

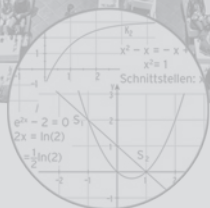
Bohner
Ott
Deutsch

Mathematik im Berufskolleg I

Ausführliche Lösungen zu im Buch gekennzeichneten Aufgaben

ab 6. Auflage 2016
ISBN 978-3-8120-0234-9

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.



Merkur 
Verlag Rinteln

Lehrbuch Seite 21

- 3 a) Die Stelle 3 wird mit $x = 3$ bezeichnet.
Funktionswert ist ein y -Wert bzw. $f(x)$ -Wert.
 $f(3) = 12$
- b) Der zugeordnete y -Wert ist -4 , der Funktionswert $f(x)$ ist -4 .
 $f(x) = -4$
- c) $x = 2, y = 5$ Für y schreibt man $f(x)$.
 $f(2) = 5$
- d) Funktionswert wird mit $f(x)$ bezeichnet.
 $f(x) = 4$
- e) Funktionswert wird mit $f(x)$ bezeichnet.
 $f(x) > 7$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- f) Stelle ist ein x -Wert: $x = -17$ Der Funktionswert ist 9 .
 $f(-17) = 9$
- g) Der y -Wert an der Stelle $x = 3$ ist null.
 $f(3) = 0$
- h) Funktionswert ist $f(x)$.
 $f(x) = 5$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- i) Koordinaten x und y stimmen überein: $y = x$
Für y schreibt man $f(x)$.
 $f(x) = x$
- j) Schnittpunkt mit der y -Achse: $x = 0$
 y -Wert ist -4
 $f(0) = -4$

Lehrbuch Seite 29

3 $f(x) = \frac{5}{3}x - 3; x \in \mathbb{R}$

x	y
1.8	0
1	-1.33
-2	-6.33
4	3.666

a) Vergleich mit der Wertetabelle ergibt:

$P(\frac{9}{5} | 0)$ liegt auf dem Schaubild von $f: f(\frac{9}{5}) = 0$

$Q(1 | -\frac{13}{10})$ liegt oberhalb des Schaubildes von $f: f(1) = -\frac{4}{3} < -\frac{13}{10}$

$R(-2 | -\frac{20}{3})$ liegt unterhalb des Schaubildes von $f: f(-2) = -\frac{19}{3} > -\frac{20}{3}$

b) Ansatz: $f(x) = 2$ $\frac{5}{3}x - 3 = 2$

Umformung: $\frac{5}{3}x = 5$

$x = 3$

Interpretation: Der Punkt $P(3 | 2)$ liegt auf dem Schaubild von f .

c) $f(-2) = -\frac{19}{3}$

Da der neue Funktionswert an dieser Stelle 1 sein soll, muss die Gerade um die Differenz $1 - (-\frac{19}{3}) = \frac{22}{3}$ verschoben werden.

Verschiebung um $\frac{22}{3}$ nach oben: $y = \frac{5}{3}x + \frac{13}{3}$

d) Ansatz: $f(2) = a$ $\frac{5}{3} \cdot 2 - 3 = a$

Wert für a : $a = \frac{1}{3}$

Der Punkt $P(2 | \frac{1}{3})$ liegt auf der Geraden.

Lehrbuch Seite 33

12 Ansatz: $G(x) = mx + b; x$ in ME und $G(x)$ in GE

Stückgewinn (Gewinn pro ME): $m = 275 \left(\frac{GE}{ME}\right)$

Bei 2 ME Gewinn 350 GE entspricht dem Kurvenpunkt $P(2 | 350)$.

Gewinnfunktion: $G(x) = 275x + b$

Punktprobe mit $P(2 | 350)$: $350 = 275 \cdot 2 + b$

$b = -200$

Gewinnfunktion G mit $G(x) = 275x - 200$

Ansatz: $G(x) = 1075$ $275x - 200 = 1075$

Produktionsmenge: $x = 4,64$

Bei einer Produktionsmenge von 4,64 ME ist der Gewinn 1075 GE.

Lehrbuch Seite 35

6 Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -1$

$$S_y(0 \mid -1)$$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $N(0,5 \mid 0)$

Begründung:

Die Nullstelle liegt rechts von $x = 0$ (VZW der y-Werte).

Vergrößert sich x um 1, so vergrößert sich y um 2. Vergrößert sich x um 0,5, so vergrößert sich y um 1, also ist $x = 0,5$ eine Nullstelle und damit $N(0,5 \mid 0)$.

Funktionsterm bestimmen:

Ansatz: $y = mx - 1$

Punktprobe mit z. B. $P(1 \mid 1)$: $1 = m \cdot 1 - 1$

$$m = 2$$

Funktionsterm: $f(x) = 2x - 1$

Varianten

Aus der Tabelle lässt sich ablesen: Vergrößert sich x um 1, so vergrößert sich y um 2, d.h. die Steigung der Geraden beträgt $m = 2$.

Der y-Achsenabschnitt ist $b = -1$.

Funktionsterm: $f(x) = 2x - 1$

oder

Steigung der Geraden: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-1)}{1 - 0} = 2$

y-Achsenabschnitt: $b = -1$

Funktionsterm: $f(x) = 2x - 1$

Lehrbuch Seite 383 a) Ansatz für G: $g(x) = 4x + b$ G schneidet die x-Achse in $x = 4$: $g(4) = 0$

$$4 \cdot 4 + b = 0$$

$$b = -16$$

Gleichung von G: $g(x) = 4x - 16$ b) H verläuft durch $P(1 | 1)$ und schneidet die x-Achse in $x = -3$:Ansatz: $y = mx + b$ Punktprobe mit $P(1 | 1)$:

$$m + b = 1$$

Punktprobe mit $N(-3 | 0)$:

$$-3m + b = 0 \quad \leftarrow \cdot (-1)$$

$$4m = 1$$

$$m = 0,25$$

Einsetzen ergibt b:

$$0,25 + b = 1$$

$$b = 0,75$$

Gleichung von H:

$$h(x) = 0,25x + 0,75$$

Variante:

Bestimmung der Steigung aus

 $P(1 | 1)$ und $N(-3 | 0)$:

$$m = \frac{1-0}{1-(-3)} = \frac{1}{4}$$

Punktprobe mit $P(1 | 1)$ in $y = \frac{1}{4}x + b$:

$$1 = \frac{1}{4} \cdot 1 + b$$

$$b = \frac{3}{4}$$

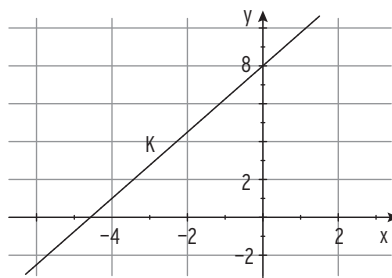
Gleichung von H:

$$h(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

Lehrbuch Seite 40

6 K: $f(x) = 1,75x + 8 = \frac{7}{4}x + 8$

a) Schaubild K von f



b) G schneidet die y-Achse in $S(0 | 1,5)$

G schneidet die Gerade K

senkrecht: $m_G = -\frac{4}{7}$

$$k(x) = -\frac{4}{7}x + \frac{3}{2}$$

Gleichsetzen:

$$\frac{7}{4}x + 8 = -\frac{4}{7}x + \frac{3}{2} \quad | \cdot 28$$

$$49x + 224 = -16x + 42$$

$$65x = -182$$

$$x = -\frac{14}{5}$$

$$y = f\left(-\frac{14}{5}\right) = \frac{7}{4}\left(-\frac{14}{5}\right) + 8 = \frac{31}{10}$$

$$S\left(-\frac{14}{5} \mid \frac{31}{10}\right)$$

$$S(-2,8 \mid 3,1)$$

Einsetzen ergibt:

Schnittpunkt von G und K:

c) Ansatz für H: $h(x) = 1,75x + b$

$P(0 | 8)$ wird auf $P^*(2 | 8)$ abgebildet.

Punktprobe mit $P^*(2 | 8)$ ergibt:

$$8 = 1,75 \cdot 2 + b$$

$$b = 4,5$$

Geradengleichung von H

$$y = 1,75x + 4,5$$

H schneidet die y-Achse in 4,5.

Variante:

Verschiebung von K um 2 nach rechts: $h(x) = f(x - 2) = 1,75(x - 2) + 8$

Ausmultiplizieren ergibt

$$h(x) = 1,75x + 4,5$$

H schneidet die y-Achse in 4,5.

Lehrbuch Seite 42

- 3 a) Aus der Abbildung: G hat die Steigung $m = -\frac{3}{4}$ und geht durch $(0 | 3)$.
 (Steigungsdreieck mit den Eckpunkten $(4 | 0)$, $(0 | 0)$ und $(0 | 3)$)

Gerade G: $g(x) = -\frac{3}{4}x + 3$

Aus der Abbildung: H verläuft durch $(0 | -4)$ und $(4 | -1)$.

H hat also die Steigung $m = \frac{3}{4}$ und geht durch $(0 | -4)$.

Gerade H: $h(x) = \frac{3}{4}x - 4$

Gleichsetzen:

$$-\frac{3}{4}x + 3 = \frac{3}{4}x - 4 \quad | \cdot 4$$

$$-3x + 12 = 3x - 16$$

$$6x = 28$$

$$x = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$$

Einsetzen:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{14}{3} - 4 = -\frac{1}{2}$$

Schnittpunkt von G und H:

$$S\left(\frac{14}{3} \mid -\frac{1}{2}\right)$$

- b) G: $S_x(4 | 0)$; $S_y(0 | 3)$

H: $S_x\left(\frac{16}{3} | 0\right)$; $S_y(0 | -4)$

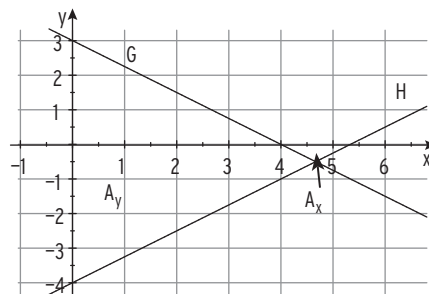
Fläche mit der x-Achse:

$$A_x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{16}{3} - 4\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Fläche mit der y-Achse:

$$A_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{3} \cdot 7 = \frac{49}{3}$$

Die Behauptung stimmt.

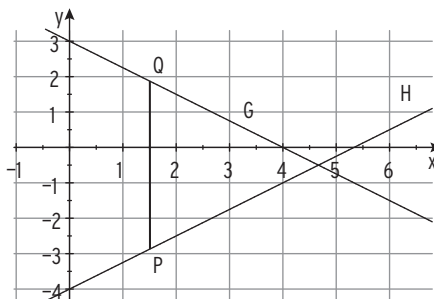


- c) $g(1,5) - h(1,5) = 1,875 - (-2,875) = 4,75$

Der Abstand der Punkte P und Q ist gleich der Länge der Strecke PQ.

$$g(1,5) - h(1,5) > 0:$$

G verläuft oberhalb von H in $x = 1,5$.



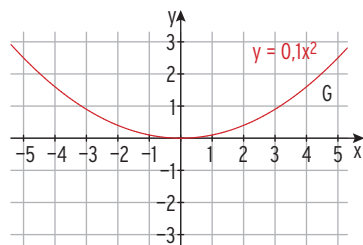
Lehrbuch Seite 55

5 $y = 0,1x^2$

a) $g(x) = -0,1x^2$

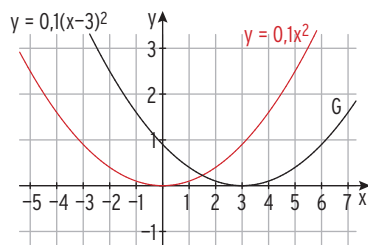
b) $g(x) = 0,1x^2 = f(x)$

Die gespiegelte Parabel G und die Ausgangsparabel sind gleich.

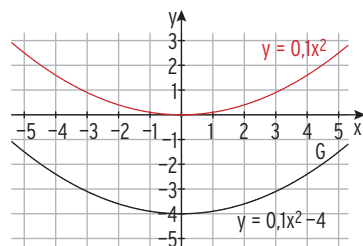


c) $g(x) = 0,1(x-3)^2$

Ersetze x durch $(x-3)$



d) $g(x) = 0,1x^2 - 4$



e) Streckung in y-Richtung mit Faktor 5:

$$y = 5 \cdot 0,1x^2 = 0,5x^2$$

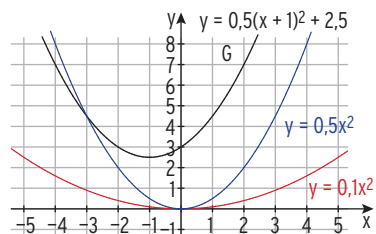
Verschiebung um 1 nach links:

$$y = 0,5(x+1)^2$$

Verschiebung um 2,5 nach oben:

$$y = 0,5(x+1)^2 + 2,5$$

$$g(x) = 0,5(x+1)^2 + 2,5$$



Lehrbuch Seite 62

12 a) $h(t) = -4t^2 + 15t + 2; t \geq 0$

$h(t) = 0$

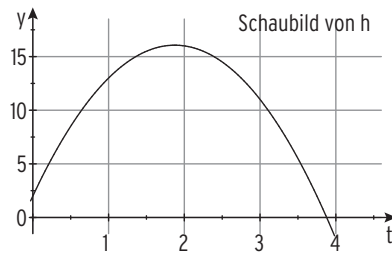
Lösung der Gleichung:

Interpretation:

Nach 3,88 s kommt der Pfeil
auf dem Boden ($h = 0$) an.

$-4t^2 + 15t + 2 = 0$

$t_1 = -0,13 < 0; t_2 = 3,88$



b) Abschusshöhe: $h(0) = 2$

$h(t) = 2$

$-4t^2 + 15t + 2 = 2$

$-4t^2 + 15t = 0$

$t(-4t + 15) = 0$

Lösungen der Gleichung:

$t_1 = 0; t_2 = 3,75$

Nach 3,75 s hat der Pfeil wieder die Höhe von 2 m erreicht.

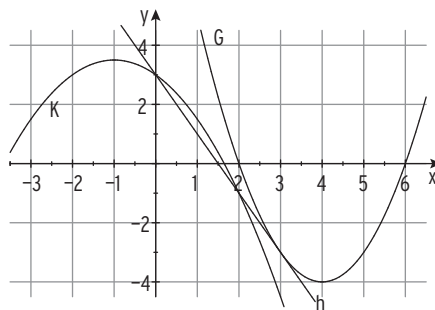
Hinweis: Die Lösung $t = 0$ bedeutet, dass die Abschusshöhe 2 m ist.

Lehrbuch Seite 67

6 K: $f(x) = -0,5x^2 - x + 3$

G: $g(x) = x^2 - 8x + 12$

K ist nach unten geöffnet,
verläuft durch $S_y(0 | 3)$



$S_y(0 | 3)$ legt die Achseneinteilung auf der y-Achse fest.

$S(-1 | 3,5)$ legt die Achseneinteilung auf der x-Achse fest.

G ist nach oben geöffnet; G hat Normalparabelform

G schneidet die x-Achse u. a. in $N(2 | 0)$

Gerade h verläuft durch $S_y(0 | 3)$ und $P(2 | -1)$.

(P ist gleichzeitig Schnittpunkt von h und K.)

h hat also die Steigung $m = -2$ und damit die Gleichung $y = -2x + 3$.

Schnittpunkte mit K durch Gleichsetzen: $-0,5x^2 - x + 3 = -2x + 3$

Nullform: $-0,5x^2 + x = 0$

Ausklammern: $x(-0,5x + 1) = 0$

zwei einfache Lösungen: $x_1 = 0; x_2 = 2$

h schneidet K in 0 und 2.

Schnittpunkte mit G durch Gleichsetzen: $x^2 - 8x + 12 = -2x + 3$

Nullform: $x^2 - 6x + 9 = 0$

Binomische Formel: $(x - 3)^2 = 0$

doppelte Lösung = Berührstelle: $x_{1|2} = 3$

h berührt G in $B(3 | -3)$.

Lehrbuch Seite 73

1 a) Berühren bedeutet doppelte Lösung $x_1 = x_2 = -3$.

Ansatz mit Linearfaktoren: $y = a(x + 3)(x + 3)$
 Punktprobe mit $A(-5 | -7)$: $-7 = a \cdot (-5 + 3)(-5 + 3)$
 $-7 = a \cdot (-2)(-2)$
 $a = -\frac{7}{4}$
 Parabelgleichung: $y = -\frac{7}{4}(x + 3)^2$
 $y = -\frac{7}{4}(x^2 + 6x + 9)$

b) Einfache Nullstellen: $x_1 = 2$; $x_2 = -1$

Ansatz mit Linearfaktoren: $y = a(x - 2)(x + 1)$
 Punktprobe mit $A(1 | -2)$: $-2 = a(1 - 2)(1 + 1)$
 $-2 = a(-1) \cdot 2$
 $a = 1$
 Parabelgleichung: $y = (x - 2)(x + 1)$
 $y = x^2 - x - 2$

c) Verschobene Normalparabel: $a = 1$

Berührstelle $x = -2$ bedeutet doppelter Faktor $(x + 2)$
 Ansatz mit Linearfaktoren: $y = 1 \cdot (x + 2)(x + 2) = (x + 2)^2$
 Parabelgleichung: $y = (x + 2)^2$
 $y = x^2 + 4x + 4$

d) Ansatz wegen der

Symmetrie zur y-Achse: $y = ax^2 + c$
 Punktprobe mit $A(1 | 0,5)$: $a + c = 0,5$
 Punktprobe mit $A(-2 | -5,5)$: $4a + c = -5,5$ ↗ ·(-1)
 Addition: $3a = -6$
 Lösung des Gleichungssystems: $a = -2$; $c = 2,5$
 Parabelgleichung: $y = -2x^2 + 2,5$

Lehrbuch Seite 75

4 a) K schneidet die x-Achse in 0 und in 4.

$$f(x) = 0 \quad -0,25x^2 + x = 0$$

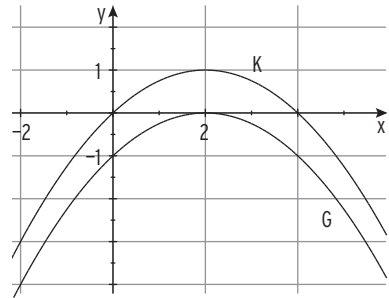
$$\text{Ausklammern: } x(-0,25x + 1) = 0$$

$$\text{einfache Nullstellen: } x_1 = 0; x_2 = 4$$

$$\text{Aus Symmetriegründen gilt } x_S = 2$$

$$\text{Einsetzen von } x = 2 \text{ in } f(x) \text{ ergibt: } f(2) = 1$$

$$\text{Scheitelpunkt: } S(2 \mid 1)$$



b) Ursprungsgerade H durch P hat die Steigung $m = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$.

$$\text{Gleichung von H: } y = -1,5x$$

$$\text{Gleichsetzen: } -0,25x^2 + x = -1,5x$$

$$\text{Nullform: } -0,25x^2 + 2,5x = 0$$

$$\text{Ausklammern: } x(-0,25x + 2,5) = 0$$

$$\text{einfache Lösungen: } x_1 = 0; x_2 = 10$$

Einsetzen in die Geradengleichung

$$\text{ergibt die Schnittpunkte: } S_1(0 \mid 0); S_2(10 \mid -15)$$

c) Gleichung der Parallelen zu H: $y = -1,5x + b$

$$\text{Gleichsetzen ergibt: } -0,25x^2 + x = -1,5x + b$$

$$\text{Nullform: } -0,25x^2 + 2,5x - b = 0$$

$$\text{Vereinfachung: } x^2 - 10x + 4b = 0$$

$$\text{Bedingung für Berühren: } D = 100 - 16b = 0$$

$$b = 6,25$$

$$\text{doppelte Lösung für } b = 6,25: x_{1|2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\text{Gleichung der Parallelen: } y = -1,5x + 6,25 \quad (\text{Tangente an K})$$

Einsetzen in die Geradengleichung

$$\text{ergibt den Berührungspunkt: } B(5 \mid -1,25)$$

d) Der Scheitelpunkt der Parabel G muss auf der x-Achse liegen, also

$$\text{Verschiebung um 1 nach unten: } g(x) = -0,25x^2 + x - 1$$

Lehrbuch Seite 76

8 $f(x) = x^2 + bx - 2; x, b \in \mathbb{R}$

Das Schaubild K von f ist eine verschobene Normalparabel ($a = 1$), nach oben geöffnet. K verläuft durch den Punkt $S_V(0 \mid -2)$.

Schaubild K_3

ist eine nach unten geöffnete Parabel und somit kein Schaubild von f.

Schaubild K_2

ist keine verschobene Normalparabel. Vom Scheitelpunkt geht man 1 nach rechts und (etwa) 2 nach oben ($a = 2$).

K_2 ist kein Schaubild von f.

Schaubild K_1

ist eine verschobene Normalparabel, vom Scheitelpunkt geht man 1 nach rechts und 1 nach oben ($a = 1$).

K_1 verläuft durch den Punkt $S_V(0 \mid -2)$.

Punktprobe mit $P(3 \mid 1)$:

$$1 = 3^2 + b \cdot 3 - 2$$

$$b = -2$$

Für $b = -2$ ist K_1 ein Schaubild von f.

Lehrbuch Seite 79

4 a) Nullstellen von $f: f(x) = 0$

Ausklammern:

Einfache Nullstellen:

Die Dicke des Diskus beträgt 3,8 cm.

Scheitelkoordinaten:

$$x_S = \frac{3,8}{2} = 1,9$$

$$y_S = f(1,9) = -\frac{5}{2}(1,9)^2 + \frac{19}{2}(1,9)$$

$$y_S = 9,025$$

Scheitelpunkt der Parabel:

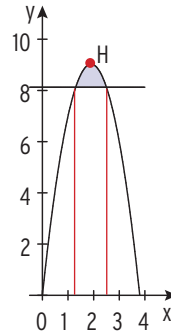
Durchmesser:

Der Durchmesser beträgt 18,05 cm.

$$-\frac{5}{2}x^2 + \frac{19}{2}x = 0$$

$$x\left(-\frac{5}{2}x + \frac{19}{2}\right) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 3,8$$



$$H(1,9 \mid 9,025)$$

$$d = 2 \cdot 9,025 = 18,05$$

b) Schnittstellen von Gerade und Parabel:

Nullform und Vereinfachung:

Lösung mit Formel:

einfache Lösungen:

Die Dicke des Diskus an der Stoffgrenze beträgt $2,5\text{cm} - 1,3\text{cm} = 1,2\text{cm}$.

$$-\frac{5}{2}x^2 + \frac{19}{2}x = \frac{65}{8} \quad | \cdot 8$$

$$20x^2 - 76x + 65 = 0$$

$$x_{1|2} = \frac{76 \pm \sqrt{76^2 - 80 \cdot 65}}{40}$$

$$x_{1|2} = \frac{76 \pm 24}{40}$$

$$x_1 = 1,3; x_2 = 2,5$$

Lehrbuch Seite 87

7 $G(x) = x^3 - 4x - 2$

a) G ist nicht punktsymmetrisch zu O.

$$f(1) = -5; f(-1) = 1 \neq 5$$

Die Bedingung für Punktsymmetrie $f(-x) = -f(x)$ ist nicht erfüllt.

G verläuft vom III. in den I. Quadranten.

Verhalten für $x \rightarrow +\infty$: $f(x) \rightarrow +\infty$

für $x \rightarrow -\infty$: $f(x) \rightarrow -\infty$

b) H ist der höchste Punkt der Böschung.

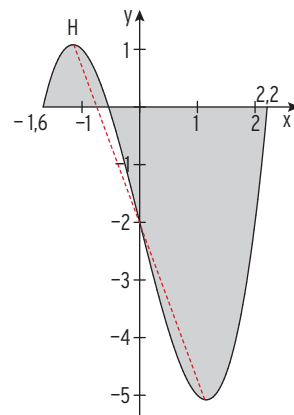
G ist symmetrisch zu $P(0 | -2)$.

Der tiefste Punkt (des Kanals) hat die

Koordinaten $x_T \approx 1,15$ und $y_T \approx -5,08$,

denn $1,08 + 2 = 3,08$ und $-2 - 3,08 = -5,08$

Die größte Tiefe des Kanals beträgt 5,08 m.



Lehrbuch Seite 92

7 A: Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades

keine Symmetrie d. h. keine Parabel, nach oben geöffnet

B: Schaubild einer Polynomfunktion 2. Grades, Symmetrie zur y-Achse
Parabelform

C: Schaubild einer Polynomfunktion 3. Grades, Symmetrie zu $P(0 | 2)$

D: Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades, Symmetrie zur y-Achse
Zwei „Tiefpunkte“ und ein „Hochpunkt“

Schaubild hat nicht die Form einer Parabel, ist somit kein Schaubild einer Polynomfunktion 2. Grades.

Lehrbuch Seite 97

- 3 a) Gleichung: $2x + 5x^3 = 4x^3 \quad | - 4x^3$
 Nullform: $2x + x^3 = 0$
 Ausklammern: $x(2 + x^2) = 0$
 Satz vom Nullprodukt: $x = 0$ oder $2 + x^2 = 0$
 Mit $2 + x^2 \neq 0$ erhält man: $x = 0$
 Lösung der Gleichung: $x = 0$
- b) Gleichung: $-\frac{1}{5}(x^3 - 10x^2) = \frac{9}{5}x \quad | \cdot (-5)$
 $x^3 - 10x^2 = -9x \quad | + 9x$
 Nullform $x^3 - 10x^2 + 9x = 0$
 Ausklammern: $x(x^2 - 10x + 9) = 0$
 Satz vom Nullprodukt: $x = 0$ oder $x^2 - 10x + 9 = 0$
 Lösungen: $x_1 = 0; x_2 = 9; x_3 = 1$
- c) Gleichung: $\frac{1}{8}(x^3 - 10x) = 0 \quad | \cdot 8$
 $x^3 - 10x = 0$
 Ausklammern: $x(x^2 - 10) = 0$
 Satz vom Nullprodukt: $x = 0$ oder $x^2 - 10 = 0$
 Lösungen: $x_1 = 0; x_{2|3} = \pm \sqrt{10}$
- d) Gleichung: $\frac{1}{4}x^3 = 2x^2 - 4x \quad | \cdot 4$
 $x^3 = 8x^2 - 16x$
 Nullform: $x^3 - 8x^2 + 16x = 0$
 Ausklammern: $x(x^2 - 8x + 16) = 0$
 Satz vom Nullprodukt: $x = 0$ oder $x^2 - 8x + 16 = 0$
 Lösungen: $x_1 = 0; x_{2|3} = 4$

Lehrbuch Seite 97

- 3 e) Gleichung: $\frac{2}{9}x(x-2)(x+4) = 0$
 Satz vom Nullprodukt: $x = 0$ oder $x - 2 = 0$ oder $x + 4 = 0$
 Lösungen: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -4$
- f) Gleichung: $-\frac{x^2}{8}(3-4x) = 0$
 Satz vom Nullprodukt: $x^2 = 0$ oder $3 - 4x = 0$
 Lösungen: $x_{1|2} = 0$; $x_3 = \frac{3}{4}$
- g) Gleichung: $x - 0,5x^4 = 0$
 Ausklammern: $x(1 - 0,5x^3) = 0$
 Satz vom Nullprodukt: $x = 0$ oder $1 - 0,5x^3 = 0$
 $1 - 0,5x^3 = 0$
 $x^3 = 2$
 Lösungen: $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt[3]{2}$
- h) Gleichung: $-\frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3 = 0 \quad | \cdot 3$
 $-x^4 + 2x^3 = 0$
 Ausklammern: $x^3(-x + 2) = 0$
 Satz vom Nullprodukt: $x^3 = 0$ oder $-x + 2 = 0$
 Lösungen: $x_{1|2|3} = 0$; $x_4 = 2$
- i) Gleichung: $\frac{1}{12}(x^4 - 2x^3 - 48x^2) = 0 \quad | \cdot 12$
 $x^4 - 2x^3 - 48x^2 = 0$
 Ausklammern: $x^2(x^2 - 2x - 48) = 0$
 Satz vom Nullprodukt: $x^2 = 0$ oder $x^2 - 2x - 48 = 0$
 Lösungen: $x_{1|2} = 0$; $x_3 = 8$; $x_4 = -6$

Lehrbuch Seite 97

3 j) Gleichung:

$$\frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{2} + \frac{9x^2}{8} = 0 \quad | \cdot 16$$

$$x^4 - 8x^3 + 18x^2 = 0$$

Ausklammern:

$$x^2(x^2 - 8x + 18) = 0$$

Satz vom Nullprodukt:

$$x^2 = 0 \text{ oder } x^2 - 8x + 18 = 0$$

 $x^2 - 8x + 18 \neq 0$, da $D = -8 < 0$

Lösung:

$$x_{1|2} = 0$$

k) Gleichung:

$$0,4x^4 - x^2 = 0,8x^3 \quad | \cdot 5$$

$$2x^4 - 5x^2 = 4x^3 \quad | - 4x^3$$

Nullform:

$$2x^4 - 4x^3 - 5x^2 = 0$$

Ausklammern:

$$x^2(2x^2 - 4x - 5) = 0$$

Satz vom Nullprodukt:

$$x^2 = 0 \text{ oder } 2x^2 - 4x - 5 = 0$$

Lösungen:

$$x_{1|2} = 0; x_{3|4} = \frac{4 \pm \sqrt{56}}{4}$$

l) Gleichung:

$$\frac{1}{2}x^4 = x^2 \quad | \cdot 2$$

$$x^4 = 2x^2 \quad | - 2x^2$$

Nullform:

$$x^4 - 2x^2 = 0$$

Ausklammern:

$$x^2(x^2 - 2) = 0$$

Satz vom Nullprodukt:

$$x^2 = 0 \text{ oder } x^2 - 2 = 0$$

Lösungen:

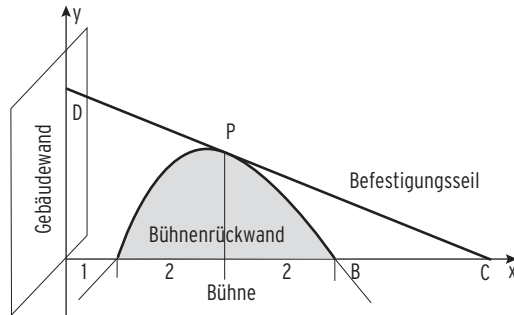
$$x_{1|2} = 0; x_2 = \pm \sqrt{2}$$

Lehrbuch Seite 108

15 Bogen: $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 14x^2 + 53x - 40)$

Probe: $f(1) = 0$; $f(5) = 0$

d.h. das Koordinatensystem kann wie abgebildet gezeichnet werden.



Mit $f(3) = 5$ ergibt sich $P(3 \mid 5)$.

Gerade durch $D(0 \mid 8)$ und P .

Die Gerade hat die Steigung $m = -1$.

Geradengleichung: $y = -x + 8$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

Bedingung: $y = 0$ $0 = -x + 8$

$$x = 8$$

Die Gerade schneidet die x-Achse in 8.

Befestigungspunkt: $C(8 \mid 0)$

Der Abstand des Punktes C vom Punkt B beträgt 3 m.

Lehrbuch Seite 112

5 Alle drei Nullstellen -1 ; 1 und -10 sind bekannt.

Ansatz mit Produktform: $f(x) = a(x + 1)(x - 1)(x + 10)$

Für $a < 0$ verläuft der zugehörige Graph vom II. in das IV. Feld.

Z. B.: $a = -2$ $f(x) = -2(x + 1)(x - 1)(x + 10)$

Punktprobe mit $P(2 | -6)$: $-6 = a(2 + 1)(2 - 1)(2 + 10)$

$$-6 = a \cdot 3 \cdot 1 \cdot 12$$

$$a = -\frac{1}{6}$$

Funktionsterm: $f(x) = -\frac{1}{6}(x + 1)(x - 1)(x + 10)$

6 Gleichung der 1. Winkelhalbierenden: $y = x$

Punkte auf der 1. Winkelhalbierenden: $A(-1 | -1)$ und $B(2 | 2)$

Ansatz: $f(x) = x^3 + bx^2 + 4x + d$

Punktprobe mit $A(-1 | -1)$: $-1 + b - 4 + d = -1$

Punktprobe mit $B(2 | 2)$: $8 + 4b + 8 + d = 2$

LGS:
$$\begin{array}{r} b + d = 4 \\ 4b + d = -14 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \cdot (-1)$$

Addition ergibt: $3b = -18$

$$b = -6$$

Einsetzen von $b = -6$ in

z. B: $b + d = 4$ ergibt: $-6 + d = 4$

$$d = 10$$

Ergebnis: $b = -6$ und $d = 10$

Funktionsterm: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x + 10$

Lehrbuch Seite 121

- 5 a) Der Wasserspiegel im Becken steigt in den ersten 6 s (Zuflussgeschwindigkeit positiv) und fällt von der 6. bis zur 9. Sekunde (Zuflussgeschwindigkeit negativ).
- b) Die ersten 6 Sekunden fließt Wasser in das Becken, danach wird Wasser entnommen.
Nach 6 s befindet sich am meisten Wasser im Becken.

Lehrbuch Seite 130

- 4 a) $g(x) = f(x) + 3 = e^{-x} + 3$
Vergleich mit $g(x) = ae^{-x} + b$ ergibt: $a = 1; b = 3$
- b) $g(x) = -f(x) = -e^{-x}$
Vergleich mit $g(x) = ae^{-x} + b$ ergibt: $a = -1; b = 0$
- c) $g(x) = 0,5f(x) - 6 = 0,5e^{-x} - 6$
Vergleich mit $g(x) = ae^{-x} + b$ ergibt: $a = 0,5; b = -6$
- d) $g(x) = e^{-(x-2)} = e^{-x+2} = e^2 \cdot e^{-x}$
Vergleich mit $g(x) = ae^{-x} + b$ ergibt: $a = e^2; b = 0$

Bemerkungen: Eine horizontale Verschiebung lässt sich durch eine Streckung in y-Richtung (Faktor e^2) ersetzen (vgl. Potenzgesetze).
Gemeinsame Eigenschaft: Alle Kurven haben eine waagrechte Asymptote.

Lehrbuchseite 135

3 K: $f(x) = 2 - e^{-x}$

K verläuft vom 3. in das 1. Feld.

Die Gerade mit $y = 2$ ist waagrechte Asymptote.

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0 \mid 1)$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $S_x(-0,7 \mid 0)$

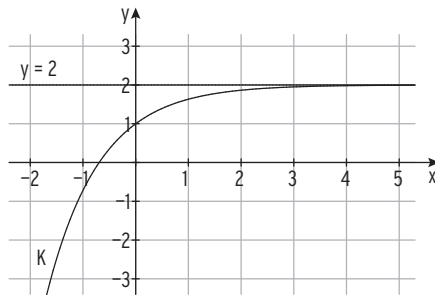
$f(-0,70) \approx -0,01 < 0$; $f(-0,69) = 0,006... > 0$

VZW von $f(x)$ zwischen $-0,70$ und $-0,69$.

K entsteht aus dem Schaubild von g

durch Spiegelung an der x-Achse: $y = -e^{-x}$

und Verschiebung um 2 nach oben: $y = -e^{-x} + 2$



Lehrbuch Seite 141

- 5 a) Gleichung: $e - 2e^{0,5x} = 0$
- Umformung: $2e^{0,5x} = e$
- $$e^{0,5x} = \frac{e}{2}$$
- Definition des Logarithmus: $0,5x = \ln\left(\frac{e}{2}\right)$
- $$x = 2\ln\left(\frac{e}{2}\right)$$
- b) Gleichung: $\frac{2}{3}e^{-x} - 2 = 0$
- $$\frac{2}{3}e^{-x} = 2 \quad | \cdot \frac{3}{2}$$
- $$e^{-x} = 3$$
- $$-x = \ln(3)$$
- $$x = -\ln(3)$$
- c) Gleichung: $e^{2x}(1 - 5x) = 0$
- Satz vom Nullprodukt: $e^{2x} = 0 \vee 1 - 5x = 0$
- wegen $e^{2x} \neq 0$: $1 - 5x = 0$
- einzigste Lösung: $x = \frac{1}{5}$
- d) Gleichung: $e^{2-x} = 3$
- $$2 - x = \ln(3)$$
- $$x = 2 - \ln(3)$$
- e) Gleichung: $e^{0,2x+1} - 1 = 0$
- $$e^{0,2x+1} = 1$$
- $$0,2x + 1 = \ln(1)$$
- Mit $\ln(1) = 0$: $0,2x + 1 = 0$
- $$x = -5$$

Lehrbuch Seite 141

- 5 f) Gleichung: $3 - 0,5e^{0,25x} = 0$
 $0,5e^{0,25x} = 3$
 $e^{0,25x} = 6$
 $0,25x = \ln(6)$
 $x = 4\ln(6)$
- g) Gleichung: $(3 + 2x)e^{x-1} = 0$
 Satz vom Nullprodukt: $3 + 2x = 0 \vee e^{x-1} = 0$
 $3 + 2x = 0$
 wegen $e^{x-1} \neq 0$: $x = -\frac{3}{2}$ (einzige Lösung)
- h) Gleichung: $8 - e^x = 7e^{-x}$
 $8 - e^x = 7e^{-x} \quad | \cdot e^x$
 $8e^x - e^{2x} = 7 \quad | -7$
 Nullform: $-e^{2x} + 8e^x - 7 = 0$
 Substitution: $u = e^x$ $-u^2 + 8u - 7 = 0$
 Lösung mit Formel: $u_1 = 1; u_2 = 7$
 Rücksubstitution: $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$
 $e^x = 7 \Rightarrow x = \ln(7)$
 Lösungen: $x_1 = 0; x_2 = \ln(7)$
- i) Gleichung: $2e^{0,5x} = e^x$
 $2e^{0,5x} - e^x = 0$
 Ausklammern: $e^{0,5x}(2 - e^{0,5x}) = 0$
 Satz vom Nullprodukt: $e^{0,5x} = 0 \vee 2 - e^{0,5x} = 0$
 $e^{0,5x} = 0 \vee e^{0,5x} = 2$
 wegen $e^{0,5x} \neq 0$: $e^{0,5x} = 2$
 $0,5x = \ln(2)$
 einzige Lösung: $x = 2\ln(2)$

Lehrbuch Seite 144

3 b) Schnittpunkte von K und G

Bedingung: $f(x) = g(x)$

$$e^{2x} + 6 = 5e^x \quad | - 5e^x$$

Nullform:

$$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$$

Substitution: $u = e^x$

$$u^2 - 5u + 6 = 0$$

Lösung mit Formel:

$$u_1 = 2; u_2 = 3$$

Rücksubstitution:

$$e^x = 2 \Rightarrow x = \ln(2)$$

$$e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$$

Lösungen der Gleichung:

$$x_1 = \ln(2); x_2 = \ln(3)$$

y-Werte der Schnittpunkte:

$$y = g(\ln(2)) = 5 e^{\ln(2)} = 5 \cdot 2 = 10$$

$$y = g(\ln(3)) = 5 e^{\ln(3)} = 5 \cdot 3 = 15$$

Schnittpunkte:

$$S_1(\ln(2) | 10); S_2(\ln(3) | 15)$$

c) Schnittpunkte von K und G

Bedingung: $f(x) = g(x)$

$$-e^{3x} + 2x = 2x - 5 \quad | - 2x$$

$$-e^{3x} = -5 \quad | \cdot (-1)$$

$$e^{3x} = 5$$

Definition anwenden:

$$3x = \ln(5) \quad | : 3$$

$$x = \frac{\ln(5)}{3}$$

y-Werte des Schnittpunktes:

$$y = 2 \cdot \frac{\ln(5)}{3} - 5 = \frac{2}{3} \ln(5) - 5$$

Schnittpunkt:

$$S\left(\frac{\ln(5)}{3} \mid \frac{2}{3} \ln(5) - 5\right)$$

Lehrbuchseite 151**2 Reale Situation**

In einem See von der Größe 8 ha wachsen Seerosen.

Reales Modell

Die bedeckte Fläche nimmt wöchentlich um 30% zu. Anfangs sind 150 m² der Oberfläche bedeckt.

Annahme: Die Zunahme erfolgt exponentiell. Die bedeckte Fläche nach t Wochen (t = 0 entspricht dem Beginn der Messung) soll durch eine Funktion beschrieben werden.

Mathematisches Modell:

$B(0) = 150$; $B(t)$: bedeckte Fläche in m²

Mit $a = 1,30$ ergibt sich: $B(t) = 150 \cdot 1,30^t$

Dieser Funktionsterm beschreibt die bedeckte Fläche in Abhängigkeit von der Zeit t.

Schreibweise mit e-Basis mit $1,30 = e^{\ln(1,30)} = e^{0,2624}$

Funktionsterm: $B(t) = 150 \cdot e^{0,2624t}$

Mathematische Lösung:

Ansatz: $B(t) = 80000$

$$150 \cdot 1,30^t = 80000$$

$$1,30^t = 533,33$$

Logarithmieren:

$$\ln(1,30) \cdot t = \ln(533,33)$$

$$t = 23,93$$

oder mit der Basis e:

Ansatz: $B(t) = 80000$

$$150 \cdot e^{0,2624t} = 80000$$

$$e^{0,2624t} = 533,33$$

Logarithmieren:

$$0,2624 \cdot t = \ln(533,33)$$

$$t = \frac{\ln(533,33)}{0,2624} = 23,93$$

Bewertung:

Die Wasserrose bedeckt die gesamte Fläche nach ca. 24 Wochen.

Exponentielles Wachstum ist also nur in den ersten 24 Wochen möglich.

Lehrbuchseite 152

8 a) Jahr 2009: $t = 0$ Jahr 2019: $t = 10$

Anzahl der Einwohner: $h(10) = 30851,5$

Zu Beginn des Jahres 2019 sind ca. 30850 Einwohner zu erwarten.

$$\text{b) } \frac{h(1)}{h(0)} = \frac{27818,1}{27500,0} = 1,01157 \quad \text{oder } e^{0,0115 \cdot 1} \approx 1,01157$$

Die jährliche Zunahme beträgt 1,16%.

c) Verdoppelungszeit

$$\text{Bedingung: } h(t) = 2 \cdot 27500 \quad e^{0,0115 \cdot t} = 2$$

$$0,0115 \cdot t = \ln(2)$$

$$t = \frac{\ln(2)}{0,0115} = 60,27$$

In etwa 60 Jahren kann man von einer Verdoppelung der Einwohnerzahl ausgehen.

Lehrbuch Seite 154

2 Ansatz: $g(t) = a - 10e^{-kt}$; $t \geq 0$; $a, k > 0$

a) $t = 0$: $g(0) = a - 10e^{-k \cdot 0} = a - 10$

$t = 10$: $g(10) = a - 10e^{-10k}$

Aus $g(0) = 10$ folgt: $a - 10 = 10$

$$a = 20$$

Aus $g(10) = 16,321$ folgt: $a - 10e^{-10k} = 16,321$

$a = 20$ eingesetzt: $20 - 10e^{-10k} = 16,321$

Auflösung nach k : $10e^{-10k} = 3,679$

$$e^{-10k} = 0,3679$$

$$-10k = \ln(0,3679)$$

$$k = \frac{\ln(0,3679)}{-10} = 0,0999994 \approx 0,1$$

Funktionsterm: $g(t) = 20 - 10e^{-0,1t}$

b) Für $t \rightarrow \infty$: $g(t) \rightarrow 20$ wegen $e^{-0,1t} \rightarrow 0$

Das Schaubild von g hat die waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 20$.

Die Biomasse strebt gegen $20 \cdot 10^2$ Tonnen.

c) 95 % von 20 = 19

Bedingung: $g(t) = 19$ $20 - 10e^{-0,1t} = 19$

$$10e^{-0,1t} = 1$$

$$e^{-0,1t} = 0,1$$

$$-0,1t = \ln(0,1)$$

$$t = -10 \ln(0,1) \approx 23,0$$

Die Zeit bis zur Verwertung beträgt etwa 23 Jahre.