Bohner
Ott
Deusch

Mathematik im Berufskolleg II

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner
Lehrauftrag Mathematik an der KSW Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch
Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Umschlag: © Adrian Schulz Foto: Mall of Berlin
Bild Kreis links: © Christian Schwier – fotolia.com
Bild Kreis rechts: © Kirill Kedrinski – fotolia.com

* * * * * * * * * *

6. Auflage 2016

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-**0303-2**

4.4.2 Gemeinsame Punkte

Beispiel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1{,}5\sin(3x);\ x \in [-0{,}5;\ \pi]$.
Bestimmen Sie die Nullstellen von f.
Zeigen Sie: Je zwei aufeinanderfolgende Nullstellen haben einen Abstand von $\frac{\pi}{3}$.

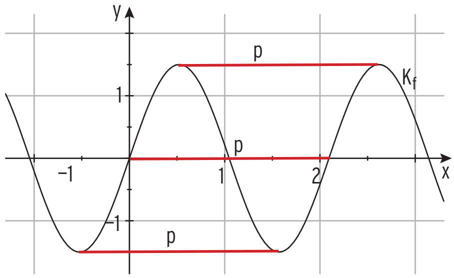
Lösung

Bedingung für die **Nullstellen**: $f(x) = 0$

$$1{,}5\sin(3x) = 0 \quad |:1{,}5$$
$$\sin(3x) = 0$$
$$3x = 0;\ \pm\pi;\ \pm2\pi;\ \pm3\pi;\ \ldots \quad |:3$$
$$x = 0;\ \pm\frac{\pi}{3};\ \pm\frac{2}{3}\pi;\ \pm\pi;\ \ldots$$

Nullstellen von f auf D:
$x_1 = 0;\ x_2 = \frac{\pi}{3};\ x_3 = \frac{2}{3}\pi;\ x_4 = \pi$

Man erkennt; Je zwei aufeinanderfolgende Nullstellen haben einen Abstand von $\frac{\pi}{3}$.



Beispiel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right);\ x \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie die exakte Periode und damit drei Nullstellen von f.

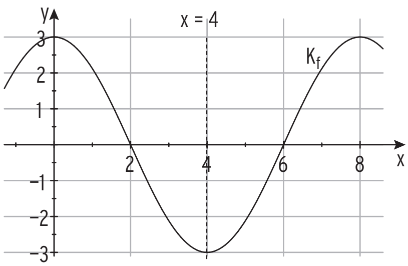
Lösung

f hat die Periode $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$.

K_f: $f(x) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ ist symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = 4$.
(4 ist die halbe Periode, siehe Abb.)

f hat die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$.

Weitere Nullstelle: $x_3 = 2 + 8 = 10$
oder $x_3 = -2$.



Hinweise: K_f ist nicht in y-Richtung verschoben.

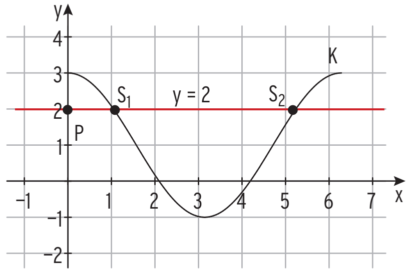
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 0 \text{ für } \frac{\pi}{4}x = \pm\frac{\pi}{2};\ \pm\frac{3}{2}\pi;\ \pm\frac{5\pi}{2} \quad \Big|:\frac{4}{\pi}$$
$$x = \pm2;\ \pm6;\ \pm10;\ \ldots$$

Beispiel

K ist das Schaubild von f mit $f(x) = 2\cos(x) + 1$; $x \in [0; 2\pi]$.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K mit der Parallelen zur x-Achse durch den Punkt $P(0\,|\,2)$.

Lösung

Parallele zur x-Achse durch P: $y = 2$
Die Parallele ist das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 2$.



Gleichsetzen: $f(x) = g(x)$ $\quad 2\cos(x) + 1 = 2$

$\cos(x) = \frac{1}{2}$

Erste Lösung (Schnittstelle) mit WTR: $x_1 = \frac{\pi}{3}$

Weitere Lösung von $\cos(x) = \frac{1}{2}$ (auf $\mathbb{R}$): $x_2 = -\frac{\pi}{3}$

Weitere Lösung auf $[0; 2\pi]$: $x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5}{3}\pi$

$x_4 = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7}{3}\pi > 2\pi$

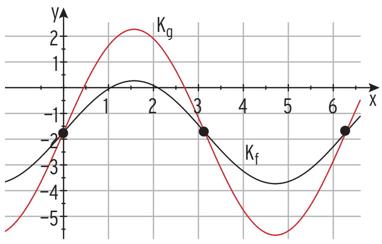
Schnittpunkte: $S_1\left(\frac{\pi}{3}\,\middle|\,2\right)$; $S_2\left(\frac{5}{3}\pi\,\middle|\,2\right)$

Beispiel

Die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = 2\sin(x) - \sqrt{3}$ und $g(x) = 4\sin(x) - \sqrt{3}$ schneiden sich für $x \in [-1{,}5; 7]$ in drei Punkten. Bestimmen Sie diese Punkte.

Lösung

Veranschaulichung:
Schaubilder von f und g



Gleichsetzen: $f(x) = g(x)$ $\quad 2\sin(x) - \sqrt{3} = 4\sin(x) - \sqrt{3}$

$\sin(x) = 0$

Schnittstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = \pi$; $x_3 = 2\pi$

Schnittpunkte: $S_1(0\,|\,-\sqrt{3})$; $S_2(\pi\,|\,-\sqrt{3})$; $S_3(2\pi\,|\,-\sqrt{3})$

Hinweis: Die Schnittpunkte liegen auf einer **Parallelen zur x-Achse** mit der Gleichung $y = -\sqrt{3}$.

Beispiel

➡ Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(2x) + 1$; $x \in \mathbb{R}$.
Es gibt unendlich viele Stellen, an denen die Funktionswerte von f null sind.
Bestimmen Sie diejenige exakt, die am nächsten bei null liegt.
Erläutern Sie, wie sich die anderen Stellen aus dieser berechnen lassen.
Die gemeinsamen Punkte von K_f und der x-Achse sind Berührpunkte.
Erläutern Sie diese Behauptung.
Skizzieren Sie ihr Schaubild K_f.

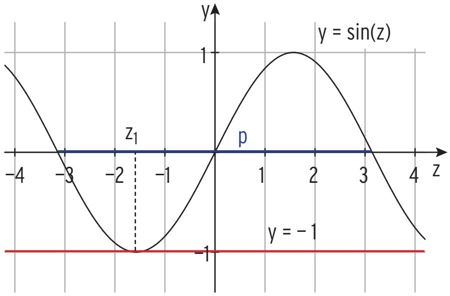
Lösung

Nullstellen von f

Bedingung: $f(x) = 0$ $\quad \sin(2x) = -1$

Der WTR liefert für die Gleichung $\sin(z) = -1$ eine exakte Lösung: $z_1 = -\frac{\pi}{2}$

Einzige Lösung „auf einer Periode".



Lösung in z: $z_1 = -\frac{\pi}{2}$

Lösung in x: Mit $z = 2x$ $\quad 2x = -\frac{\pi}{2} \quad | :2$

$x_1 = -\frac{\pi}{4}$

Nullstelle von f, die am nächsten bei null liegt: $x_1 = -\frac{\pi}{4}$

Die weiteren Nullstellen erhält man durch Addition von Vielfachen einer Periode von f.

Für die Periode von f gilt: $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Nullstellen auf $\mathbb{R}$:

$x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi$

$x_3 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7}{4}\pi$

$x_4 = -\frac{\pi}{4} + 3\pi = \frac{11}{4}\pi$

Das Schaubild K_f berührt die x-Achse.

Begründung:

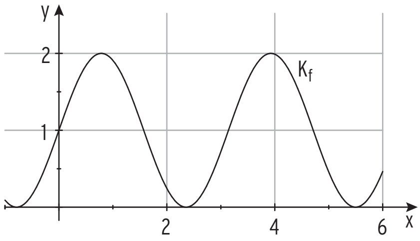
Es ist zu zeigen: $\quad f(x) \geq 0$

$\sin(2x) + 1 \geq 0$

$\sin(2x) \geq -1$

wahre Aussage für alle $x \in \mathbb{R}$,
da $-1 \leq \sin(2x) \leq 1$.

Skizze von K_f

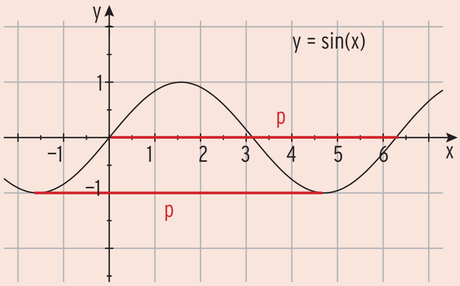


Was man wissen sollte – über trigonometrische Funktionen

Definition: Die Funktion f mit
$f(x) = \sin(x)$; $x \in \mathbb{R}$, heißt **Sinusfunktion.**

Beachten Sie:
$\sin(0) = 0$
$-1 \leq \sin(x) \leq 1$
Periode $p = 2\pi$

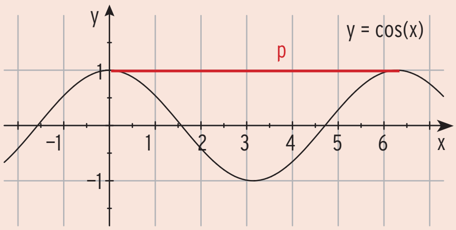
Nullstellen:
$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; \pm\pi; \pm 2\pi; \pm 3\pi; \ldots$



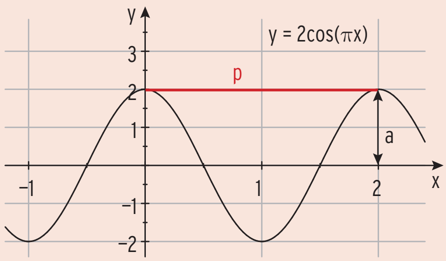
Definition: Die Funktion f mit
$f(x) = \cos(x)$; $x \in \mathbb{R}$, heißt **Kosinusfunktion.**

Beachten Sie:
$\cos(0) = 1$
$-1 \leq \cos(x) \leq 1$
Periode $p = 2\pi$

Nullstellen:
$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}\pi; \pm\frac{3}{2}\pi; \pm\frac{5}{2}\pi; \ldots$

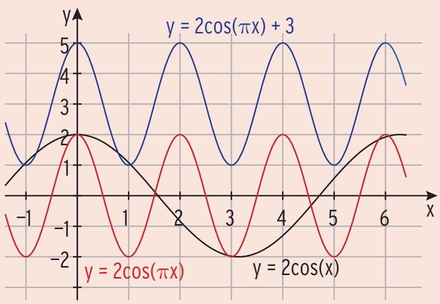


Das Schaubild einer Funktion f mit
$f(x) = a\sin(kx) + b$ bzw.
$f(x) = a\cos(kx) + b$
hat die **Amplitude $|a|$** (positiver Wert)
und die **Periode** $p = \frac{2\pi}{k}$; $k > 0$



a = 2; b = 0 Aus p = 2 folgt k = π.

Es entsteht aus der Sinus- (Kosinus-) kurve durch:
Streckung in y-Richtung mit Faktor a (a > 0)
(Für a < 0: zusätzlich eine Spiegelung an der x-Achse)
Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{k}$
Verschiebung in y-Richtung um b



Hinweis: Verschiebt man G: $y = \sin(x)$ um c in x-Richtung, so erhält man G*: $y = \sin(x - c)$.

Aufgaben

1 Berechnen Sie die Nullstellen von f auf $D = [0;\, 2\pi]$.

a) $f(x) = 2\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$ **b)** $f(x) = \cos(1{,}5\,x)$ **c)** $f(x) = \sin(2x) - 1$

2 Bestimmen Sie die exakten Nullstellen der Funktion f auf $D = [-4;\, 6{,}5]$.

a) $f(x) = -2\cos(x) + 1$ **b)** $f(x) = 4\sin(x) + 2$ **c)** $f(x) = 2\sin(x) + \sqrt{2}$

3 Beschreiben Sie die Eigenschaften der Funktion f und ihres Schaubildes (Periode, Amplitude, Wertebereich, Symmetrie). Skizzieren Sie das Schaubild von f.
Berechnen Sie zwei Nullstellen von f ohne Verwendung eines Hilfsmittels.

a) $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ **b)** $f(x) = 2 - 2\cos\left(\frac{3}{2}x\right)$ **c)** $f(x) = -3\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$

4 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5\sin(x) + 0{,}25;\ x \in [-1;\, 2\pi]$.

a) Berechnen Sie zwei aufeinanderfolgende Nullstellen ungerundet.

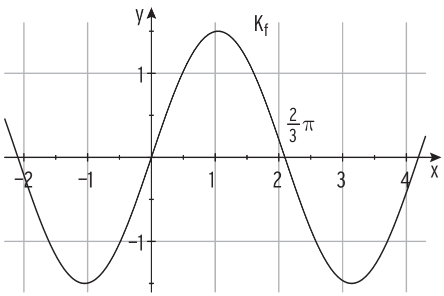
b) Das Schaubild von f schneidet die Parallele zur x-Achse durch $(0\,|\,0{,}5)$ in zwei Punkten. Bestimmen Sie die exakten Koordinaten.

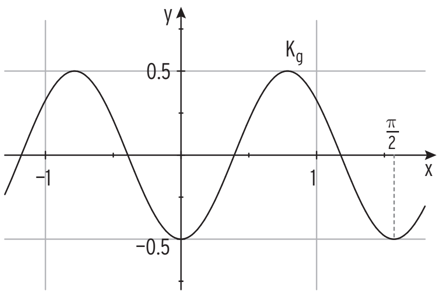
c) Wie ändert sich der Funktionsterm, wenn man das Schaubild von f um 2 nach links verschiebt?

5 K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \cos(2x) + 1;\ x \in [-2;\, 5]$.
Zeigen Sie, dass f in $x = \frac{\pi}{2}$ eine Nullstelle hat.
Bestimmen Sie die weiteren Nullstellen im Definitionsbereich.

6 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3\sin(\pi x);\ x \in [-0{,}5;\, 2{,}5]$.
Zeigen Sie: Zwei aufeinanderfolgende Nullstellen haben einen Abstand von 1.

7 Bestimmen Sie mithilfe der Periode die exakten Nullstellen von f bzw. g im gezeichneten Bereich. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm an.





8 Eine trigonometrische Funktion f hat die Periode $p = 6$. Ihr Graph verläuft durch den Ursprung. Der Wertebereich ist das Intervall $[-5;\, 5]$.
Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm und geben Sie zwei Nullstellen von f an.

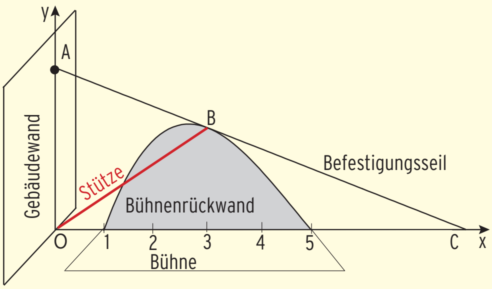
III Differenzialrechnung

1 Ableitung von Funktionen

Modellierung einer Situation

In der Pause eines Openair-Konzerts nimmt der Kioskbesitzer Huber ein Getränk aus dem Kühlschrank. Da es nicht verkauft wird, erwärmt es sich.
Der Term $T(t) = 27 - 19e^{-0{,}1t}$; $t \geq 0$
(t in Minuten, T(t) in Grad Celsius) beschreibt näherungsweise den Erwärmungsvorgang.
Welche Temperatur hat das Getränk, wenn es die Umgebungstemperatur hat?
Zu welcher Zeit steigt die Temperatur am schnellsten an? Wie groß ist dieser Anstieg?
Bestimmen Sie für die ersten 15 Minuten die durchschnittliche Temperaturänderung.

Für das Openair-Konzert soll rechts neben einer Gebäudewand eine Bühne errichtet werden. Die Bühnenrückwand soll die Form eines Bogens haben (siehe Abbildung, nicht maßstabsgerecht).
In einem Koordinatensystem wird der Bogen durch den im 1. Quadranten verlaufenden Teil der Funktion f mit
$f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{14}{5}x^2 + \frac{53}{5}x - 8$, $(1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{m})$



beschrieben. Zur Sicherung der Bühnenkonstruktion wird ein Seil vom Punkt A(0|6,4) an der Gebäuderückwand zum Punkt C(8|0) auf dem Boden gespannt. Der für den Aufbau zuständige Techniker behauptet, das Seil berührt die Bühnenrückwand in einem Punkt B und eine von O zu B führende Stabilisierungsstütze verläuft senkrecht zum Seil.
Überprüfen Sie diese zwei Behauptungen.

Bearbeiten Sie diese Situation, nachdem Sie die rechts aufgeführten **Qualifikationen und Kompetenzen** erworben haben.

Qualifikationen & Kompetenzen

- Mittlere und lokale Änderungsrate berechnen
- Ableitungsregeln anwenden
- Tangentengleichung bestimmen
- Ableitung grafisch veranschaulichen und interpretieren
- Modellieren von realen Situationen

1.1 Änderungsrate

Bei Wachstumsvorgängen ändert sich im Allgemeinen der Bestand in Abhängigkeit von der Zeit, z. B. die Bevölkerungszahl in Deutschland, der Durchmesser eines Baumes, die Gesamtkosten einer Produktion, die Geschwindigkeit eines Autos, der Zufluss in ein Gefäß usw.
Bei einem Wachstumsvorgang kommt es jedoch nicht nur auf den Bestand an, sondern auch darauf, wie schnell sich der Bestand ändert.
Diese „Schnelligkeit" versucht man mathematisch zu beschreiben.

Beispiel

➲ Während eines Dauerregens wird die Wassermenge (Volumen in Liter) in einer Regentonne in Abhängigkeit von der Zeit (in Minuten) gemessen.

Zeit in x in min	0	1	3	5
Volumen y in ℓ	25	29,2	37,6	58

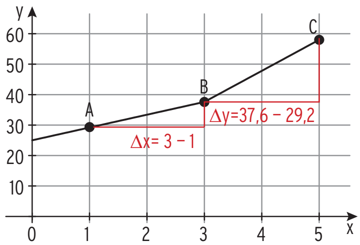
Berechnen Sie die Volumenänderung pro Minute.
Übertragen Sie die Messdaten in ein Koordinatensystem.

Lösung

Volumenänderung pro Minute

auf dem Intervall [0; 1] : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{29{,}2 - 25}{1 - 0} = 4{,}2$

auf dem Intervall [1; 3] : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{37{,}6 - 29{,}2}{3 - 1} = \frac{8{,}4}{2} = 4{,}2$



Zeitintervall	[0; 1]	[1; 3]	[3; 5]
Dauer in min (Δx)	1	2	2
Volumenänderung Δy	4,2	8,4	20,4
Änderungsrate in $\frac{\ell}{\text{min}}$	4,2	4,2	10,2

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Das Volumen ändert sich pro Minute auf dem Intervall [0; 1] bzw. [1; 3] um 4,2 ℓ, d. h.: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4{,}2$.
Mit anderen Worten: $4{,}2\frac{\ell}{\text{min}}$ ist die **mittlere Änderungsrate des Volumens.**
Auf dem Intervall [3; 5] ist die **mittlere Änderungsrate** des Volumens $10{,}2\frac{\ell}{\text{min}}$.
Die mittlere Änderungsrate $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ entspricht der Steigung der Strecke AB bzw. BC.

Festlegung

Die (mittlere) Änderungsrate einer Funktion im **Intervall [a; b]** ist der **Differenzenquotient** $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Mit dem Differenzenquotient kann z. B. beschrieben werden:
- die mittlere Steigung
- die mittlere Kostenzunahme
- die mittlere Wegänderung

Beispiel

Bei der Produktion eines Artikels werden die Gesamtkosten in € pro Tag, in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge x (in Stück), festgelegt durch:

$K(x) = x^2 + 3x + 100; \quad x \geq 0$

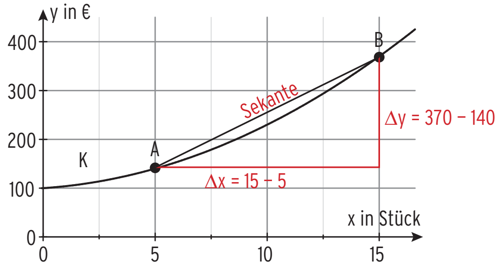
Von $x = 5$ soll die Produktionsmenge um 10 Stück erhöht werden.

Bestimmen Sie den mittleren Kostenzuwachs.

Bestimmen Sie den momentanen Kostenzuwachs für $x = 5$.

Lösung

x	5	15
K(x)	140	370



Mittlere Änderungsrate von K auf [5; 15]

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{K(x_2) - K(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{K(15) - K(5)}{15 - 5} = \frac{370 - 140}{10}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 23$$

Erhöht man die Produktion von 5 Stück auf 15 Stück, so erhöhen sich die Kosten durchschnittlich um 23 €/Stück.

Bedeutung der (mittleren) Änderungsrate

Die Änderungsrate ist die Steigung m der Sekante (AB), d.h. $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Dies entspricht der mittleren Kostenzunahme.

Da sich die Kurve und die Strecke AB auf dem Intervall [5; 15] unterscheiden, ist 23 nur ein Näherungswert und nicht die tatsächliche Kostenzunahme (**Grenzkosten**) bei der Produktion von 5 Stück.

Diesen Näherungswert kann man verbessern, indem man die Abstände Δx verkleinert, d.h. den Punkt B näher an den Punkt A „wandern" lässt.

Welche momentane Kostenzunahme liegt nun tatsächlich nach 5 Stück vor?

Dazu berechnet man die Änderungsraten für $\Delta x \to 0$.

Intervall $[5; x_2]$	[5; 10]	[5; 6]	[5; 5,1]	[5; 5,01]	
$\Delta x = x_2 - 5$	$10 - 5 = 5$	$6 - 5 = 1$	$5{,}1 - 5 = 0{,}1$	$5{,}01 - 5 = 0{,}01$	$\to 0$
$\Delta y = K(x_2) - K(5)$	$230 - 140 = 90$	$154 - 140 = 14$	$141{,}31 - 140 = 1{,}31$	$140{,}1301 - 140 = 0{,}1301$	
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{K(x_2) - K(5)}{x_2 - 5}$	$\frac{90}{5} = 18$	$\frac{14}{1} = 14$	$\frac{1{,}31}{0{,}1} = 13{,}1$	$\frac{0{,}1301}{0{,}01} = 13{,}01$	$\to 13$

Die **momentane Änderungsrate (Grenzkosten)** bei 5 Stück beträgt $13 \frac{€}{\text{Stück}}$.

Hinweis: Mittlere Änderungsrate von K im Intervall $[5; x_2]$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{K(x_2) - K(5)}{x_2 - 5}$

Für $\Delta x = x_2 - 5 \to 0$ erhält man die momentane Änderungsrate von K an der Stelle $x = 5$.

Beispiel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x;\ x \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall [1; 3].

b) Ermitteln Sie die momentane Änderungsrate an der Stelle x = 1 bzw. an der Stelle x = 4.

Lösung

a) Mittlere Änderungsrate auf [1; 3]: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{4{,}5 - 2{,}5}{2} = 1$

Die Steigung der Sekante durch (1 | 2,5) und (3 | 4,5) ist 1.

b) Mittlere Änderungsrate auf $[x_1; x_2]$: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Für $x_1 = 1$: $\frac{f(x_2) - f(1)}{x_2 - 1}$

Untersuchung für $\Delta x = x_2 - 1 \to 0$

Tabelle

Intervall $[1; x_2]$	[1; 1,1]	[1; 1,01]	[1; 1,001]	[1; 1,0001]
$\Delta x = x_2 - 1$	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{f(x_2) - f(1)}{x_2 - 1}$	1,95	1,995	1,9995	1,999 95

Die mittlere Änderungsrate stebt gegen 2. Die momentane Änderungsrate in x = 1 ist 2.

Untersuchung für $x_1 = 4$: $\frac{f(x_2) - f(4)}{x_2 - 4}$ und $\Delta x = x_2 - 4 \to 0$

Tabelle

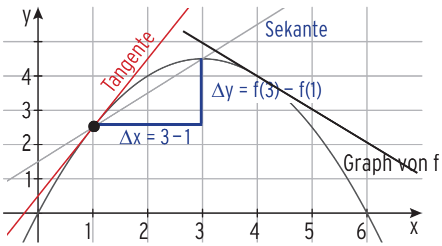
Intervall $[4; x_2]$	[4; 4,1]	[4; 4,01]	[4; 4,001]
$\Delta x = x_2 - 4$	0,1	0,01	0,001
$\frac{f(x_2) - f(4)}{x_2 - 4}$	– 1,05	– 1,005	– 1,0005

Die mittlere Änderungsrate stebt gegen – 1. Die momentane Änderungsrate in x = 4 ist – 1.

Grafische Interpretation:

Die Tangente an der Stelle x = 1 hat die Steigung 2.

Die Tangente an der Stelle x = 4 hat die Steigung – 1.



Hinweis: Die momentane Änderungsrate entspricht der Steigung der Tangente.

Beachten Sie:

Die **mittlere Änderungsrate** von f auf $[x_1; x_2]$: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ strebt für $x_2 \to x_1$ gegen die **momentane Änderungsrate von f** an der Stelle x_1.
(Grenzwert der mittleren Änderungsrate).

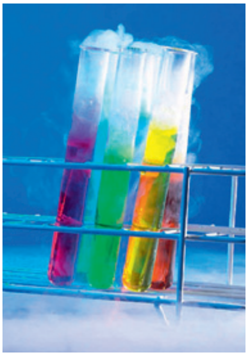
Aufgaben

1 Berechnen Sie die mittleren Änderungsraten von f mit $f(x) = x^2 - x + 1$ auf den Intervallen: [0; 3], [1; 1,5] und [−4; −2,5].

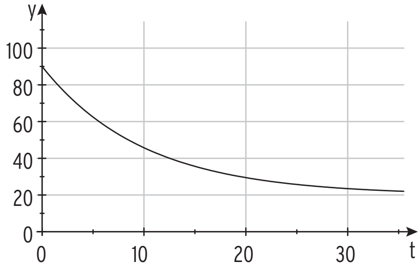
2 Chemische Reaktionen können langsam oder schnell ablaufen. Bringt man z. B. Zink in Salzsäure, entsteht Wasserstoff. Die folgende Tabelle gibt die Menge des Wasserstoffs in Abhängigkeit von der Zeit an.

Zeit in s	2	4	6	8	10	12
Menge Wasserstoff in ml	21	30,5	35,5	40,5	42,5	43

Erstellen Sie hierzu ein Diagramm.
Berechnen Sie die mittleren Änderungsraten auf den folgenden Intervallen [2; 4], [4; 8] und [8; 12].
Was lässt sich über die Wasserstoffproduktion aussagen?



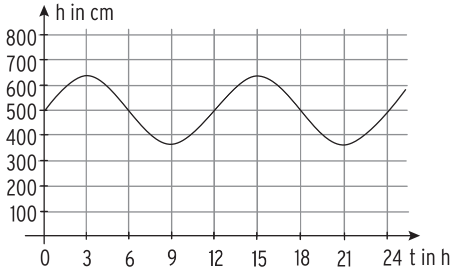
3 Ein Pudding kühlt nach seiner Zubereitung ab. Der Term $T(t) = 20 + 70\,e^{-0{,}1t}$; $t \geq 0$ (t in Minuten, T(t) in Grad Celsius) beschreibt den Abkühlvorgang. Die Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion T.



a) Von welcher anfänglichen Temperatur geht man aus?
b) Welche Temperatur hat der Pudding, wenn er abgekühlt ist?
c) Zu welcher Zeit ist die „Geschwindigkeit", mit der sich der Pudding abkühlt, am größten?
d) Berechnen Sie für die ersten 10 Minuten die durchschnittliche Temperaturänderung.

4 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$.
a) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von f auf dem Intervall $I = [2; 5]$.
b) Bestimmen Sie die Gleichung der Sekante g durch $P(2 \mid f(2))$ und $Q(5 \mid f(5))$. Zeichnen Sie die Schaubilder von f und g in ein Koordinatensystem.
c) Ermitteln Sie die momentane Änderungsrate von f an der Stelle $x = 2$. Interpretieren Sie geometrisch.

5 Die Abbildung zeigt den Wasserstand h in Cuxhaven (in cm über Pegelstand) zur Zeit t. Dabei entspricht $t = 0$ der Uhrzeit 0:00 Uhr.
Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung die größte Änderungsrate der Höhe h.



1.6 Senkrechtes Schneiden, Berühren

Die Kurven K und G schneiden sich senkrecht

Beispiel

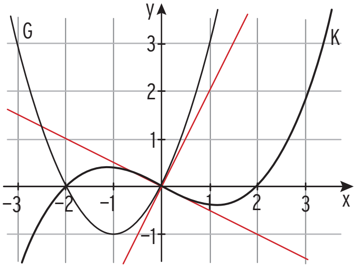
Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x$ und g mit $g(x) = x^2 + 2x$; $x \in \mathbb{R}$.
K ist das Schauild von f und G ist das Schaubild von g.
Zeigen Sie: Die Schaubilder K und G schneiden sich im Ursprung senkrecht.

Lösung

Beachten Sie:

K von f und G von g **schneiden sich** in S **senkrecht (orthogonal)**, wenn die **Tangenten** an K und G in S **senkrecht** aufeinander stehen.
Bedingungen: $f(x_S) = g(x_S)$ und $f'(x_S) \cdot g'(x_S) = -1$

Schnittstelle $x_S = 0$ ist gegeben.
Die Bedingungen werden durch **Einsetzen** geprüft: • $f(0) = 0 = g(0)$ w. A.
Ableitungen:
$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{2}$; $g'(x) = 2x + 2$
Mit $f'(0) = -\frac{1}{2}$ und $g'(0) = 2$ folgt:
• $f'(0) \cdot g'(0) = -1$ w. A.



Die Kurven K und G berühren sich

Beispiel

K und G sind die Graphen von f mit $f(x) = \frac{1}{e} \cdot e^x + 1$ und von g mit $g(x) = -x^2 + 3x$; $x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass sich K und G in $x = 1$ berühren. Geben Sie den Berührpunkt an.

Lösung

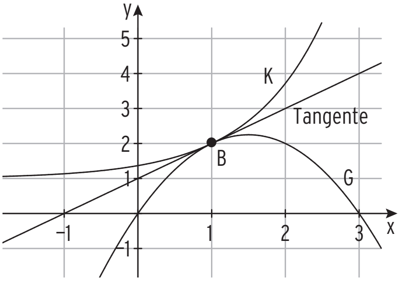
Gemeinsamer Punkt mit x = 1:

$f(1) = g(1)$	$2 = 2$	w. A.

Gleiche Steigung in x = 1:

Mit $f'(x) = \frac{1}{e} \cdot e^x$; $g'(x) = -2x + 3$:

$f'(1) = g'(1)$	$1 = 1$	w. A.
Berührstelle:	$x = 1$	
Berührpunkt:	$B(1\|2)$	



Beachten Sie:

Der **Berührpunkt B(u|...)** ist
• **gemeinsamer Punkt** von K und G — $f(u) = g(u)$
• mit der **gleichen Steigung.** — $f'(u) = g'(u)$

Beispiel

➲ K ist der Graph von f mit $f(x) = x^2 + 2;\ x \in \mathbb{R}$.
G ist der Graph von g mit $g(x) = -x^2 + 4x;\ x \in \mathbb{R}$.
Es gibt eine Stelle u, in der K und G die gleiche Steigung haben. Gibt es in x = u eine gemeinsame Tangente? Wenn ja, bestimmen Sie die Gleichung.

Lösung

Ableitungen: $f'(x) = 2x;\quad g'(x) = -2x + 4$

Gleiche Steigung: $f'(x) = g'(x)$ $\quad 2x = -2x + 4$

$x = 1$

Gemeinsamer Punkt: $\left.\begin{array}{l} f(1) = 3 \\ g(1) = 3 \end{array}\right\}$ A (1|3)

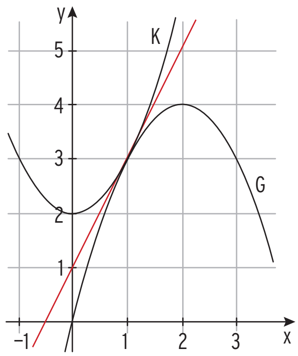
In A (1|3) haben K und G die gleiche Steigung;
A ist ein Berührpunkt.
Es gibt eine gemeinsame Tangente.

Mit $m = f'(1) = 2$ ergibt sich aus $\quad y = 2x + b$

durch Punktprobe mit A (1|3): $\quad 3 = 2 \cdot 1 + b$

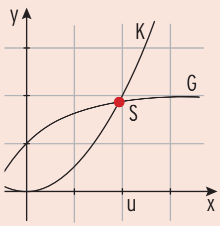
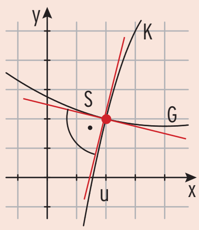
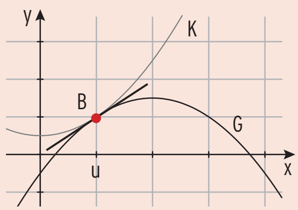
$b = 1$

Gleichung der Tangente: $y = 2x + 1$



Was man wissen sollte – über die gegenseitige Lage von zwei Kurven

K ist das Schaubild von f, G ist das Schaubild von g.

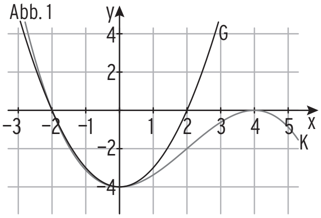
			
Gemeinsamer Punkt	$S(u\,\vert\,f(u))$	$S(u\,\vert\,f(u))$	$B(u\,\vert\,f(u))$
Bedingung	**$f(u) = g(u)$**	**$f(u) = g(u)$**	**$f(u) = g(u)$**
Zusatz		K und G schneiden sich in $S(u\,\vert\,f(u))$ **senkrecht**.	K und G **berühren** sich in $B(u\,\vert\,f(u))$.
Bedingung		**$f'(u) \cdot g'(u) = -1$**	**$f'(u) = g'(u)$**

Aufgaben

1 K und G sind die Schaubilder der Funktionen f mit $f(x) = -0{,}5x^3 + 2x + 1$ und g mit $g(x) = -0{,}5(x^3 + 2x^2 + x - 2)$; $x \in \mathbb{R}$.
Bestätigen Sie, dass sich K und G in $x = 0$ senkrecht schneiden.

2 Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = \sqrt{2} - \sin(x)$ und g mit $g(x) = \cos(x)$; $x \in \mathbb{R}$.
Die Schaubilder von f und g berühren sich in $x = \frac{\pi}{4}$.
Bestätigen Sie diese Behauptung.

3 Die Abb. 1 zeigt die Schaubilder K und G der beiden Funktionen f mit $f(x) = -\frac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 32)$ und g mit $g(x) = x^2 - 4$; $x \in \mathbb{R}$.
K und G haben zwei gemeinsame Punkte. Zeigen Sie, dass nur einer dieser Punkte ein Berührpunkt ist.

Abb. 1


4 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2\sin(\pi x) + 2$; $x \in [0; \pi]$. Ihr Schaubild ist K_f.
Zeigen Sie, dass die Gerade mit der Gleichung $y = -2\pi x + 2 + 2\pi$ Tangente an K_f ist.

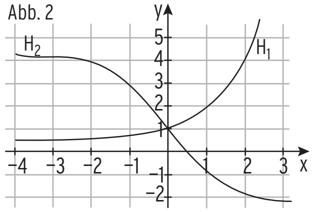
5 Zeigen Sie: Die Schaubilder von f mit $f(x) = e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$ und g mit $g(x) = 2e^x - 1$ haben eine gemeinsame Tangente.

6 Die Tangente an das Schaubild K von f mit $f(x) = 2\sin(x)$; $x \in \mathbb{R}$, im Ursprung, ist Tangente an das Schaubild G von g mit $g(x) = 0{,}5x^2 + 2$; $x \in \mathbb{R}$.
Überprüfen Sie diese Behauptung.

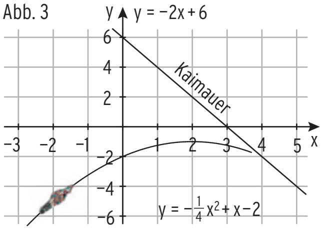
7 Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b so, dass sich die Schaubilder K von f und G von g an der Stelle $x_1 = 1$ berühren.

a) $f(x) = 0{,}5(x^2 + 3)$; $g(x) = ax^2 + bx$ **b)** $f(x) = x^3 - x^2 + 4$; $g(x) = ae^x + b$

8 Die Abb. 2 zeigt die Schaubilder der beiden Funktionen f mit $f(x) = 1 - x - \sin(x)$ und g mit $g(x) = \frac{1}{2}(e^x + 1)$; $x \in \mathbb{R}$.
Ordnen Sie jeder Funktion die zugehörige Kurve zu. Begründen Sie. Machen Sie eine Aussage über die gegenseitige Lage der beiden Kurven.
Begründen Sie rechnerisch.

Abb. 2


9 Ein Motorboot rast längs der Kurve K auf die Kaimauer zu.
Wie groß ist der Kollisionswinkel?
Hinweis: Verwenden Sie die Steigungswinkel.

Abb. 3


Beispiel

➲ K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + x + 3;\ x \in \mathbb{R}$.
Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K.

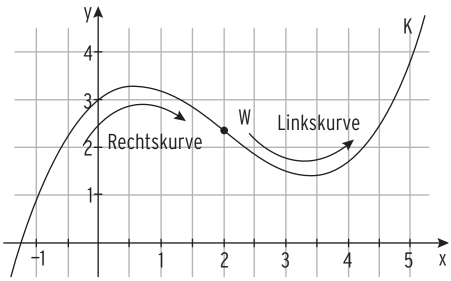
Lösung

Um das Krümmungsverhalten von K zu untersuchen, bestimmt man den Wendepunkt.
Ableitungen: $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1;\ f''(x) = x - 2;\ f'''(x) = 1 \neq 0$

Notw. Bedingung für eine Wendestelle: $f''(x) = 0$ $x - 2 = 0$
Einzige (einfache) Lösung: $x = 2$

Nachweis: $f'''(2) \neq 0$
$x = 2$ ist Wendestelle, die Krümmung wechselt.

Mit $f''(0) = -2 < 0$ gilt:
Für $x < 2$ ist K eine Rechtskurve,
für $x > 2$ ist K eine Linkskurve.



Hinweis: In einer Wendestelle findet ein Übergang von Rechts- in Linkskrümmung oder umgekehrt statt.

Beispiel

➲ K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = e^{2x} - x + 2;\ x \in \mathbb{R}$.
Anton behauptet: K ist eine Linkskurve. Nehmen Sie Stellung.

Lösung

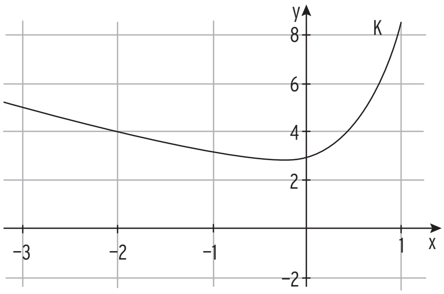
Um das Krümmungsverhalten von K zu bestimmen, untersucht man K auf Wendepunkte.

Ableitungen: $f'(x) = 2e^{2x} - 1;\ f''(x) = 4e^{2x};\ f'''(x) = 8e^{2x}$

Notw. Bed. für eine Wendestelle: $f''(x) = 0$ $4e^{2x} = 0$
Wegen $e^{2x} > 0$ hat die Gleichung keine Lösung.
Es gibt **keine** Wendestellen.

Da $f''(x) = 4e^{2x} > 0$,
ist K eine **Linkskurve.**

Anton hat Recht.

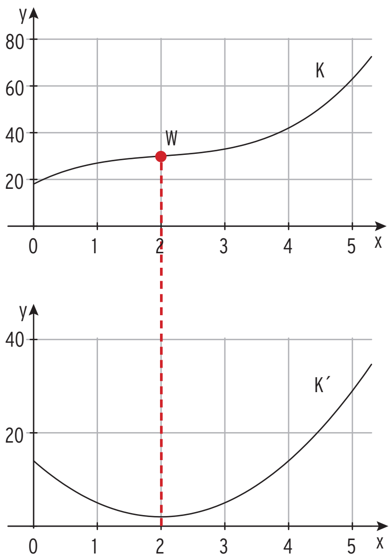


Beispiel

➲ Die Kosten eines Betriebes in GE für x ME lassen sich durch eine Funktion K mit $K(x) = x^3 - 6x^2 + 14x + 18;\ 0 \le x \le 6$ berechnen.
Für welche Ausbringungsmenge x wird der Kostenzuwachs am geringsten?

Lösung

Der **Kostenzuwachs** entspricht der momentanen Änderungsrate (Steigung) von K und lässt sich mithilfe der ersten Ableitung bestimmen.



Kostenzuwachs (Differenzialkosten)
$K'(x) = 3x^2 - 12x + 14$

Bestimmung der Wendestelle
Der Kostenzuwachs ist am geringsten, wenn die Differenzialkostenkurve (Parabel) ihren tiefsten Punkt im Scheitel erreicht
oder
wenn der **Graph von K′** einen Tiefpunkt hat.

Notwendige Bedingung:
$\mathbf{K''(x) = 0}$
$6x - 12 = 0$
$x = 2$
Mit $K'''(x) = 6 > 0$ wird K′ **minimal in $x = 2$.**

Der Punkt mit der geringsten Steigung ist der Wendepunkt des Graphen von K.
Bis zum Wendepunkt W (bis $x = 2$) nimmt die Steigung ab, um nach W (für $x > 2$) wieder zu wachsen.

Beispiel

➲ Die Schwingung eines Federpendels lässt sich beschreiben durch das Elongations-Zeit-Gesetz: $s(t) = s_0 \sin(\omega t)$.
Bestimmen Sie einen Term zur Berechnung der maximalen Geschwindigkeit.

Lösung

$v(t) = s'(t) = s_0\,\omega \cos(\omega t)$
v wird maximal für $\cos(\omega t) = 1$, dann ist $v_{max} = s_0\,\omega$.
oder v ist maximal (notwendige Bedingung),
wenn $v'(t) = s''(t) = 0$,
d. h. im Wendepunkt des Schaubildes von s.

Aufgaben

1 Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Schaubildes von f.

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 3$ **b)** $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 2$ **c)** $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + 3$

d) $f(x) = 4x^2 - \frac{2}{3}x^4$ **e)** $f(x) = 0{,}5\sin(x) + 2$ **f)** $f(x) = x + \cos(x);\ x \in [-1; 7]$

2 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K_f.

a) $f(x) = 2 - x - x^2$ **b)** $f(x) = x^3 + 2x$ **c)** $f(x) = \sin(2x) + 1;\ x \in [0; 3]$

3 Maria behauptet: K von f mit $f(x) = e^{-3x} + x + 2;\ x \in \mathbb{R}$, ist eine Linkskurve.
Überprüfen Sie.

4 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Wendepunkt (Wendetangente).

a) $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{2}x$ **b)** $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 5$ **c)** $f(x) = 2\cos(2x);\ 0 < x < 3$

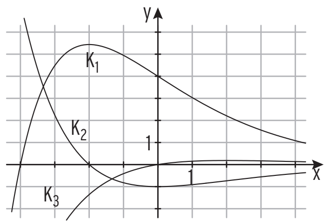
5 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^4 - 3x^2 + 3;\ x \in \mathbb{R}$ mit dem Schaubild K.
Begründen Sie, dass sich die Wendetangenten auf der y-Achse schneiden.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S.
Überprüfen Sie, ob die Wendetangenten von K senkrecht aufeinander stehen.

6 Zeigen Sie: Jede Polynomfunktion 3. Grades hat genau eine Wendestelle.

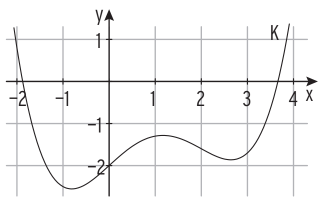
7 K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x - 5;\ x \in \mathbb{R}$.
Untersuchen Sie, ob die Gerade mit $y = 2x - \frac{16}{3}$ Wendetangente an K ist.

8 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}(x - 3)(x^2 + 3);\ x \in \mathbb{R}$, sei K.
Überprüfen Sie, ob K im Wendepunkt eine waagrechte Tangente hat.

9 Die Abbildung zeigt das Schaubild K einer Funktion f und die Schaubilder von f′ und f″.
Ordnen Sie zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
Bestimmen Sie nach Augenmaß den Wendepunkt von K.



10 Die Abbildung zeigt das Schaubild K einer Funktion f.
Übertragen Sie K in Ihr Heft.
Zeichnen Sie nach Augenmaß alle Wendepunkte ein und lesen Sie die Koordinaten ab.
Skizzieren Sie die Graphen von f′ und f″ in Ihr Achsenkreuz ein. Welche Bedeutung hat die Wendestelle von f für den Verlauf des Graphen von f′?



11 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4\cos\left(\frac{1}{4}\pi x\right);\ x \in [0; 10]$.
Zeigen Sie: Die Nullstellen von f sind die Wendestellen von f.

Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = e^{kx}$

Beispiel

Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f mit $f(x) = e^{3x}$; $x \in \mathbb{R}$.

Lösung

Die „Aufleitung“ der Funktion f mit $f(x) = e^{3x}$; $x \in \mathbb{R}$ ist zunächst nicht bekannt.
Wir können diese Funktion jedoch mit der Kettenregel ableiten: $(e^{3x})' = 3e^{3x}$.

Somit gilt für eine Stammfunktion F: $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + c$

Probe durch Ableiten von f′: $\left(\frac{1}{3}e^{3x} + c\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3e^{3x} = e^{3x}$

$F'(x) = e^{3x} = f(x)$

Beachten Sie:

$f(x) = e^{kx} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{k}e^{kx} + c$; $k \neq 0$

Beispiel

Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f mit $f(x) = e^{-2x+5}$; $x \in \mathbb{R}$.

Lösung

Aufleitung ergibt die Stammfunktion F mit $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x+5} + c$

Probe: $\left(-\frac{1}{2}e^{-2x+5} + c\right)' = -\frac{1}{2} \cdot (-2)\, e^{-2x+5} = e^{-2x+5}$

$F'(x) = e^{-2x+5} = f(x)$

Hinweis: $f(x) = e^{kx+b} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{k}e^{kx+b} + c$; $k \neq 0$

Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \sin(kx)$ bzw. $f(x) = \cos(kx)$

Beispiel

Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f.

a) $f(x) = \sin(4x)$; $x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = \cos(\pi x)$; $x \in \mathbb{R}$

Lösung

a) Aufleitung ergibt die Stammfunktion F mit $F(x) = -\frac{1}{4}\cos(4x)$

Probe ergibt: $\left(-\frac{1}{4}\cos(4x)\right)' = -\frac{1}{4} \cdot (-4)\sin(4x) = \sin(4x)$

b) Aufleitung ergibt die Stammfunktion F mit $F(x) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)$

Probe ergibt: $F'(x) = \cos(\pi x) = f(x)$

Beachten Sie:

$f(x) = \sin(kx) \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{k}\cdot\cos(kx) + c;\ \ k \neq 0$

$f(x) = \cos(kx) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{k}\cdot\sin(kx) + c;\ \ k \neq 0$

Beispiel

Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f mit $f(x) = \frac{1}{3}e^{3x} - 5\sin(2x);\ \ x \in \mathbb{R}$.

Lösung

Aufleitung ergibt die Stammfunktion F mit $F(x) = \frac{1}{9}e^{3x} + \frac{5}{2}\cos(2x)$

Probe durch Ableiten von F: $\left(\frac{1}{9}e^{3x}\right)' = \frac{1}{9}\cdot 3e^{3x} = \frac{1}{3}e^{3x}$

und $\left(\frac{5}{2}\cos(2x)\right)' = \frac{5}{2}\cdot(-2)\sin(2x) = -5\sin(2x)$

$F'(x) = \frac{1}{3}e^{3x} - 5\sin(2x) = f(x)$

Aufgaben

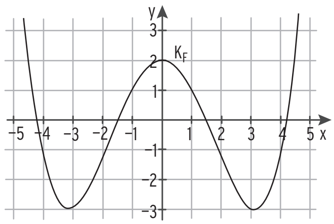
1 F ist eine Stammfunktion von f. Bestimmen Sie F(x).

a) $f(x) = 4e^{2x} + 1$
b) $f(x) = -2e^{4x} - 2$
c) $f(x) = -\frac{1}{2}e^{-3x} - 1$
d) $f(x) = -2e^{0{,}2x}$
e) $f(x) = \frac{4}{5}e^{-5x}$
f) $f(x) = \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{2}x}$
g) $f(x) = -\sin(5x)$
h) $f(x) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
i) $f(x) = \frac{3}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

2 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f.

a) $f(x) = \frac{3}{5}e^{0{,}5x} + 1$
b) $f(x) = -\frac{1}{2}e^{4x} - 2$
c) $f(x) = -\frac{2}{3}e^{5-x} - x$
d) $f(x) = \frac{1}{2}x - 4\sin(3x) + 1$
e) $f(x) = 2x^2 - 4x + \cos(x)$
f) $f(x) = 1 + e\cdot x - 2e^{1+x}$
g) $f(x) = \frac{5}{2}\cos(2x) + 3x - 5$
h) $f(x) = \frac{1}{4}x - 1{,}5\cos\left(\frac{x}{2}\right)$
i) $f(x) = 1 - \frac{4}{3}x^2 - 3\sin(\pi x)$
j) $f(x) = 1{,}5(1 - \sin(2x))$
k) $f(x) = 4\left(\cos(\pi x) - e^{2x} + 1\right)$
l) $f(x) = \frac{2}{3}x - \sqrt{3}\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$
m) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2 - (e^{2x} + 1)$
n) $f(x) = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - (2x + 1)$

3 Gegeben ist die Funktion f mit
$f(x) = \frac{1}{5}x^3 - 2x;\ \ x \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie alle Stammfunktionen von f.
Welche dieser Stammfunktionen gehört zu K_F?



Weitere Fragestellungen zu Stammfunktionen

Beispiel

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 4x^3 + \frac{3}{2}x + 3;\ x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild einer Stammfunktion F von f verläuft durch den Punkt $P(-2|7)$. Bestimmen Sie F (x).

Lösung

Eine Stammfunktion F von f: $F(x) = x^4 + \frac{3}{4}x^2 + 3x + c;\ c \in \mathbb{R}$

Punktprobe mit P(−2|7): $7 = (-2)^4 + \frac{3}{4}(-2)^2 + 3(-2) + c$

$c = -6$

Gesuchte **Stammfunktion** F mit $F(x) = x^4 + \frac{3}{4}x^2 + 3x - 6$

Beispiel

Für die erste Ableitung der Funktion f gilt $f'(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - e^x$.
Das Schaubild von f schneidet die x-Achse in $x = 2$. Bestimmen Sie f (x).

Lösung

Aufleiten ergibt: $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + x^3 - e^x + c;\ c \in \mathbb{R}$

Punktprobe mit S (2|0): $0 = \frac{1}{8} \cdot 2^4 + 2^3 - e^2 + c = 2 + 8 - e^2 + c$

$c = e^2 - 10$

Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + x^3 - e^x + e^2 - 10$

Beispiel

Zeigen Sie, F mit $F(x) = 2x^2 - 3x + 1 - 4e^{2x};\ x \in \mathbb{R}$, ist eine Stammfunktion von f mit $f(x) = 4x - 3 - 8e^{2x};\ x \in \mathbb{R}$.

Lösung

Ableitung von F: $F'(x) = 4x - 3 - 8e^{2x} = f(x)$
F ist also eine Stammfunktion von f.

Beispiel

Für eine Funktion f gilt: $f(x) = 3x^2 + bx$.
Das Schaubild einer Stammfunktion F von f verläuft durch $A(0|3)$ und $B(-1|2)$.
Bestimmen Sie F (x).

Lösung

Aufleiten von f (x) ergibt: $F(x) = x^3 + \frac{b}{2}x^2 + c$

Bedingungen für b und c: $F(0) = 3$ $c = 3$

$c = 3$ eingesetzt: $F(x) = x^3 + \frac{b}{2}x^2 + 3$

$F(-1) = 2$ $(-1)^3 + \frac{b}{2}(-1)^2 + 3 = 2$

$b = 0$

F mit $F(x) = x^3 + 3$ ist die gesuchte Stammfunktion von f.

Aufgaben

1 Geben Sie eine Stammfunktion F von f mit $F(0) = -1$ an.

a) $f(x) = 4x - 3$ b) $f(x) = x^3 - x^4 + 2$ c) $f(x) = 4e^{-x} + x$

2 Bestimmen Sie eine Stammfunktion, deren Schaubild die x-Achse in 1 schneidet.

a) $f(x) = 3e^{-0{,}25x} + x$ b) $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$

3 Welche Stammfunktion F von f erfüllt die gegebene Eigenschaft?

a) $f(x) = \cos(3x)$; der Graph von F verläuft durch $A(\pi\,|\,0)$.

b) $f(x) = 3x^2 - 6x$; der Graph von F schneidet die y-Achse in -1.

c) $f(x) = 0{,}25e^{-2x} + x^2 + 3$; $F(-1) = 2$

d) $f(x) = 1 - 2x^2$; $F(2) = \frac{2}{3}$

e) $f(x) = 6x - 4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$; F hat eine Nullstelle in $x_0 = -1$.

4 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6}x^2(x - 6)$; $x \in \mathbb{R}$.

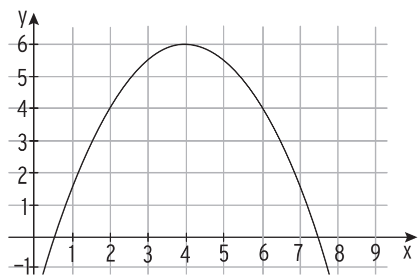
a) Weisen Sie nach: F mit $F(x) = \frac{1}{24}(x^4 - 8x^3)$ ist eine Stammfunktion von f.

b) Begründen Sie, dass F genau eine Extremstelle hat.

5 Das Schaubild einer Stammfunktion F von f mit $f(x) = -8x^3 + x^2 - 3$ verläuft durch den Punkt $A(-1\,|\,2)$. Bestimmen Sie $F(x)$.

6 Die erste Ableitung einer Funktion f lässt sich durch $f'(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4\sin(2x)$ beschreiben. Das Schaubild der zugehörigen Funktion verläuft durch den Punkt $P(\pi\,|\,0)$. Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$.

7 Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Stammfunktion F von f mit $f(x) = 4 - x$; $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $F(x)$.



8 Für die zweite Ableitung der Funktion f gilt $f''(x) = 1 - 2x$. Das Schaubild von f verläuft durch den Ursprung mit Steigung 2. Bestimmen Sie $f(x)$.

9 Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = -\frac{4}{3}x^3 + bx + 4$; $x \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Das Schaubild einer Stammfunktion F von f verläuft durch die Punkte $P(3\,|\,-7)$ und $Q\left(1\,\middle|\,\frac{11}{3}\right)$. Bestimmen Sie $F(x)$.

Die Funktion f hat eine Nullstelle im Integrationsintervall

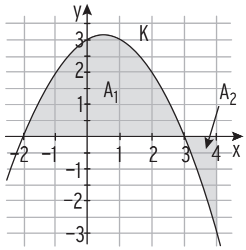
Beispiel

K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$.
Wie groß ist die Fläche, die von K und der x-Achse auf $[-2; 4]$ begrenzt wird?

Lösung

Nullstelle von f: $f(x) = 0$ ergibt $x_1 = -2$; $x_2 = 3$

f hat 2 einfache Nullstellen auf dem Integrationsintervall $[-2; 4]$.



Das Integral $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = 9$ **liefert nicht den Inhalt der Fläche.**

Der gesuchte Inhalt muss also **in zwei Schritten** berechnet werden:

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 3x\right]_{-2}^{3} = 10{,}42$$

$A_1 = 10{,}42$; die zugehörige Fläche liegt **oberhalb der x-Achse.**

$\int_{3}^{4} f(x)\,dx = -1{,}42 < 0$; $A_2 = 1{,}42$; die zugehörige Fläche liegt **unterhalb der x-Achse.**

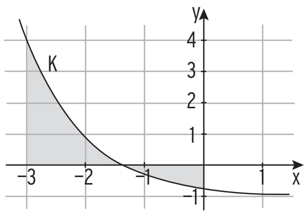
$A_{ges} = A_1 + A_2 = 10{,}42 + 1{,}42 = 11{,}84$

Beispiel

Der Graph von f mit $f(x) = 0{,}25\,e^{-x} - 1$ begrenzt mit der x-Achse und den Geraden mit $x = -3$ und $x = 0$ eine Fläche. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Lösung

Nullstelle von f: $f(x) = 0 \quad 0{,}25\,e^{-x} - 1 = 0$
$x = -\ln(4)$



Stammfunktion von f: $F(x) = -0{,}25\,e^{-x} - x$

Da f auf $[-3; 0]$, in $x = -\ln(4)$, das **Vorzeichen wechselt, muss der Inhalt in zwei Schritten berechnet werden:**

- $\int_{-3}^{-\ln(4)} f(x)\,dx = 2{,}41$
- $\int_{-\ln(4)}^{0} f(x)\,dx = -0{,}64$

$A_{ges} = 2{,}41 + 0{,}64 = 3{,}05$. Der Inhalt der **Gesamtfläche** beträgt etwa 3,05.

Hinweis: $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx = \int_{-3}^{-\ln(4)} f(x)\,dx + \int_{-\ln(4)}^{0} f(x)\,dx = 2{,}41 + (-0{,}64) = 1{,}77$

Das Integral $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx = 1{,}77$ liefert nicht **den gesuchten Inhalt,** sondern den Wert der **Flächenbilanz.** Der Inhalt der Fläche oberhalb der x-Achse ist 1,77 größer als der Inhalt der Fläche unterhalb der x-Achse.

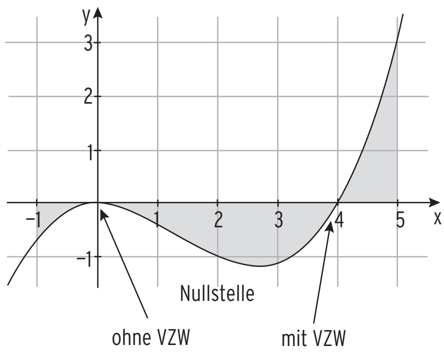
Beispiel

➲ K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2;\ x \in \mathbb{R}$.
Wie groß ist die Fläche, die von K und der x-Achse auf [−1; 5] begrenzt wird?

Lösung

Nullstelle von f: $f(x) = 0 \qquad x_{1/2} = 0;\ x_3 = 4$
f hat auf dem Integrationsintervall [−1; 5]
eine Nullstelle ohne VZW ($x_{1|2} = 0$) und
eine Nullstelle mit VZW ($x_3 = 4$).

Das Integral $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = -1{,}5$ liefert **nicht den Inhalt der Fläche.**



Flächeninhaltsberechnung:

- $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = -2{,}86$
- $\int_{4}^{5} f(x)\,dx = 1{,}36$

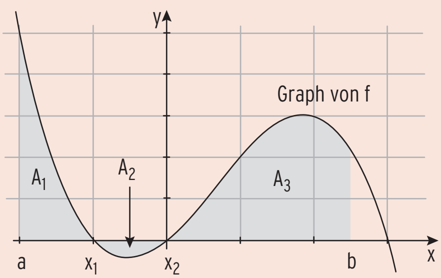
Gesamtinhalt: $A_{ges} = 2{,}86 + 1{,}36 = 4{,}22$

Bemerkung: Bei der Flächeninhaltsberechnung darf man **über eine doppelte Nullstelle (Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel) hinweg** integrieren.

Hinweis: $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = \int_{-1}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{5} f(x)\,dx = -2{,}86 + 1{,}36 = -1{,}50$ (Wert der Flächenbilanz)
Der Inhalt der Fläche unterhalb der x-Achse ist um 1,5 größer als der Inhalt der Fläche oberhalb der x-Achse.

Berechnung des Inhalts der Fläche zwischen dem Graph von f und der x-Achse auf [a; b]

1) Berechnung der Nullstellen von f auf [a; b]: $f(x) = 0$ liefert $x_1, x_2, \ldots$
2) Berechnung der Integrale
   - $\int_{a}^{x_1} f(x)\,dx$
   - $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$
   - $\int_{x_2}^{b} f(x)\,dx$
3) **Addition der Beträge der Integralwerte** ergibt den **gesamten Flächeninhalt:**
   $A = A_1 + A_2 + A_3$

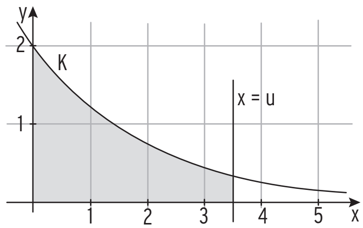


Beispiel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2e^{-0{,}5x}$; $x \in \mathbb{R}$ mit Schaubild K.
K, die Koordinatenachsen und die Gerade mit $x = u$, $u > 0$, schließen eine Fläche mit Inhalt A(u) ein. Für welchen Wert von u gilt: $A(u) = 2$?
Zeigen Sie: A(u) wird nicht größer als 4.

Lösung

Veranschaulichung der Fläche:



Rechte Integrationsgrenze: u

Fläche zwischen K und der x-Achse auf [0; u]:

$$\int_0^u f(x)\,dx = \left[-4e^{-0{,}5x}\right]_0^u = -4e^{-0{,}5u} + 4$$

Inhalt der Fläche in Abhängigkeit von u: $A(u) = -4e^{-0{,}5u} + 4$

Bedingung: $A(u) = 2$

$$-4e^{-0{,}5u} + 4 = 2$$
$$e^{-0{,}5u} = \frac{1}{2}$$
$$u = -2\ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1{,}39$$

Die Fläche zwischen K, den Koordinatenachsen und der Geraden mit $x = -2\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ hat den Inhalt 2. Für $u \to \infty$ gilt: $A(u) \to 4$, da $-4e^{-0{,}5u} \to 0$

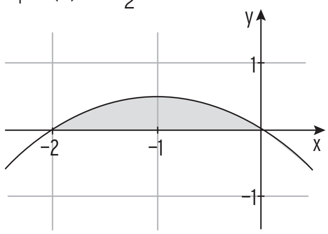
Schreibweise: $\lim\limits_{u \to \infty} A(u) = 4$

Die Fläche hat einen endlichen Inhalt $A = 4$. A(u) wird nicht größer als 4.

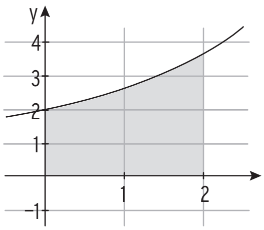
Aufgaben

1 Bestimmen Sie den Inhalt der gefärbten Fläche.

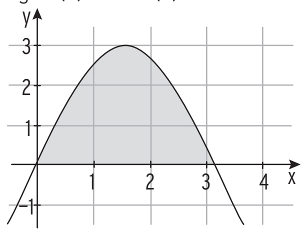
K_1: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x$



K_2: $f(x) = e^{0{,}5x} + 1$



K_3: $f(x) = 3\sin(x)$



2 Gegeben ist die Funktion f. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graph von f und der x-Achse über dem Intervall [a; b]. f hat keine Nullstelle in [a; b].

a) $f(x) = \cos(x) + 2$; $[-\pi; 1]$ **b)** $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5$; $[-1; 0]$

3 Gegeben ist die Funktion f mit $x \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie das Schaubild von f. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f und damit den Inhalt der Fläche, die vom Graph von f und der x-Achse eingeschlossen wird.

a) $f(x) = (x-2)(x+1)$ **b)** $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2$ **c)** $f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + 2x^3 - 3x^2$