterien fallen mindestens zwei vorzeitig aus.

b) Wie hoch muss der Anteil der vorzeitig ausfallenden Batterien mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % unter 100 Batterien mindestens eine vorzeitig ausfällt?

c) Das Produktionsverfahren wird umgestellt. Damit sinkt die Ausfallwahrscheinlichkeit auf 5 %. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe von 100 Batterien mindestens vier, höchstens aber acht Batterien vorzeitig ausfallen.

13 Ein Unternehmen produziert täglich eine große Anzahl von Lüsterklemmen. Diese werden unabhängig voneinander hergestellt. Die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Lüsterklemme liegt bei 5 %.



a) Der Produktion wird eine Stichprobe von 50 Lüsterklemmen entnommen.

Berechnen Sie $B_{50;0,05}(2)$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
- mehr als drei Lüsterklemmen fehlerhaft sind,
- höchstens sechs Lüsterklemmen fehlerhaft sind.

b) Berechnen Sie den Umfang einer Stichprobe, wenn in dieser mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens eine fehlerhafte Lüsterklemme enthalten sein soll.

14 Ein Pharmaunternehmen hat ein neues Medikament entwickelt. Die Einnahme führt bei 10 % der Patienten zu Herzrasen.

In einer Studie nehmen 100 Patienten das Medikament ein.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

A: Genau 20 Patienten bekommen Herzrasen.

B: Höchstens 15 Patienten bekommen Herzrasen.

C: Mindestens 16 Patienten bekommen Herzrasen.

D: Mindestens 20, aber höchstens 30 Patienten bekommen Herzrasen.

2.3 Erwartungswert und Standardabweichung einer Binomialverteilung

Erwartungswert

Beispiel 1

An einer Schule in Köln gibt es hitzefrei, wenn die Quecksilbersäule des Thermometers im Schatten mehr als 25 °C anzeigt. Der deutsche Wetterdienst meldet für den Zeitraum vom 20. Juni bis 22. Juni eine Wahrscheinlichkeit von 30 % für Temperaturen, die höher als 25 °C sind.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der hitzefreien Tage im genannten Zeitraum.
Erstellen Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable X.
Mit wie vielen hitzefreien Tagen kann während des angegebenen Zeitraums durchschnittlich gerechnet werden?

Lösung

Jedes einzelne Experiment hat zwei Ausgänge (mehr als 25 °C; weniger oder gleich 25 °C) mit einer Trefferwahrscheinlichkeit von $p = 0{,}3$.
Es liegt eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 3$ vor. X ist eine $B_{3;\,0,3}$-verteilte Zufallsvariable.

Wahrscheinlichkeitsverteilung

k	0	1	2	3
$B_{3;0,3}(k)$	$\binom{3}{0} 0{,}3^0\, 0{,}7^3 = 0{,}343$	$\binom{3}{1} 0{,}3^1\, 0{,}7^2 = 0{,}441$	$\binom{3}{2} 0{,}3^2\, 0{,}7^1 = 0{,}189$	$\binom{3}{3} 0{,}3^3\, 0{,}7^0 = 0{,}027$

Gesucht ist die Anzahl der zu erwartenden hitzefreien Tage, d. h. E (X).

Berechnung des Erwartungswerts E (X) mit $E(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$.

$E(X) = \sum_{k=0}^{3} k \cdot B_{3;0,3}(k) = 0 \cdot 0{,}343 + 1 \cdot 0{,}441 + 2 \cdot 0{,}189 + 3 \cdot 0{,}027$

$E(X) = 0{,}9$

Voraussichtlich kann man während des Zeitraums mit 0,9 hitzefreien Tagen rechnen.

Plausibilitätsbetrachtung

Wenn die Wahrscheinlichkeit für jeden hitzefreien Tag $p = 0{,}3$ ist und man drei Tage $(n = 3)$ betrachtet, so ergibt sich die Anzahl der zu erwartenden hitzefreien Tage mit
$E(X) = 3 \cdot 0{,}3 = 0{,}9$
Allgemein: $E(X) = n \cdot p$

Eine $B_{n;p}$-verteilte Zufallsvariable X hat den **Erwartungswert**

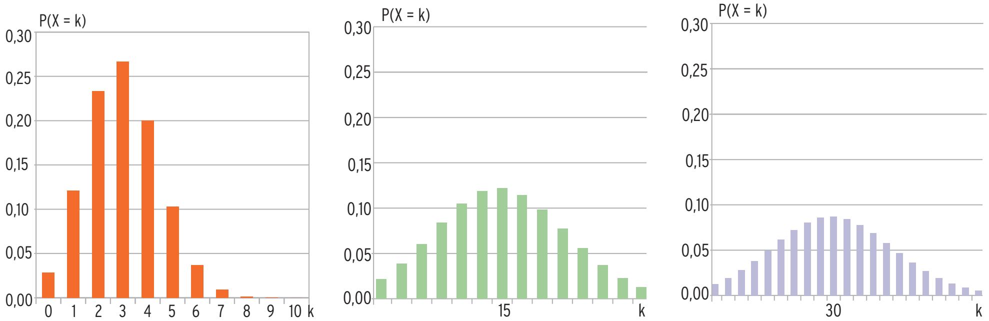
$$E(X) = n \cdot p$$

Für E (X) schreibt man auch μ.

Binomialverteilungen für p = 0,3 und verschiedene n-Werte

n = 10	n = 50	n = 100
μ = 3	μ = 15	μ = 30

Der **Erwartungswert** μ ist ganzzahlig.



Mithilfe der Abbildung ergibt sich:

Die **größte Wahrscheinlichkeit** liegt im Erwartungswert.

z. B. für n = 10 und p = 0,3: $B_{10;\,0,3}(3) = 0{,}2668$

zum Vergleich: $B_{10;\,0,3}(2) = 0{,}2335$; $B_{10;\,0,3}(4) = 0{,}2001$

Beispiel 2

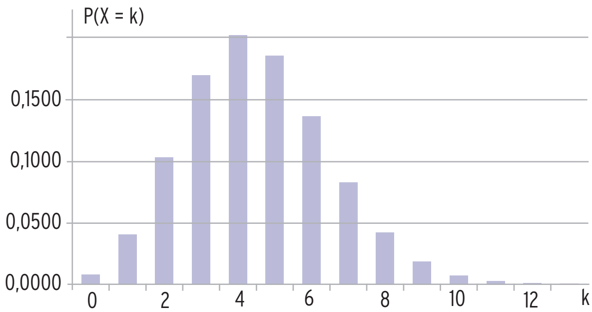
Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit n = 30 und p = 0,15.
Bestimmen Sie den Erwartungswert und die größte Wahrscheinlichkeit.

Lösung

Für den Erwartungswert gilt: $\mu = n \cdot p = 30 \cdot 0{,}15 = 4{,}5$

Dies ist kein Wert der Zufallsvariablen X ($X = x_i \in \mathbb{N}$).

Mithilfe der Abbildung stellt man fest:
Die größte Wahrscheinlichkeit liegt bei einem der benachbarten ganzzahligen Werte:



$P(X = 4) = B_{30;\,0,15}(4) = 0{,}2028$; $P(X = 5) = 0{,}1861$

Die größte Wahrscheinlichkeit beträgt 0,2028.

Varianz und Standardabweichung

Formel für die Varianz: $\sigma^2 = \sum_{k=0}^{n} (k - E(X))^2 \cdot B_{n;p}(k)$

Man betrachtet ein einzelnes Bernoulli-Experiment einer Bernoulli-Kette.

Wahrscheinlichkeitsverteilung	k	0	1
$n = 1$; $E(X) = p$	$B_{n;p}(k)$	$\binom{1}{0} p^0 (1-p)^1 = 1 - p$	$\binom{1}{1} p^1 (1-p)^0 = p$

Varianz für ein einziges Bernoulli-Experiment

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{1} (k-p)^2 \cdot B_{1;p}(k) = (0-p)^2(1-p) + (1-p)^2 p$$

$$\sigma^2 = p^2(1-p) + (1-2p+p^2)p = p^2 - p^3 + p - 2p^2 + p^3 = p - p^2 = p(1-p)$$

Varianz für ein Bernoulli-Experiment: $\sigma^2 = p \cdot (1-p)$

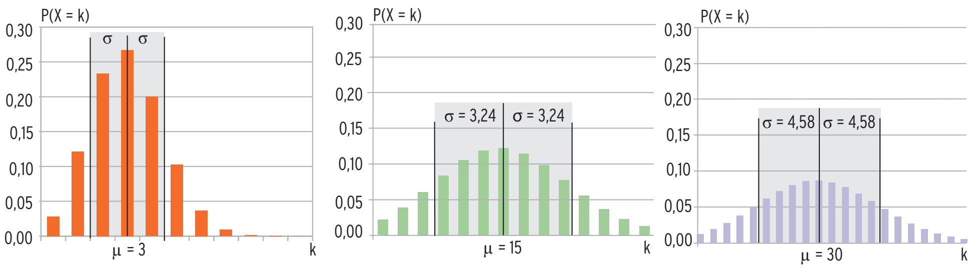
Varianz für n Bernoulli-Experimente (ohne Beweis): $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$

Eine $B_{n;p}$-verteilte Zufallsvariable X hat die **Varianz** $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$

und die **Standardabweichung** $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.

Binomialverteilungen für p = 0,3 und verschiedene n-Werte

$n = 10$; $\mu = 3$; $\sigma = 1{,}45$ — $n = 50$; $\mu = 15$; $\sigma = 3{,}24$ — $n = 100$; $\mu = 30$; $\sigma = 4{,}58$



Man stellt fest:

Für wachsendes n wird der Graph immer breiter und flacher (bei gleicher Wahrscheinlichkeit p).

Der maximale Wert wird beim Erwartungswert angenommen.

σ ist ein Maß für die Breite der Verteilung.

Beispiel

Bei der Produktion von Zündkerzen sind erfahrungsgemäß 2 % defekt. Bei einer Kontrolle werden bei einer Stichprobe 200 Zündkerzen aus der laufenden Produktion entnommen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der defekten Zündkerzen im Intervall $I = [\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ mit $\mu = E(X)$ liegt.
Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Lösung

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der defekten Zündkerzen an. X ist $B_{200;0,02}$-verteilt.

Zu erwartende defekte Zündkerzen: $\mu = n \cdot p$

$\mu = 200 \cdot 0{,}02 = 4$

Varianz: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$

$\sigma^2 = 200 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98 = 3{,}92$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\text{Varianz}}$

$\sigma = \sqrt{3{,}92} = 1{,}98$

σ-Intervall $[\mu - \sigma;\ \mu + \sigma] = [2{,}02; 5{,}98]$

Die **ganzzahligen k-Werte** 3, 4 und 5 liegen in diesem Intervall.

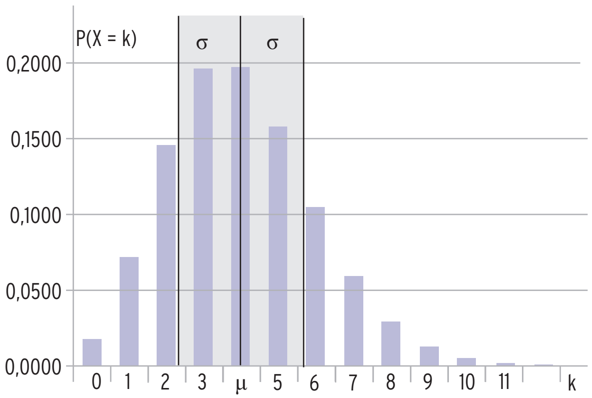
Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeit: $P(3 \le X \le 5) = P(X \le 5) - P(X \le 2)$

$P(3 \le X \le 5) = 0{,}551$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,551 enthält die Stichprobe 3 bis 5 defekte Zündkerzen.

Grafische Veranschaulichung

k	Binomialverteilung
0	0,0176
1	0,0718
2	0,1458
3	0,1963
4	0,1973
5	0,1579
6	0,1047
7	0,0592
8	0,0292
9	0,0127
10	0,0049
11	0,0017
12	0,0006
13	0,0002
14	0,0000



Hinweis: Die größte Wahrscheinlichkeit liegt beim Erwartungswert $\mu = 4$:

$P(X = 4) = 0{,}197$

Zusammenfassung Binomialverteilung

Formel von Bernoulli: $P(X = k) = B_{n;\,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$

Eigenschaften: $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i \cdot (1 - p)^{n-i}$

$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} B_{n;\,p}(i)$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a)$

Erwartungswert: $E(X) = \mu = n \cdot p$

Varianz: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

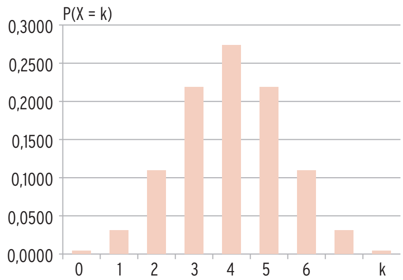
Aufgaben

1 Skizzieren Sie den Graphen der Binomialverteilung und bestimmen Sie jeweils den Erwartungswert und die Standardabweichung.

a) n = 12; p = 0,5 **b)** n = 50; p = 0,25

Geben Sie die größte Wahrscheinlichkeit an.

2 Die Abbildung zeigt eine Binomialverteilung.
Bestimmen Sie den ganzzahligen Erwartungswert und die zugehörige Wahrscheinlichkeit p.



3 Eine binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = 5$ und die Standardabweichung $\sigma = 2$. Berechnen Sie n und p.

4 Es ist bekannt, dass 2 % der Bevölkerung eine Extremsportart betreiben.

a) In einer Gruppe von 100 Personen kann man 3 Extremsportler erwarten. Prüfen Sie.

b) Berechnen Sie die Standardabweichung.

c) Bestimmen Sie $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$.

5 Die LION GmbH fertigt große Mengen von Fahrradtrikots. Die Wahrscheinlichkeit, dass von einer Tagesproduktion von 2350 Stück mindestens 2000 fehlerfrei sind, beträgt 0,90. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Trikot fehlerfrei ist.

6 Das Unternehmen Agrema AG fertigt und verkauft Fanfahnen in 40er-Paketen an Shops. Untersuchungen der Qualität der Fahnen ergeben eine Ausschusswahrscheinlichkeit von 12,5%. Die Paketgröße soll aufgestockt werden. Es wird festgelegt, dass ein Paket nicht bezahlt werden muss, wenn sich darin mehr als 8 minderwertige Fahnen befinden. Ein verkauftes Paket wird mit der Wahrscheinlichkeit 0,1661 nicht berechnet.
Bestimmen Sie die Paketgröße.

7 Ein Hersteller fertigt auf einer Maschine Dichtungen als Massenware. Die Ausschussquote beträgt 5 %.

a) Berechnen Sie, wie viele defekte Dichtungen man bei einer Produktion von 500 Dichtungen erwarten kann.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der defekten Dichtungen im Intervall $I = [\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegt.

c) Der laufenden Produktion werden nacheinander 50 Dichtungen entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse. Gehen Sie dabei vereinfacht von dem Modell „Ziehen mit Zurücklegen" aus.
A: Alle Dichtungen sind einwandfrei.
B: Höchstens drei Dichtungen sind defekt.
C: Mehr als 35 Dichtungen sind defekt.
D: Es sind mindestens 4, aber höchstens 6 Dichtungen defekt.

8 In einer Bienenpopulation ist jede zwölfte Biene mit Milben befallen. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der befallenen Bienen.

a) Wie viele Bienen muss der Imker mindestens aus dem Stock fangen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens eine befallene Biene zu erhalten?

b) Der Imker fängt 35 Bienen aus seinem Stock. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er keine befallene Biene gefangen?

c) $n = 35$ gibt die Länge der Bernoulli-Kette des Zufallsexperiments an. Bestimmen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X.

9 An einer Ortsdurchfahrt wird eine Verkehrszählung durchgeführt. Von den Fahrzeugen, welche die Ortsdurchfahrt benutzen, sind erfahrungsgemäß 65 % Pkw, 20 % Lkw, 10 % Busse und 5 % Motorräder.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter 12 vorbeikommenden Fahrzeugen
- weder Busse noch Motorräder?
- genau drei Lkw?
- höchstens ein Motorrad?
- mindestens zehn Pkw sind.

b) Durch die Anzahl der Pkw bei 20 vorbeikommenden Fahrzeugen ist die Zufallsvariable X definiert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass X höchstens um die Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht.

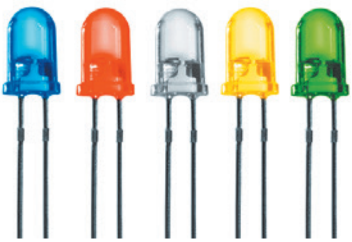
10 Eine Gärtnerei bietet Tulpenzwiebeln an. Sie sichert ihren Kunden zu, dass es bei 90 % der Zwiebeln im nächsten Frühjahr zur Blüte kommen wird. Herr Kahn kauft 20 Tulpenzwiebeln. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: Alle 20 Tulpen werden blühen.
B: Mindestens 15 Tulpen werden blühen.
C: Es werden weniger Tulpen blühen, als nach der Angabe der Gärtnerei erwartet wird.

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

1 In der Töpferei Nordstrander werden Vasen produziert. Erfährungsgemäß haben 10 % der produzierten Vasen einen Fehler. Es werden 50 Vasen der laufenden Produktion entnommen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A: Alle Vasen sind einwandfrei.
B: Es sind genau 6 Vasen defekt.
C: Es sind höchstens 6 Vasen defekt.
D: Es werden mehr als 6 defekte Vasen gefunden.
E: Es werden mehr als 6 defekte Vasen, aber weniger als 10 defekte Vasen gefunden.

2 Die Firma Candela stellt Leuchtdioden her. 5 % der produzierten Leuchten sind defekt.
Es werden 200 Leuchten untersucht.
Berechnen Sie den Mittelwert μ und die Standardabweichung σ.
Bestimmen Sie $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$.
Interpretieren Sie diese Wahrscheinlichkeit.



3 Die Fluggesellschaft Star Flug geht davon aus, dass jeder einzelne Passagier mit einer Wahrscheinlichkeit von 96 % einen gebuchten Flug tatsächlich antritt.
Das Erscheinen der Passagiere zum Flug soll voneinander unabhängig sein.

a) Am Check-In liegt eine Passagierliste vor.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Von den ersten drei Passagieren auf der Liste treten genau zwei den Flug an.
B: Von den ersten fünf Passagieren tritt mindestens einer den Flug nicht an.

b) Ein Flug wurde von 300 Passagieren gebucht.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 290 und höchstens 296 Passagiere den Flug antreten.

4 Zum Muttertag bringt die Firma BioKosmetics das beliebte Parfum „Mabelle“ in einer Sondergröße heraus. Bei dessen Herstellung entsteht 5 % mangelhafte Ware.
Die Qualitätskontrolle entnimmt der laufenden Produktion 50 Prüfstücke.
Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der mangelhaften Prüfstücke an.

a) Begründen Sie, warum davon ausgegangen werden kann, dass die Zufallsgröße X binomialverteilt ist.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ der Zufallsgröße X.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten zu den folgenden Ereignissen:
A: Genau 3 Prüfstücke sind mangelhaft.
B: Höchstens 3 Prüfstücke sind mangelhaft.
C: Es sind mindestens $\mu - \sigma$, aber höchstens $\mu + \sigma$ Prüfstücke mangelhaft.

d) Leiten Sie den kleinsten Stichprobenumfang her, der entnommen werden müsste, sodass in der Stichprobe mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens ein Prüfstück mangelhaft ist.

Anhang

1 Lösungen der Tests

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

Lehrbuch Seite 53

1

a) Bedingung für die Nullstellen: $f(x) = 0$

$3\sin(\pi x) = 0 \quad | : 3$

$\sin(\pi x) = 0$

$\pi x = 0;\ \pm\pi;\ \pm 2\pi;\ \pm 3\pi; \ldots \quad | : \pi$

$x = 0;\ \pm 1; \pm 2;\ \pm 3; \ldots$

Nullstellen auf [−3; 3]: $0;\ \pm 1; \pm 2;\ \pm 3$

b) Bedingung für die Nullstellen: $f(x) = 0$

$\cos(4x) = 0$

$4x = \pm\frac{\pi}{2}; \pm\frac{3}{2}\pi; \pm\frac{5}{2}\pi; \pm\frac{7}{2}\pi; \ldots \quad | : 4$

$x = \pm\frac{\pi}{8}; \pm\frac{3}{8}\pi; \pm\frac{5}{8}\pi; \pm\frac{7}{8}\pi; \ldots\ldots$

Nullstellen auf [−3; 3]: $\pm\frac{\pi}{8}; \pm\frac{3}{8}\pi; \pm\frac{5}{8}\pi; \pm\frac{7}{8}\pi$

c) Bedingung für die Nullstellen: $f(x) = 0$

$\sin(x) + \frac{1}{2} = 0 \quad | -\frac{1}{2}$

$\sin(x) = -\frac{1}{2}$

$x_1 = -\frac{\pi}{6};\ x_2 = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5}{6}\pi$

Nullstellen auf [−3; 3]: $-\frac{\pi}{6}; -\frac{5}{6}\pi$

Keine weiteren Lösungen auf [−3; 3].

2

Amplitude 4, Periode $p = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$

Wertebereich von f:

Mittellinie: $d = 3$; Amplitude: $a = 4$

$d - a = 3 - 4 = -1;\ d + a = 3 + 4 = 7$

$[-1; 7]$

Das Schaubild von f entsteht aus der Kosinuskurve durch Streckung in y-Richtung mit Faktor 4; Spiegelung an der x-Achse; Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{3}{2}$; Verschiebung um 3 nach oben.

3

a) $\cos(x) = -1$: $\quad x = \pm\pi; \pm 3\pi; \pm 5\pi; \ldots$

Für $x \in [0; 10]$: $\quad x = \pi; 3\pi$

b) $\sin(2x) = \frac{1}{2}$ $\quad \sin(z) = \frac{1}{2}$

Lösungen in z: $\quad z_1 = \frac{\pi}{6} \quad z_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

Lösungen in x: Mit $z = 2x$ $\quad 2x = \frac{\pi}{6} \quad |:2 \qquad 2x = = \frac{5}{6}\pi \quad |:2$

$x_1 = \frac{\pi}{12} \qquad x_2 = \frac{5}{12}\pi$

Weitere Lösungen erhält man durch **Addition** von Vielfachen der **Periode** von f mit $f(x) = \sin(2x)$: $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ $\quad x_3 = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13}{12}\pi \qquad x_4 = \frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17}{12}\pi > 4$

Für $x \in [0; 4]$: $\quad x = \frac{\pi}{12}; \frac{5}{12}\pi; \frac{13}{12}\pi$

c) $4\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ $\quad \frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{2}; \pm\frac{3}{2}\pi; \pm\frac{5}{2}\pi; \ldots$

$x = \pm\pi; \pm 3\pi; \pm 5\pi; \ldots$

Für $x \in [-2\pi; 2\pi]$: $\quad x = \pm\pi$

4

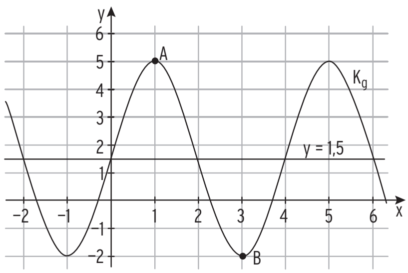
Amplitude $\frac{5+2}{2} = 3{,}5$

Mittellinie $y = \frac{5-2}{2} = 1{,}5$

Periode $p = 4 \Rightarrow b = \frac{\pi}{2}$

$a = 3{,}5;\ d = 1{,}5$ und $b = \frac{\pi}{2}$

Funktionsterm: $g(x) = 3{,}5\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1{,}5$



5

Ansatz: $f(x) = a\cos(bx) + d$

Gleichung der Mittellinie: $y = -1$, d. h., $d = -1$.

Amplitude $a = 2$

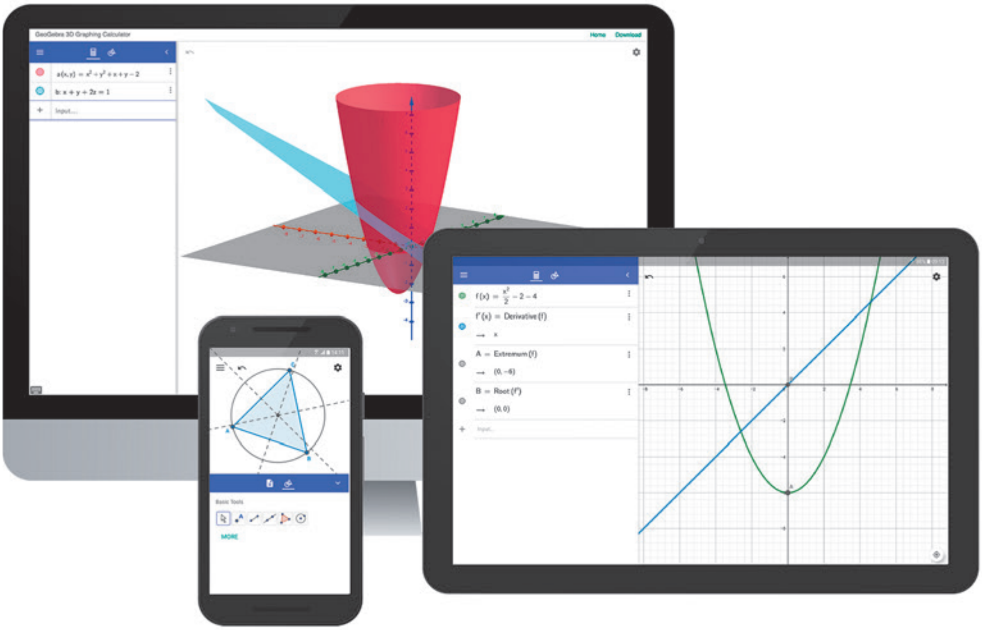
Periode $p = 4\pi$; $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

Funktionsterm: $f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 1$

2 Einführung in Geogebra, Geogebra- und Videolisten

Einführung in die Geogebra

www.geogebra.org
oder
https://www.geogebra.org/m/U6BVhW53



Liste der Geogebra-Arbeitsblätter und der Videos

Liste der Geogebra-Arbeitsblätter

Thema	Adresse	QR-Code	Seitenzahl
Motivation: Trigonometrische Funktionen	mvurl.de/mab9		10
sin und cos am Einheitskreis	mvurl.de/bnq2		21
Trigonometrische Funktionen mit a,d	mvurl.de/wuii		23
Trigonometrische Funktionen mit a,b,d	mvurl.de/iiyk		27
Trigonometrische Funktionen mit a,b,c,d	mvurl.de/7n8d		31
Trigonometrische Gleichungen sin(x)=u	mvurl.de/36r5		40
Trigonometrische Gleichungen cos(x)=u	mvurl.de/re6q		42
Überlagerung von Funktionen	mvurl.de/jxdd		54
Verkettung	mvurl.de/h1mq		60
Motivation: Polynomfunktionen	mvurl.de/xzhc		62
Differenzialquotient	mvurl.de/7p1h		64
Potenz-, Faktor-, Summenregel	mvurl.de/ix5s		71
Grafisches Ableiten mit Term	mvurl.de/1cbq		77
Grafisches Ableiten	mvurl.de/pt3t		77
Krümmung intuitiv	mvurl.de/l5e1		96
Krümmung von K_f	mvurl.de/sz4h		97
Extrem- und Wendestellen	mvurl.de/5rwq		102

Thema	Adresse	QR-Code	Seitenzahl
Zusammenhang Ableitungsfunktionen	mvurl.de/nlj1		102
Zusammenhang: Kosten, Erlös und Gewinn	mvurl.de/wf28		124
Einbeschriebenes Dreieck	mvurl.de/ndy5		128
Karton falten (Aufgabe 3)	mvurl.de/7exa		131
Blechdose (Aufgabe 6)	mvurl.de/kbpu		131
Motivation: Flächenberechnung	mvurl.de/3wjk		132
Stammfunktion rechnerisch	mvurl.de/ah52		136
Grafisches Integrieren	mvurl.de/rszu		142
Stammfunktion, Funktion, Ableitung	mvurl.de/q219		143
Übung: Stammfunktion rechnerisch und grafisch	mvurl.de/zceg		144
Das bestimmte Integral	mvurl.de/t5os		146
Ober- und Untersumme	mvurl.de/q99u		147
Fläche zwischen Kurve und x-Achse	mvurl.de/azu1		158
Fläche zwischen zwei Kurven	mvurl.de/znap		167
Motivation: LGS	mvurl.de/nbgj		180
Motivation: Vektorgeometrie	mvurl.de/p18d		198
Punkt-Richtungs-Form und Zwei-Punkte-Form	mvurl.de/5mz7		200
Geraden definieren in Parameterform	mvurl.de/dr85		200

Thema	Adresse	QR-Code	Seitenzahl
Spurpunkte einer Geraden	mvurl.de/3xgi		206
Gegenseitige Lage zweier Geraden	mvurl.de/9j64		209
Uebung: Gegenseitige Lage zweier Geraden	mvurl.de/bivd		214
Parameterform der Ebenengleichung	mvurl.de/zg2q		217
Parameterform einer Ebene, variable Punkte	mvurl.de/x5t8		218
Uebung: Abstand eines Punktes zu einer Geraden	mvurl.de/sxfe		232
Motivation: Glücksrad und Erwartungswert	mvurl.de/k72v		238
Würfeln-Simulation	mvurl.de/293t		249
Erweiterung zu Beispiel 4	mvurl.de/k9dt		269
Übung: Abhängig oder unabhängig?	mvurl.de/jqqt		273
Baumdiagramm und Vierfeldertafel	mvurl.de/f2i8		274
Übung: Binomialkoeffizient	mvurl.de/mf6o		282
Erweiterung: Glücksrad und Erwartungswert	mvurl.de/nh2m		294
Übung: Erwartungswert und Standardabweichung	mvurl.de/uz26		300
Motivation: Binomial- und Normalverteilung	mvurl.de/1mou		304
Übung: Bernoulli-Formel	mvurl.de/uiqo		308
Binomialverteilung	mvurl.de/hgyt		311
Binomialverteilung und kumuliert	mvurl.de/9hy7		317
Galton-Brett	mvurl.de/m2ub		318

Liste aller Videos

Thema	Adresse	QR-Code	Seitenzahl
Sinus- und Kosinusfunktion	mvurl.de/2rqq		21
Transformationen trigonometrischer Funktionen	mvurl.de/zod2		34
Trigonometrische Gleichungen	mvurl.de/mwyr		38
Trigonometrische Funktionen	mvurl.de/nxr4		49
Ableitungsregeln	mvurl.de/u5u6		71
Kettenregel	mvurl.de/of6n		74
Produktregel	mvurl.de/7m3a		76
Extrempunkte	mvurl.de/aglf		89
Wendepunkte	mvurl.de/zg6a		96
Kurvenuntersuchung	mvurl.de/39nw		108
Aufstellen von Kurvengleichungen	mvurl.de/hnxe		111
Optimieren	mvurl.de/wx9l		128
Stammfunktion	mvurl.de/5pjk		136
Stammfunktionen weiterer Funktionen	mvurl.de/lwvi		139
Integrationsregeln	mvurl.de/9b9w		152
Flächen zwischen zwei Kurven	mvurl.de/qmdj		167
LGS ist eindeutig lösbar	mvurl.de/yqq1		184

Thema	Adresse	QR-Code	Seitenzahl
LGS ist mehrdeutig lösbar	mvurl.de/mtrk		189
LGS mit Parameter	mvurl.de/nzps		192
Umgehen mit Gerade in Parameterform	mvurl.de/ijvy		201
Gegenseitige Lage von Geraden	mvurl.de/gyyw		209
Umgehen mit Ebene in Parameterform	mvurl.de/kbmv		220
Abstand Punkt zu Gerade	mvurl.de/l9ts		231
Abstände Zusammenfassung	mvurl.de/rqgx		236
Verknüpfung von Ereignissen	mvurl.de/dkqw		247
Pfadregeln	mvurl.de/4imz		256
Unabhängigkeit von Ereignissen	mvurl.de/5ha4		271
Varianz und Standardabweichung	mvurl.de/tnkl		296
Bernoulliformel	mvurl.de/szg2		308
Binomialverteilung und kumuliert	mvurl.de/eqkq		314