I Statistik

1 Diagramme

1 Datenerhebung in einer 11. Klasse

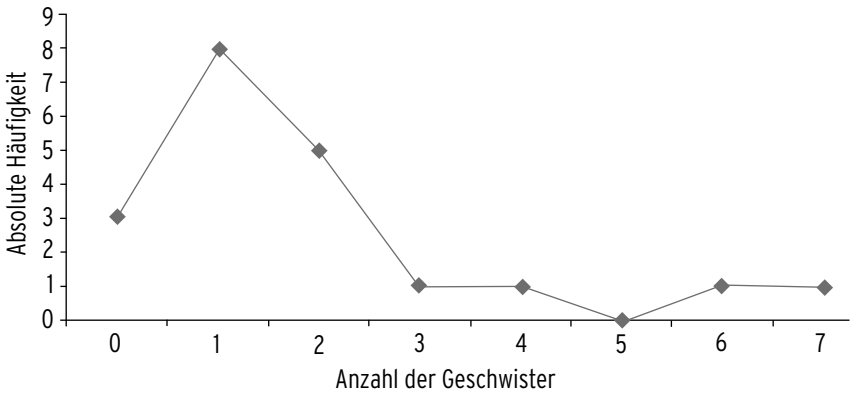


Diagramm 1:

Diagramm 2:

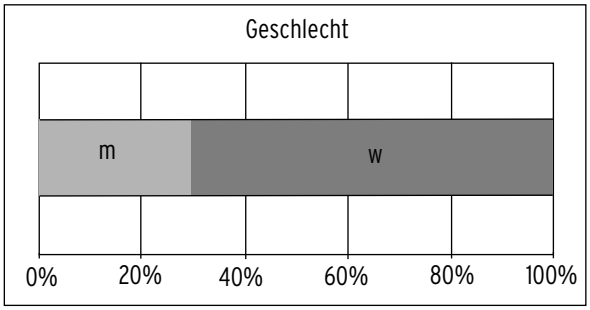
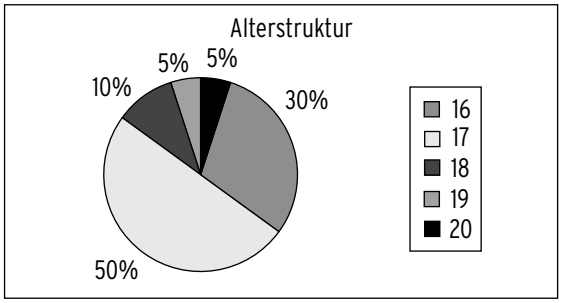


Diagramm 3:



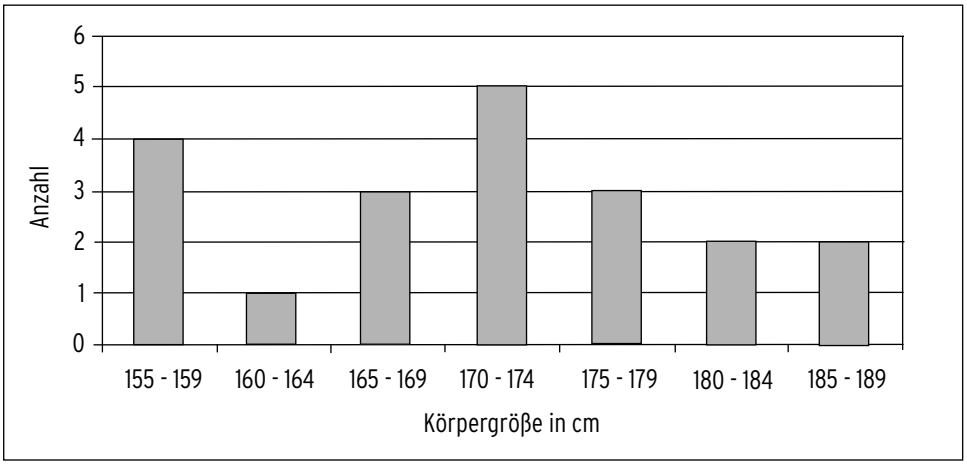


Diagramm 4:

1.1 Wie heißen die dargestellten Diagrammtypen? Tragen Sie die Bezeichnungen ein!

1.2 Was unterscheidet die Diagramme D2 und D3 von den Diagrammen D 1 und D4?

1.3 Was unterscheidet das Diagramm D4 von allen anderen?

2 Beantworten Sie folgende Aufgaben mithilfe der Diagramme auf Seite 4. Notieren Sie auch Rechnungen, wenn diese hierzu erforderlich sind.

a) Wie hoch ist der Anteil der männlichen Schüler in der Klasse?

b) Wie alt sind die meisten Schüler der Klasse?

c) Wie viel Schüler und Schülerinnen haben 3 Geschwister?

d) Wie viele Geschwister haben die Schülerinnen und Schüler im Durchschnitt?

2 Absolute und relative Häufigkeit

1 In vier verschiedenen Klassen der HöHa wurde das Alter von Schülern und Schülerinnen ermittelt. Man erhielt folgende Daten:

Klasse A

Alter	17	18	19	20
Anzahl	4	16	3	2

Klasse B

Alter	17	18	19	20
Anzahl	4	13	2	1

a) In welcher Klasse ist die relative Häufigkeit der 18-Jährigen größer?

b) In Klasse C sind $\frac{3}{5}$ der Schüler 18 Jahre alt, in Klasse D wird der Anteil derer mit 0,72 angegeben. Wie viele 18-Jährige sind in diesen beiden Klassen, wenn insgesamt jeweils 25 Schüler die Klasse C und D besuchen?

4 Die gegebenen Zufallsexperimente sollen über Ziehungen aus Urnen modelliert werden. Geben Sie die Anzahl der gezogenen Kugeln an. Sollten die Ziehungen mit Zurücklegen oder ohne Zurücklegen stattfinden?

Zufallsexperiment	Anzahl gezogener Kugeln	Mit/ohne Zurücklegen
a) Ein Würfel wird vier Mal geworfen.		☐ mit ☐ ohne
b) Ein Kartenstapel enthält 4 Herz-Karten und 2 Karo-Karten. Ein Spieler zieht drei Karten aus dem Stapel.		☐ mit ☐ ohne
c) Ein Glücksrad mit 3 roten und 2 blauen Feldern wird sieben Mal gedreht.		☐ mit ☐ ohne
d) Ein Bogenschütze trifft 80 % der Schüsse und schießt fünf Mal.		☐ mit ☐ ohne
e) In einer Lostrommel befinden sich 5 Gewinnlose und 25 Nieten. Es werden 4 Lose gezogen.		☐ mit ☐ ohne
f) Es befinden sich 10 Teile in einem Karton, von denen 3 defekt sind. Aus dem Karton werden zwei Teile entnommen.		☐ mit ☐ ohne
g) Es befinden sich immer 10 Teile in einem Karton, von denen 3 defekt sind. Es werden sieben Kartons kontrolliert.		☐ mit ☐ ohne

5 Ein Würfel wird ein Mal geworfen und die Augenzahl wird notiert. Die Ereignisse A bis I sind in Worten beschrieben. Ordnen Sie jedem Ereignis die zugehörige Mengenschreibweise zu.

A: Eine ungerade Zahl _____ = {1, 2, 3, 4}

B: Eine größere Zahl als 2 _____ = {2, 3, 5}

C: Höchstens die Zahl 4 _____ = {1, 2}

D: Mindestens 4 _____ = { }

E: Eine Primzahl _____ = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

F: Höchstens eine 6 _____ = {4, 5, 6}

G: Kleiner 3 _____ = {3, 4, 5, 6}

H: Gegenereignis von E _____ = {1, 4, 6}

I: Die Zahl 8 _____ = {1, 3, 5}

6 Ein Würfel wird ein Mal geworfen und die Augenzahl wird notiert. Die Ereignisse $A = \{1; 2; 4\}$, $B = \{1; 5; 6\}$ und $C = \{2; 3; 6\}$ sind gegeben. Geben Sie die durch die Verknüpfungen hervorgehenden Ereignisse in aufzählender Schreibweise an.

a) $A \cap B = \{ \quad \}$ b) $A \cup C = \{ \quad \}$

c) $A \cap \overline{A} = \{ \quad \}$ d) $\overline{A} \cap B = \{ \quad \}$

7 Eine Münze wird drei Mal geworfen. Beschreiben Sie die Ereignisse in Worten bzw. in aufzählender Schreibweise.

A= {www, zzz}	A:
B = { }	B: Im dritten Wurf Wappen
C= { }	C: Mindestens zwei Mal Zahl
$D = \overline{C}$	D = { }
E: genau zwei Mal Zahl	E =
F = {wzz, zzz}	F:

8 Die Schülerinnen einer beruflichen Schule werden zum privaten Einsatz von internetfähigen Geräten befragt. Das Ereignis A sei „eine zufällig ausgewählte Schülerin besitzt ein Smartphone", das Ereignis B sei „eine zufällig ausgewählte Schülerin besitzt ein Tablet". Beschreiben Sie die durch die Verknüpfungen hervorgehenden Ereignisse in Worten. Eine zufällig ausgewählte Schülerin besitzt...

$\overline{A}$:

$A \cap B$:

$A \cup B$:

$\overline{A} \cap B$:

$A \cup \overline{B}$:

9 Drei weiße und 7 rote Bälle liegen in einer Kiste. Ein Besucher entnimmt 3 Bälle nacheinander ohne Zurücklegen aus der Kiste. Beschreiben Sie das folgende Ereignis.

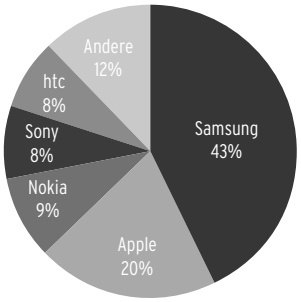
A: Der zweite Ball ist weiß. A=

B: Mindestens ein Ball ist weiß. B =

C: genau zwei Bälle haben die gleiche Farbe. C =

2 Wahrscheinlichkeit

1 Nebenstehend sind die Marktanteile der im Jahr 2014 in Deutschland eingesetzten Smartphones dargestellt.
Ein zufällig ausgewählter Nutzer eines Smartphones wird in diesem Jahr befragt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ...



a) hat dieser ein Smarthone von htc?

b) hat dieser ein Smartphone von Sony, Nokia oder htc?

c) hat dieser kein Smarthone der Marke Samsung?

d) hat dieser kein Smartphone von Samsung oder Apple?

2 Die 98 Schüler der Jahrgangsstufe 1 eines Wirtschaftsgymnasiums werden nach ihrem Alter und nach der gewählten Naturwissenschaft befragt.

	16 Jahre	17 Jahre	18 Jahre	19 Jahre	20 Jahre
Biologie	1	16	14	5	1
Chemie	1	19	14	4	2
Physik	2	6	7	5	1

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit. P =

a) Ein zufällig ausgewählter Schüler hat Chemie gewählt. _____

b) Ein zufällig ausgewählter Schüler ist 19 Jahre alt. _____

c) Ein zufällig ausgewählter Schüler ist 16 Jahre alt und hat Physik gewählt. _____

d) Ein zufällig ausgewählter Schüler ist nicht 18 Jahre alt. _____

e) Ein Schüler hat Chemie gewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er 20 Jahre alt? _____

f) Ein Schüler ist 17 Jahre alt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er nicht Physik gewählt? _____

3 Eine Fußballmannschaft hat 72 % der letzten 35 Spiele gewonnen. Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft das nächste Spiel gewinnt, ungefähr 72 %. Nehmen Sie Stellung.

5 Andreas möchte eine 10-tätige Gebirgstour machen. Die Wahrscheinlichkeit für einen Regentag beträgt dort in dieser Jahreszeit 34 %.
Berechnen Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Bernoulliformel.

X: Anzahl _____ ; X ist _____ -verteilt

Wahrscheinlichkeit für 2 Regentage?	P(X =___) = _____
Wahrscheinlichkeit für 3 oder 4 Regentage?	P(X =___) + P(____) = _____
Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Regentag?	1 – P(X =___) = _____
Wahrscheinlichkeit für höchstens 8 Regentage?	1 – P(X =___) – ____ = _____

6 Bei einer Tombola führen 10 % der Lose zu einem Gewinn. Jan kauft 12 Lose.
Geben Sie jeweils eine Aufgabenstellung an, deren Lösung auf die folgende Weise berechnet wird. Gehen Sie von einer Binomialverteilung aus.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Jan:

	$P = \binom{12}{3} \cdot 0{,}10^3 \cdot 0{,}90^9$
	$P = \binom{12}{2} \cdot 0{,}10^2 \cdot 0{,}90^{10} + \binom{12}{3} \cdot 0{,}10^3 \cdot 0{,}90^9$
	$P = 1 - \binom{12}{0} \cdot 0{,}10^0 \cdot 0{,}90^{12}$
	$P = \binom{12}{0} \cdot 0{,}10^0 \cdot 0{,}90^{12} + \binom{12}{1} \cdot 0{,}10^1 \cdot 0{,}90^{11}$

6 Bestimmen Sie die Schnittstellen der Graphen der Funktionen f und g und interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

Funktionsterme	Gleichsetzen: f(x) = g(x)	Geometrische Interpretation
a) $f(x) = x^2 + 1$ $g(x) = 2x$	$x^2 + 1 = 2x$ Nullform: $x^2 - 2x + 1 = 0$ Formel: $x_{1\|2} = 1 \pm \sqrt{1-1}$ Schnittstelle: $x_{1\|2} = 1$	Parabel und Gerade berühren sich (D = 0) in x = 1. Die Gerade ist Tangente an die Parabel.
b) $f(x) = x^2$ $g(x) = x - 1$		
c) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ $g(x) = 4x - 7$		

7 Die Gewinnentwicklung beim Verkauf der Damenräder der Adler GmbH wird durch die Gewinnfunktion G mit $G(x) = -2x^2 + 24x - 54$ dargestellt.

a) Berechnen Sie die Gewinnzone. Geben Sie Gewinnschwelle und Gewinngrenze an.

b) Bestimmen Sie den Gewinn bei einer Ausbringung von 5 ME.

c) Ermitteln Sie das Gewinnmaximum.

d) Die Adler GmbH möchte einen Gewinn von 10 GE erzielen. Bei welchen Produktionsmengen kann das Ziel erreicht werden?

8 Für das Produkt eines Monopolisten gilt die Preis-Absatz-Funktion p mit $p(x) = -x + 20$. Für das Produkt fallen Fixkosten in Höhe von 16 GE an. Die variablen Kosten betragen 10 GE/Stück.

a) Berechnen Sie den Höchstpreis und die Sättigungsmenge.

b) Stellen Sie die lineare Kostenfunktion auf. Geben Sie die Erlös- und die Gewinnfunktion an.

c) Ermitteln Sie die Kosten, den Erlös und den Gewinn für eine Ausbringung von 5 ME.

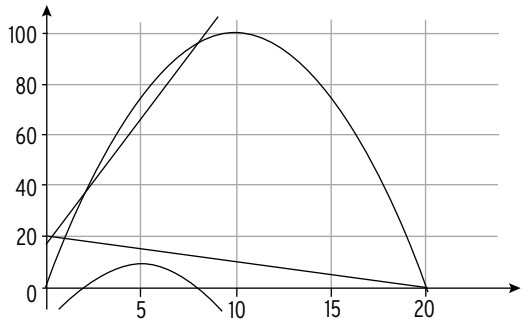
d) Beurteilen Sie die Gewinnsituation, wenn der Monopolist 16 ME anbietet.

e) Bestimmen Sie die Ausbringungsmengen, wenn der Monopolist einen Gewinn von 5 GE erzielen will.

f) Bei welcher Produktionsmenge maximiert das Unternehmen seinen Gewinn? Wie hoch ist der Gewinn dann?

g) Die Abbildung stellt den Sachverhalt grafisch dar.

Beschriften Sie die Abbildung.



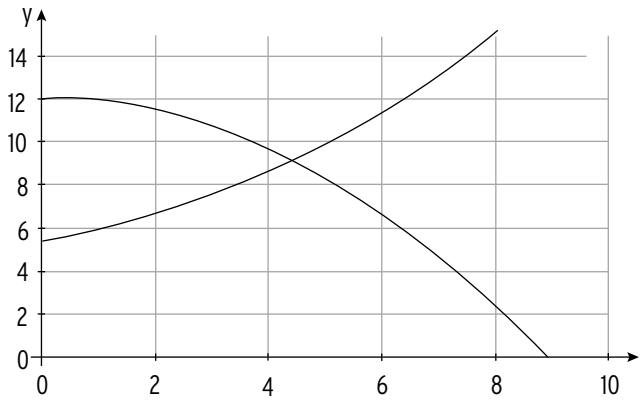
9 Die Analyse für ein schmerzlinderndes Präparat ergibt, dass sich die Angebotspreise und die Nachfragesituation auf dem Markt darstellen lassen durch p_A und p_N mit $p_A(x) = 0{,}1x^2 + 0{,}4x + 5{,}4$ und $p_N(x) = 12 - 0{,}15 \cdot x^2$,

x in ME, $p_A(x)$ bzw. $p_N(x)$ in GE pro ME.

a) Geben Sie die Sättigungsmenge und den Höchstpreis an.

b) Berechnen Sie die Gleichgewichtsmenge und das Marktgleichgewicht.

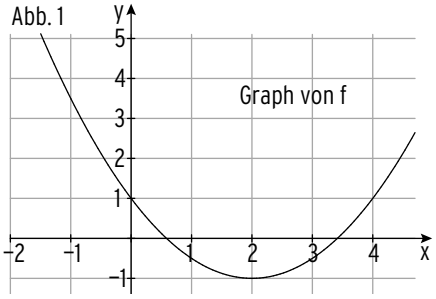
c) Kennzeichnen Sie die Situation im nebenstehenden Koordinatensystem.



4 Extrem-und Wendepunkte

Monotonie und Extrempunkte

1 Bestimmen Sie die Monotoniebereiche von f mithilfe der Abbildung.



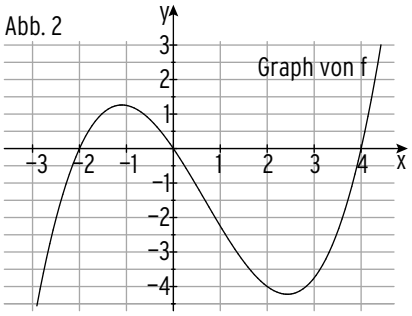


Abb. 1:

Abb. 2:

2 Zeigen Sie, f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 10$; $x \in \mathbb{R}$, ist monoton wachsend.

Ableitung:

3 Gegeben ist die Funktion f. Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f.

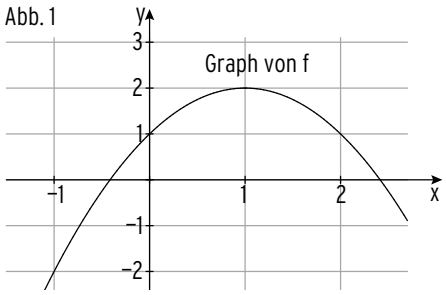
$f(x) = 2x^2 - 2x^3 + 1$; $x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 4x - 6x^2$; $f''(x) = 4 - 12x$ Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$ $\quad 4x - 6x^2 = 0$ Ausklammern: $\quad x(4 - 6x) = 0$ Satz vom Nullprodukt: $\quad x = 0 \vee 4 - 6x = 0$ Stellen mit waagrechter Tangente: $\quad x = 0 \vee x = \frac{2}{3}$ Mit $f''(0) = 4 > 0$ und $f(0) = 1$: $\quad T(0 \mid 1)$ Mit $f''(\frac{2}{3}) = -4 < 0$ und $f(\frac{2}{3}) = \frac{35}{27}$: $\quad H(\frac{2}{3} \mid \frac{35}{27})$
$f(x) = x^3 - 3x - 1$; $x \in \mathbb{R}$	

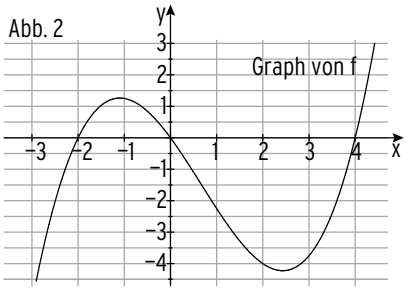
4 Gegeben ist die Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E. Füllen Sie die Tabelle aus.

Kostenfunktion K Erlösfunktion E	$K(x) = x^3 - 4x^2 + 19x + 18$ $E(x) = 30x$	$K(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 41$ $E(x) = -9x^2 + 72x$
Gewinnfunktion		
Variable Stückkosten-funktion		
Stückkostenfunktion		
Gewinnmaximum		
Betriebsminimum; kurzfristige Preisun-tergrenze		
Zeigen Sie: Das Betriebsoptimum liegt bei x_{BO} Langfristige Preisun-tergrenze	$x_{BO} = 3$	$x_{BO} \approx 5{,}25$

Krümmung und Wendepunkte

5 Bestimmen Sie die Krümmungsbereiche des Graphen von f mithilfe der Abbildung.





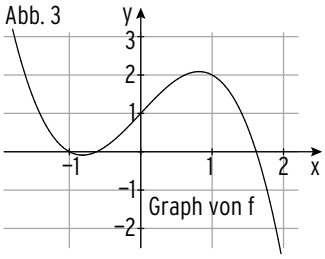


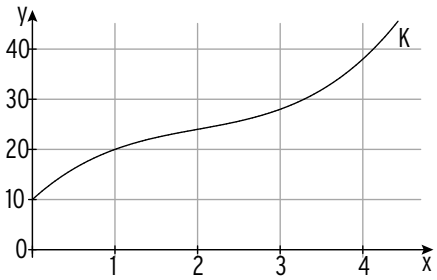
Abb. 1: Abb. 2: Abb. 3:

6 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$; $x \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Krümmung.

Ableitungen:

7 Gegeben ist die Kostenfunktion K mit $K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 10$; $x \geq 0$.

a) Zeigen Sie, das Schaubild von K hat keinen Extrempunkt.



b) Auf welchem Bereich wächst K degressiv?

2 Ein Betrieb fertigt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zunächst die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1, E_2 und E_3. Die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B sind gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Wie viele Rohstoffe werden benötigt, um 5 ME von Z_1, 8 ME von Z_2 und 8 ME von Z_3 herzustellen?

Lösung: $\vec{r}$ =

b) Wie viele Zwischenprodukte werden benötigt, um 5 ME von E_1, 8 ME von E_2 und 8 ME von E_3 herzustellen?

Lösung: $\vec{z}$ =

c) Berechnen Sie die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C.

Lösung: C = A · B =

d) Wie viel Rohstoffe braucht man zur Herstellung von 10 ME von E_1, 10 ME von E_2 und 5 ME von E_3?

Lösung: $\vec{r}$ =

3 Ein Betrieb fertigt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zunächst die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1, E_2 und E_3. Die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B sind gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Wie viele ME an Zwischenprodukten können gefertigt werden, wenn 9 ME von R_1, 18 ME von R_2 und 13 ME von R_3 verarbeitet werden?

Lösung:

b) Wie viele ME an Endprodukten können gefertigt werden, wenn 31 ME von Z_1, 26 ME von Z_2 und 5 ME von Z_3 verarbeitet werden?

Lösung:

c) Berechnen Sie die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C.

Lösung: $C = A \cdot B =$

d) Wie viele ME an Endprodukten können gefertigt werden, wenn 42 ME von R_1, 68 ME von R_2 und 30 ME von R_3 verarbeitet werden?

Lösung:

VI Finanzmathematik

1 Zins- und Zinseszinsrechnung

1 Ergänzen Sie die Lücken im Text.

Wird ein _____ über mehrere _____ zu einem festen _____ angelegt, so erhält der Anleger für jedes Jahr _____. Werden diese _____ nicht ausgezahlt, sondern weiter _____, so erhält der Anleger in den Folgejahren sogenannte _____. Nach Ablauf der _____ verfügt der Anleger dann über ein _____, das sich durch die folgende Formel berechnen lässt: _____

2 Füllen Sie die Tabelle aus.

Anfangskapital in EUR	Zinssatz p % $q = 1 + \frac{p}{100}$	Laufzeit in Jahren	Kapital nach n Jahren
700	2,5 %	6	$K_6 = 700 \cdot 1{,}025^6$ $K_6 = 811{,}79$
	4 %	5	2200
500		8	800
12500	1,5 %	6	
1000	3 %		1344

3 Tanja Brunker lebt gemeinsam mit ihrem jüngeren Bruder Stefan und ihren Eltern in Dortmund-Hörde.

3.1 Oma Anne aus Frankfurt eröffnet zu Tanjas 10. Geburtstag ein Sparbuch. Sie möchte einen Betrag in Höhe von 800,00 € einmalig einzahlen. Tanja soll dann das Geld zu ihrem 16. Geburtstag – also in 6 Jahren – ausgezahlt bekommen.

Wie viel Euro wird Tanja erhalten, wenn die Bank einen Zinssatz von 3,5 % bietet?

Kapital nach 6 Jahren:

3.2 Eigentlich hatte die Oma den Wunsch, dass sich Tanja von dem angesparten Geld einen kleinen Motorroller leisten kann. Hierfür sollten am Ende – also in 6 Jahren – mindestens 1.000,00 € auf dem Sparbuch sein. Wie viel Euro muss Tanjas Oma anlegen, wenn die Bank 3,5 % Zinsen anbietet?

Kapital nach 6 Jahren: $K_6 = 1000$

Anfangskapital K_0:

3.3 Tanjas Oma bekommt keine gute Rente. Sie hat derzeit nur 700,00 € zur Verfügung. Wie hoch müsste der Zinssatz der Bank sein, damit hieraus in den 6 Jahren die gewünschten 1.000,00 € werden?

Kapital nach 6 Jahren: $K_6 = 1000$

Anfangskapital $K_0 =$

3.4 Die Bank bietet Tanjas Oma nur einen Zinssatz von 3,0 % an. Wie lange würde es unter diesen Umständen dauern, bis die 700,00 € auf 1.000,00 € angewachsen sind?

Anfangskapital $K_0 = 700$

2 Rentenrechnung

Rentenendwert

1 Ergänzen Sie die Lücken im Text.

Eine Geldleistung heißt _____ , wenn sie

1. zu _____ Zeitpunkten fällig wird

2. in _____ Höhe gezahlt wird.

Wenn die _____ jeweils am Ende eines Zeitraums (z.B. Jahr) fällig sind, spricht man von einer _____ Rente. Liegt der Fälligkeitszeitpunkt der Rate dagegen jeweils _____ des Zeitraums, dann spricht man von einer _____ Rente. Zur Berechnung des **Rentenendwertes** R_n bzw. $\overline{R}_n$ gelten die folgenden Formeln:

Nachschüssig:

$R_n =$

Vorschüssig:

$\overline{R}_n =$

2 Peter Lustig zahlt 15 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres 24.000,00 € auf ein Sparkonto ein. Wie hoch ist das Guthaben nach 15 Jahren, wenn mit einem Zinssatz von 5% gerechnet wird?

Gesucht: Rentenendwert (Guthaben nach 15 Jahren, nachschüssig)

Gegeben:

3 Kurt zahlt jeweils zu Jahresbeginn 10.000€ auf ein Konto, welches 8% Verzinsung bietet. Wie hoch ist der Kontostand nach 10 Jahren?

Gesucht:

Gegeben:

I Statistik

1 Diagramme

1 Datenerhebung in einer 11. Klasse

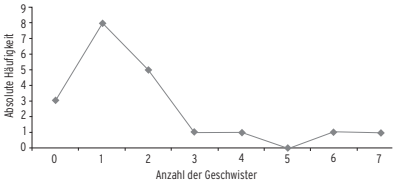


Diagramm 1: Liniendiagramm

Diagramm 2: Streifendiagramm

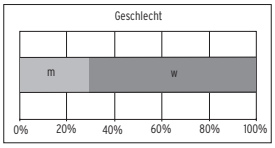
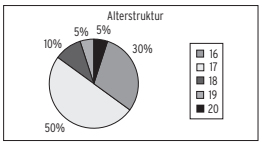


Diagramm 3: Kreisdiagramm



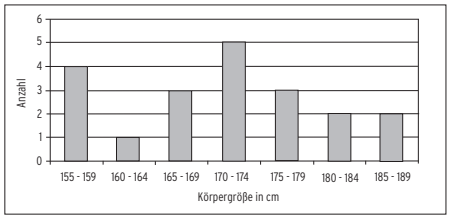


Diagramm 4: Balkendiagramm

1.1 Wie heißen die dargestellten Diagrammtypen? Tragen Sie die Bezeichnungen ein!

1.2 Was unterscheidet die Diagramme D2 und D3 von den Diagrammen D 1 und D4?

Einteilung nach Prozenten

1.3 Was unterscheidet das Diagramm D4 von allen anderen?

Unterteilung in Klassen

2 Beantworten Sie folgende Aufgaben mithilfe der Diagramme auf Seite 4. Notieren Sie auch Rechnungen, wenn diese hierzu erforderlich sind.

a) Wie hoch ist der Anteil der männlichen Schüler in der Klasse?

30 %

b) Wie alt sind die meisten Schüler der Klasse?

17 Jahre

c) Wie viel Schüler und Schülerinnen haben 3 Geschwister?

ein

d) Wie viele Geschwister haben die Schülerinnen und Schüler im Durchschnitt?

$0 \cdot 3 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 38; \quad \frac{38}{20} = 1{,}9$

2 Absolute und relative Häufigkeit

1 In vier verschiedenen Klassen der HöHa wurde das Alter von Schülern und Schülerinnen ermittelt. Man erhielt folgende Daten:

Klasse A

Alter	17	18	19	20
Anzahl	4	16	3	2

Klasse B

Alter	17	18	19	20
Anzahl	4	13	2	1

a) In welcher Klasse ist die relative Häufigkeit der 18-Jährigen größer?

Klasse A: 25 Schüler/innen relative Häufigkeit $\frac{16}{25} = 0{,}64 = 64\ \%$

Klasse B: 20 Schüler/innen relative Häufigkeit $\frac{13}{20} = 0{,}65 = 65\ \%$

Die relative Häufigkeit der 18-Jährigen ist im Klasse B höher.

b) In Klasse C sind $\frac{3}{5}$ der Schüler 18 Jahre alt, in Klasse D wird der Anteil derer mit 0,72 angegeben. Wie viele 18-Jährige sind in diesen beiden Klassen, wenn insgesamt jeweils 25 Schüler die Klasse C und D besuchen?

Klasse C: 25 Schüler/innen $\frac{3}{5}$ von 25: $\frac{3}{5} \cdot 25 = 15$

Klasse D: 25 Schüler/innen 72 % von 25: $0{,}72 \cdot 25 = 18$

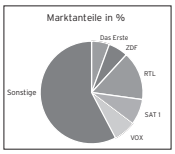
Klasse C besuchen 15 , Klasse D 18 Schüler/innen, die 18 Jahre alt sind.

2 Monatlich werden die Marktanteile der Fernsehanstalten ermittelt.

2.1 Dazu werden 3 600 Personen im Alter von 14 bis 49 Jahre befragt. Die Tabelle zeigt die Marktanteile bei den 14 – 49Jährigen.
Berechnen Sie die Anzahl der Stimmen für den jeweiligen Sender.
Zeichnen Sie ein Kreisdiagramm, in dem das Ergebnis dargestellt wird.

Sender	Das Erste	ZDF	RTL	SAT 1	VOX	Sonstige
rel. Häufigkeit	5,6 %	6,2 %	15,4 %	8,1 %	7,0 %	57,7 %
abs. Häufigkeit	202	223	554	292	252	2077

Kreisdiagramm:

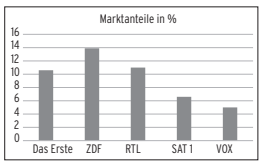


2.2 Um die Marktanteile beim Gesamtpublikum (ab 3 Jahre) zu ermitteln, werden 5000 Personen befragt. Die Tabelle zeigt das Ergebnis der Befragung. Erstellen Sie ein Säulendiagramm.

Sender	Das Erste	ZDF	RTL	SAT 1	VOX	Sonstige
abs. Häufigkeit	530	695	550	330	250	2645
rel. Häufigkeit	10,6 %	13,9 %	11,0 %	6,6 %	5,0 %	52,9 %

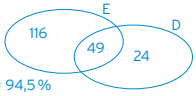
Säulendiagramm:

(ohne sonstige)



3 In einem Studentenwohnheim wohnen 200 Studenten. 165 von ihnen sprechen Englisch, 73 Deutsch, 49 sprechen beide Sprachen.

3.1 Wie groß ist die relative Häufigkeit der Studenten, die mindestens eine der beiden Sprachen sprechen?



Absolute Häufigkeit = 165 + 73− 49 = 189

Relative Häufigkeit= $\frac{\text{Absolute Häufigkeit}}{n} = \frac{189}{200} = 0{,}945 = 94{,}5\ \%$

3.2 Wie groß ist die relative Häufigkeit der Studenten, die keine der beiden Sprachen sprechen?

Absolute Häufigkeit= 200 − 189 = 11

Relative Häufigkeit= $\frac{\text{Absolute Häufigkeit}}{n} = \frac{11}{200} = 0{,}055 = 5{,}5\ \%$ (= 100 % − 94,5 %)

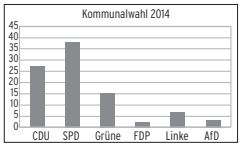
4 50,9% aller Deutschen sind Frauen. Einer Studie zufolge schnarchen 60% aller deutschen Männer. Wie groß ist die relative Häufigkeit der schnarchenden Männer unter allen Deutschen?
Anteil der Männer an der deutschen Gesamtbevölkerung: 49,1 %
Anteil der Schnarcher unter den Männern: 60 %
Anteil der schnarchenden Männer unter den Deutschen (60% von 49,1 %):
0,6 · 0,49 = 0,2946 = 29,46 % (= relative Häufigkeit)

5 Das Ergebnis der Kommunalwahl 2014 in Dortmund ist anhand der folgenden Tabelle ablesbar. 456 500 Personen waren wahlberechtigt, die Wahlbeteiligung lag bei 45 %.

Partei	Anzahl der Wählerstimmen	100 % = 205425
CDU	55 876	27,2 %
SPD	78 472	38,2 %
Grüne	31 635	15,4 %
FDP	4 930	2,4 %
Linke	13 969	6,8 %
AfD	6 984	3,4 %

5.1 Ermitteln Sie jeweils die prozentuale Verteilung (auf eine Nachkommastelle gerundet). siehe Tabelle

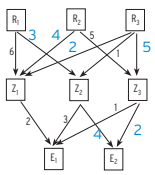
5.2 Stellen Sie die Daten in einem Säulendiagramm dar.



6 Ein Produktionsprozess kann durch ein Verflechtungsdiagramm, durch eine Verflechtungstabelle oder durch eine Verflechtungsmatrix beschrieben werden.

a) Ergänzen Sie die fehlenden Werte.

Verflechtungsdiagramm



Verflechtungstabelle

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	6	3	0
R_2	4	0	5
R_3	2	1	5

	E_1	E_2
Z_1	2	0
Z_2	3	4
Z_3	1	2

Verflechtungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 12 \\ 13 & 10 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$$

c) Interpretieren Sie die Elemente der Matrix C.
Für die Produktion je einer ME E_1 braucht man 21 ME R_1, 13 ME R_2 und 12 ME R_3.

Für die Produktion je einer ME E_2 braucht man 12 ME R_1, 10 ME R_2 und 14 ME R_3.

d) Interpretieren Sie die zweite Spalte der Matrix B.

Für die Produktion je einer ME E_2 braucht man 0 ME Z_1, 4 ME Z_2 und 2 ME Z_3.

e) Interpretieren Sie die erste Zeile der Matrix A.

Für die Produktion einer ME Z_1 braucht man 6 ME R_1 und für eine ME Z_2 3 ME R_1 und für eine ME Z_3 kein R_1.

Produktions-und Verbrauchsvektoren

1 Ein Betrieb fertigt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zunächst die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1, E_2 und E_3. Die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B sind gegeben durch

$$A = A_{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B = B_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Wie viele Rohstoffe werden benötigt, um 6 ME von Z_1, 6 ME von Z_2 und 10 ME von Z_3 herzustellen?

Lösung: $\vec{r} = A_{RZ} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 22 \\ 70 \end{pmatrix}$

Es werden 40 ME R_1, 22 ME R_2 und 70 ME R_3 benötigt.

b) Wie viele Zwischenprodukte werden benötigt, um jeweils 10 ME von E_1, E_2 und E_3 herzustellen?

Lösung: $\vec{z} = B_{ZE} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 60 \\ 90 \end{pmatrix}$

Es werden 110 ME von Z_1, 60 ME von Z_2 und 90 ME von Z_3 benötigt.

c) Berechnen Sie die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C.

Lösung: $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 13 & 19 \\ 9 & 6 & 11 \\ 24 & 15 & 32 \end{pmatrix} \qquad C = C_{RE}$

d) Wie viel Rohstoffe braucht man zur Herstellung von 10 ME von E_1, 10 ME von E_2 und 5 ME von E_3?

Lösung: $\vec{r} = C_{RE} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 395 \\ 205 \\ 550 \end{pmatrix}$

Es werden 395 ME R_1, 205 ME R_2 und 550 ME R_3 benötigt.

2 Ein Betrieb fertigt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zunächst die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1, E_2 und E_3. Die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B sind gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Wie viele Rohstoffe werden benötigt, um 5 ME von Z_1, 8 ME von Z_2 und 8 ME von Z_3 herzustellen?

Lösung: $\vec{r} = A_{RZ} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 26 \\ 37 \end{pmatrix}$

Es werden 58 ME R_1, 26 ME R_2 und 37 ME R_3 benötigt.

b) Wie viele Zwischenprodukte werden benötigt, um 5 ME von E_1, 8 ME von E_2 und 8 ME von E_3 herzustellen?

Lösung: $\vec{z} = B_{ZE} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 37 \\ 23 \end{pmatrix}$

Es werden 26 ME von Z_1, 37 ME von Z_2 und 23 ME von Z_3 benötigt.

c) Berechnen Sie die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C.

Lösung: $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 11 & 8 \\ 8 & 5 & 4 \\ 10 & 7 & 5 \end{pmatrix} = C_{RE}$

d) Wie viel Rohstoffe braucht man zur Herstellung von 10 ME von E_1, 10 ME von E_2 und 5 ME von E_3?

Lösung: $\vec{r} = C_{RE} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 310 \\ 150 \\ 195 \end{pmatrix}$

Es werden 310 ME R_1, 150 ME R_2 und 195 ME R_3 benötigt.

3 Ein Betrieb fertigt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zunächst die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1, E_2 und E_3. Die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B sind gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Wie viele ME an Zwischenprodukten können gefertigt werden, wenn 9 ME von R_1, 18 ME von R_2 und 13 ME von R_3 verarbeitet werden?

Lösung: Aus $\vec{r} = A_{RZ} \cdot \vec{z}$ ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für z_1, z_2 und z_3:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 9 \\ 2z_1 + z_2 + z_3 &= 19 \\ z_1 \quad\; + 2z_3 &= 16 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 18 \\ 1 & 0 & 2 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Lösung des linearen Gleichungssystems: $z_1 = 5$; $z_2 = 4$; $z_3 = 4$

Es können 5 ME von Z_1, 4 ME von Z_2 und 4 ME von Z_3 gefertigt werden.

b) Wie viele ME an Endprodukten können gefertigt werden, wenn 31 ME von Z_1, 26 ME von Z_2 und 5 ME von Z_3 verarbeitet werden?
Lösung:

Aus $\vec{z} = B_{ZE} \cdot \vec{x}$ ergibt sich ein lineares Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 31 \\ 26 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 31 \\ 1 & 2 & 1 & 26 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 31 \\ 0 & 3 & 1 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Lösung des linearen Gleichungssystems: $x_2 = 5$; $x_3 = 6$; $x_1 = 10$

Man kann 10 ME von E_1, 5 ME von E_2 und 6 ME von E_3 herstellen.

c) Berechnen Sie die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C.

Lösung: $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

d) Wie viele ME an Endprodukten können gefertigt werden, wenn 42 ME von R_1, 68 ME von R_2 und 30 ME von R_3 verarbeitet werden?
Lösung:

Aus $C_{RE} \cdot \vec{x} = \vec{r}$ ergibt sich ein lineares Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 42 \\ 68 \\ 30 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 2 & 42 \\ 5 & 5 & 3 & 68 \\ 2 & 3 & 1 & 30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 2 & 42 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

Lösung des linearen Gleichungssystems: $x_2 = 4$; $x_3 = 6$; $x_1 = 6$

Man kann 6 ME von E_1, 4 ME von E_2 und 6 ME von E_3 herstellen.