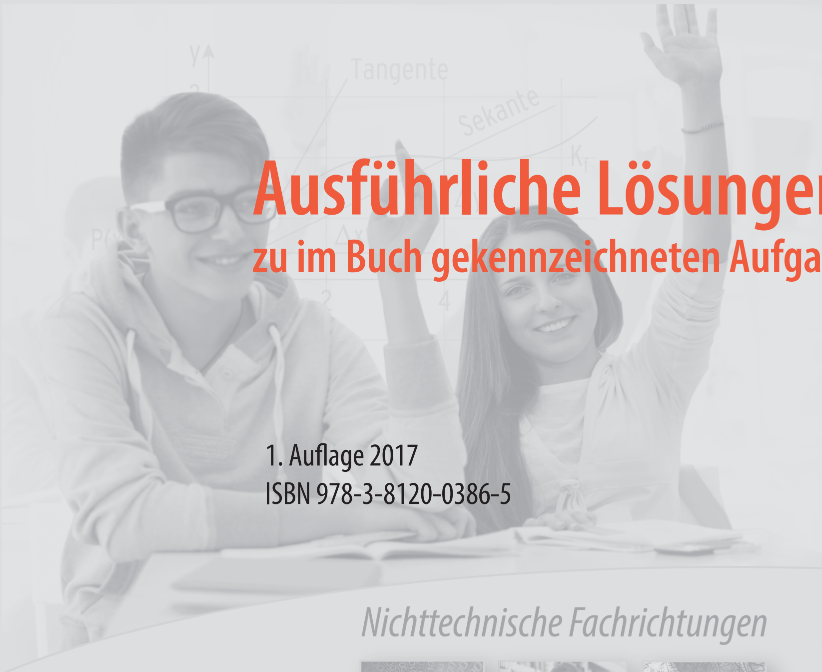
Ott
Bohner
Deusch
Thun

Mathematik kompetent

zur Erlangung der Fachhochschulreife

Klassen 11 und 12



Ausführliche Lösungen

zu im Buch gekennzeichneten Aufgaben

1. Auflage 2017
ISBN 978-3-8120-0386-5

Merkur
Verlag Rinteln

Umschlag: Hintergrundbild: Kirill Kedrinski – fotolia.com, Rahmen links: Mike Kiev – Fotolia.com, Rahmen Mitte: Andres Rodriguez – Fotolia.com

Lehrbuch Seite 15

9 a)

x in km/h	20	30	45	60	90	120
y in h	1,50	1,0	$\frac{2}{3}$	0,50	$\frac{1}{3}$	0,25

Es gilt: $x \cdot y = 30$

Die Zuordnung ist antiproportional, die Kurve stellt einen Teil einer Hyperbel dar.

b) Bei einer Geschwindigkeit von 60 km/h beträgt die Fahrzeit ca. eine halbe Stunde.

c) Bei einer Fahrzeit von 1,5 Stunden erreicht er eine Geschwindigkeit von ca. 20 km/h.

Lehrbuch Seite 19

18 a) $x = \frac{32 \cdot 100}{496} = 6{,}45$

Die Abweichung beträgt 0,55 l/100 km.

Gründe: Fahrverhalten, Straßenbelag, verstärkt Stadtverkehr etc.

b) 42,53 € : 32 l = 1,329 €/l. Literpreis 1,329 €.

1,329 €/l · 60 l = 79,74 €

Eine Tankfüllung kostet 79,74 €.

c) $x = \frac{60\,l}{6{,}45\frac{l}{100km}} = 930{,}23$ km Der Fahrradius beträgt ca. 930 km.

d) gerundet auf ganze Werte:

Typ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
kW	100	105	125	135	180	105	120	135	190
PS	136	143	170	184	245	143	163	184	258

Der Proportionalitätsfaktor ist 1,36.

Lehrbuch Seite 22

6 (1) Verteilung nach Betriebszugehörigkeit

36 Teile ≙ 18000 1 Teil ≙ 500

Beteiligte	Monate	Teileverhältnis	Anteile (in €)
Asseln	70	7	3 500
Brieger	80	8	4 000
Clemmt	90	9	4 500
Dahms	120	12	6 000

(2) Verteilung nach Umsatz

360 Teile ≙ 18000 1 Teil ≙ 50

Beteiligte	Umsatz (in €)	Teileverhältnis	Anteile (in €)
Asseln	100 000	50	2 500
Brieger	156 000	78	3 900
Clemmt	210 000	105	5 250
Dahms	254 000	127	6 350

(3) Verteilung je zur Hälfte nach Betriebszugehörigkeit und nach Umsatz

36 Teile ≙ 9 000 1 Teil ≙ 250 360 Teile ≙ 9 000 1 Teil ≙ 25

Beteiligte	Monate	Teile-verhältnis	Anteil 1 (in €)	Umsatz (in €)	Teile-verhältnis	Anteil 2 (in €)	Gesamt-anteil
Asseln	70	7	1 750	100000	50	1 250	3 000
Brieger	80	8	2 000	156000	78	1 950	3 950
Clemmt	90	9	2 250	210000	105	2 625	4 875
Dahms	120	12	3 000	254 000	127	3 175	6 175
		36	9000		360	9000	**18000**

Bei Brieger fällt in etwa der gleiche Anteil an, unabhängig von der Verteilungsgrundlage.

Bei den übrigen liegt die zusammengesetzte Verteilung etwa in der Mitte.

Lehrbuch Seite 33

1 Regulärer Preis 100% ≙ 129,00 €

− Preissenkung	15,5% ≙	20,00 €
Messepreis	84,5 % ≙	109,00 €

Ersparnis: 129 € · 0,155 = 20,00 €

Messepreis: 129 € − 20 € = 109 €

11 Nebenrechnung: Umsatz des Vorjahres 238 500 € ≙ 100 %

+ Umsatzsteigerung	13 356 € ≙	5,6 %
Aktueller Umsatz	251 856 € ≙	105,6 %

a) Vorjahresumsatz in € $= \frac{251\,856}{1{,}056} = 238\,500$

b) Der Umsatz konnte um 13 356 € gesteigert werden.

Lehrbuch Seite 35

4

	a) linear	b) degressiv
	20 % von 30000	
Anschaffungswert	30 000,00 €	30 000,00 €
- 1. Abschreibung	6 000,00 €	6 000,00 € (20 % von 30 000)
= Restwert 1	24 000,00 €	24 000,00 €
- 2. Abschreibung	6 000,00 €	4 800,00 € (20 % von 24 000)
= Restwert 2	18 000,00 €	19 200,00 €
- 3. Abschreibung	6 000,00 €	3 840,00 € (20 % von 19 200)
= Restwert 3	12 000,00 €	15 360,00 €

Lehrbuch Seite 42

1

	a)	b)
Listeneinkaufspreis	41,26	95,00
– Liefererrabatt	4,13	19,00
Zieleinkaufspreis	37,13	76,00
– Liefererskonto	0,74	2,28
Bareinkaufspreis	36,39	73,72
+ Bezugskosten	3,85	6,11
= Bezugspreis	40,24	79,83
+ Handlungskosten	12,07	39,91
= Selbstkostenpreis	52,31	119,74
+ Gewinn	10,46	17,96
= Barverkaufspreis	62,77	137,70
+ Kundenskonto	1,35	3,06
+ Vertreterprovison	3,38	12,24
= Zielverkaufspreis	67,50	153,00
+ Kundenrabatt	7,50	27,00
= Listenverkaufspreis	75,00	180,00

Lehrbuch Seite 51

1 a) $Z = \frac{520 \cdot 2{,}5 \cdot 77}{100 \cdot 360} = 2{,}78$ Zinsen 2,78 €

b) $t = \frac{360 \cdot 100 \cdot 4{,}50}{1200 \cdot 4{,}5} = 30$ 30 Tage

c) $p = \frac{360 \cdot 100 \cdot 29{,}7}{540 \cdot 180} = 11$ p % = 11 %

d) $K = \frac{27 \cdot 100}{9 \cdot 1{,}5} = 200$ Kapital 200 €

Lehrbuch Seite 55

6 Darlehen 12 000,00 €

– Disagio 600,00 €

= Auszahlung 11 400,00 €

Zinsaufwendungen von 12 000,00 € zu 4,5 % in 5 Jahren: $Z = \frac{12000 \cdot 4{,}5 \cdot 5}{100} = 2\,700$

Kreditkosten: Zinsen + Disagio = 2 700,00 + 600,00 € = 3 300,00 €.

Effektiver Zinssatz: $p\,\% = \frac{3300 \cdot 100}{11400 \cdot 5} \approx 5{,}79\,\%$

Lehrbuch Seite 61

9 a) $K_5 = 40\,000\text{ €} \cdot 1{,}03^5 = 46\,370{,}96\text{ €}$

b) $1{,}03^n = 2$ $n = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}03)} = 23{,}45$ (Jahre)

Nach ca. 24 Jahren hat sich das Kapital verdoppelt.

Lehrbuch Seite 63

1 Angebot A: 220 000

Angebot B: $100\,000 + \frac{130000}{1{,}04^3} = 100\,000 + 115\,569{,}53 = 215\,569{,}53$

Angebot A ist günstiger.

Lehrbuch Seite 64

1 $1{,}025 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}0425 \cdot 1{,}045 \cdot 1{,}05 = 1{,}20765$

$q = \sqrt[5]{1{,}20765} \approx 1{,}0385$

effektiver Zinssatz $p\,\% = 3{,}85\,\%$

Lehrbuch Seite 67

1 a) $\frac{9\,\%}{2} = 4{,}5\,\%$ b) $\frac{9\,\%}{4} = 2{,}25\,\%$ c) $\frac{9\,\%}{12} = 0{,}75\,\%$

Lehrbuch Seite 70

9 $150\,000 \cdot 1{,}037^n = 200\,000$

$1{,}037^n = 1{,}333$ $n = \frac{\ln(1{,}333)}{\ln(1{,}037)} \approx 7{,}911$

Die Jugendlichen müssen sich noch 8 Jahre bis zur ersten Zinsauszahlung gedulden.

Lehrbuch Seite 91

2 $f(x) = 6 - 1{,}5x$

a) Zeichnung

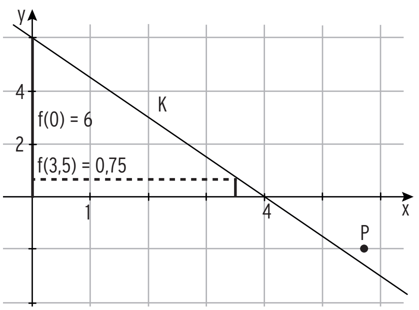
b) Kennzeichnung

c) Ablesen ergibt $f(x) = 0$ für $x = 4$.

Die Gerade schneidet die x-Achse in $x = 4$.

d) Punktprobe mit $P(5{,}5 \mid -2)$ ergibt eine falsche Aussage: $f(5{,}5) = -2{,}25$

P liegt nicht auf der Geraden.



Lehrbuch Seite 94

3 a) $G(2) = 350$; Stückgewinn 275 GE/ME $\Rightarrow$ $m = 275$

$G(x) = 275x + c$; Punktprobe mit $(2 \mid 350)$ ergibt $c = -200$

$G(x) = 275x - 200$

b) $G(x) = 1175$ für $x = 5$

Lehrbuch Seite 99

9 $G(x) = 425x - 2100$; $D = [0; 15]$.

a) Steigung: Gewinnzunahme pro Mengeneinheit: 425 GE/ME

y-Achsenabschnitt: Verlust in $x = 0$; negative fixe Kosten

b) $G(15) = 4275$ (Gewinn an der Kapazitätsgrenze)

c) $G(x) = 3425$ führt auf $x = 13$

d) Gesamtkostenfunktion, wenn $E(x) = 680x$: $K(x) = E(x) - G(x) = 255x + 2100$

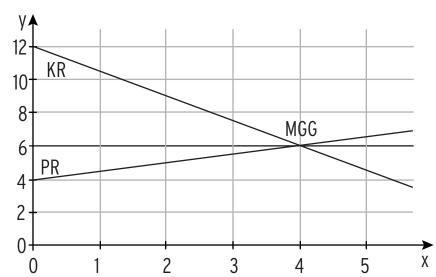
e) $G(x) = 0$ führt auf $x = 4{,}94...$

$E(4{,}94) = 680 \cdot 4{,}94 = 3359{,}2$

Break-Even-Punkt $B(4{,}94 \mid 3359{,}2)$

Lehrbuch Seite 103

1 $p_A(x) = 0{,}5x + 4$ und $p_N(x) = 12 - 1{,}5x$



a) ökonomisch sinnvoller

Definitionsbereich: $D_{ök} = [0; 8]$

b) Gleichgewichtsmenge:

$p_A(x) = p_N(x)$ ergibt $x = 4$

Gleichgewichtspreis: $p_N(4) = 6$;

Marktgleichgewicht MGG$(4 \mid 6)$

c) Sättigungsmenge: $p_N(x) = 0$ ergibt $x = 8$

Höchstpreis: $p_N(0) = 12$

d) Konsumentenrente: KR = 12

Produzentenrente: $PR = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (6 - 4) = 4$

e) Die Konsumenten haben gegenüber den erwarteten Ausgaben 12 GE gespart (Ersparnis).

Die Produzenten haben 4 GE mehr Umsatz erzielt als erwartet (Erlösvorteil).

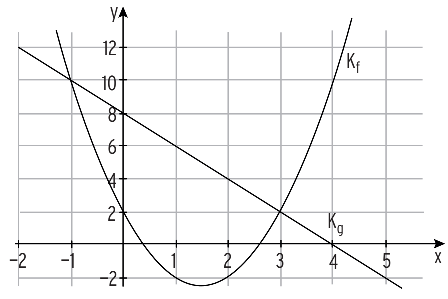
Lehrbuch Seite 120

1 a) $f(x) = g(x)$ führt auf $2x^2 - 4x - 6 = 0$

mit den Lösungen $x_1 = 3$; $x_2 = -1$

$S_1(3 \mid 2)$; $S_2(-1 \mid 10)$

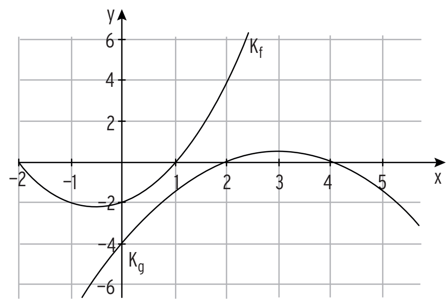
Die Gerade K_g schneidet K_f in zwei Punkten.



b) $f(x) = g(x)$ führt auf $1{,}5x^2 - 2x + 2 = 0$

Die quadratische Gleichung hat keine Lösung ($D < 0$)

K_g und K_f haben keine gemeinsamen Punkte.



Lehrbuch Seite 122

2 Ansatz; $f(x) = x^2 + bx + c$

a) LGS: $1 + b + c = 2{,}5$

$4 - 2b + c = 1$

vereinfacht: $b + c = 1{,}5$

$-2b + c = -3$

$b = 1{,}5$; $c = 0$ $\quad f(x) = x^2 + 1{,}5x$

b) LGS: $4 + 2b + c = 0$

$1 - b + c = 6$

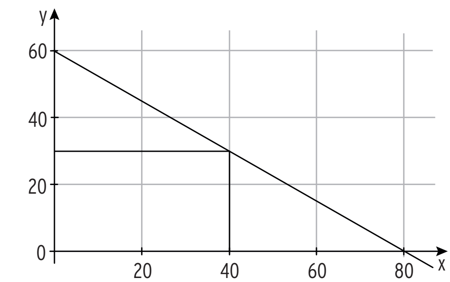
vereinfacht: $2b + c = -4$

$-b + c = 5$

$b = -3$; $c = 2$ $\quad f(x) = x^2 - 3x + 2$

Lehrbuch Seite 126

2 Gerade mit $y = -\frac{3}{4}x + 60$



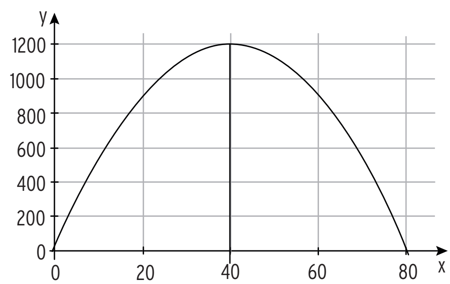
Flächenfunktion A mit

$A(x) = x(-\frac{3}{4}x + 60);\ 0 \le x \le 80$

Mit den Nullstellen 0 und 80.

Maximal in $x = x_S = 40$: $A(40) = 1200$

Der Bauplatz hat maximal 1200 m^2.



Lehrbuch Seite 140

2 c) $x^3 - x^2 = x \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - x^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2 - x - 1) = 0$

Satz vom Nullprodukt anwenden: $x = 0 \vee x^2 - x - 1 = 0$

Lösungen: 0; $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \approx 1{,}62$; $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} \approx -0{,}62$

f) $2{,}5\,x^2 - 4\,x^3 + x^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(2{,}5 - 4\,x + x^2) = 0$

Satz vom Nullprodukt anwenden: $x^2 = 0 \vee 2{,}5 - 4\,x + x^2 = 0$

Lösungen: 0; $2 + \sqrt{1{,}5} \approx 3{,}22$; $2 - \sqrt{1{,}5} \approx 0{,}78$

i) $(x^2 - 5)(x^2 - 3) = 0$

Satz vom Nullprodukt anwenden: $x^2 - 5 = 0 \vee x^2 - 3 = 0$

Lösungen: $\pm\sqrt{5}$; $\pm\sqrt{3}$

Lehrbuch Seite 141

1 a) $x^4 - 5\,x^2 + 6 = 0$ Substitution: $u = x^2$ ergibt $u^2 - 5u + 6 = 0$

Lösungen in u: $u = 2 \vee u = 3$

Lösungen in x: $\pm\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{3}$

b) $x^4 - 2\,x^2 + 1 = 0$ Substitution: $u = x^2$ ergibt $u^2 - 2u + 1 = 0$

Lösungen in u: $u = 1$

Lösungen in x: ± 1

c) $x^4 - x^2 - 12 = 0$ Substitution: $u = x^2$ ergibt $u^2 - u - 12 = 0$

Lösungen in u: $u = 4 \vee u = -3$

Lösungen in x: ± 2

Lehrbuch Seite 142

1 a) $x^3 + 5x^2 - 17x - 21 = (x + 1)(x - 3)(x + 7)$ Lösungen: $-1; 3; -7$

b) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x - 3)(x + 2)$ Lösungen: $2; 3; -2$

Lehrbuch Seite 148

8 Polynomdivison mit $(x - 2)$ $(-x^3 + 6x^2 - 2x - 12) : (x - 2) = -x^2 + 4x + 6$

$-x^2 + 4x + 6 = 0$ für $x_2 = 5{,}16$; ($x_3 = -1{,}16$)

Lösungen der Gleichung $G(x) = 0$: $x_1 = 2$; $x_2 = 5{,}16$

Die Aldo AG erzielt keinen Gewinn (Gewinn = 0) für $x_1 = 2$; $x_2 = 5{,}16$

Lehrbuch Seite 151

1 a) $f(x) = g(x)$ $x^3 - 2x^2 = x^2$

$x^3 - 3x^2 = 0$

$x^2 (x - 3) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x^2 = 0 \lor x - 3 = 0$

Lösungen: $x_1 = 0$; $x_2 = 3$

H_1 und H_2 berühren sich in $S_{1|2}(0 \mid 0)$ und schneiden sich in $S_3(3 \mid 9)$.

b) $f(x) = g(x)$ $x^3 - 4x = 0$

$x(x^2 - 4) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x = 0 \lor x^2 - 4 = 0$

Lösungen: $x_1 = 0$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$

H_1 und H_2 schneiden sich in $S_1(-2 \mid -8)$, $S_2(0 \mid 0)$ und $S_3(2 \mid 8)$

Lehrbuch Seite 156

6 $K(x) = x^3 - 10x^2 + 36x + 108$; $E(x) = -15x^2 + 120x$

Die Gewinnzone beginnt bei 1,45 ME

(Polynomdivision mit $(x - 6)$)

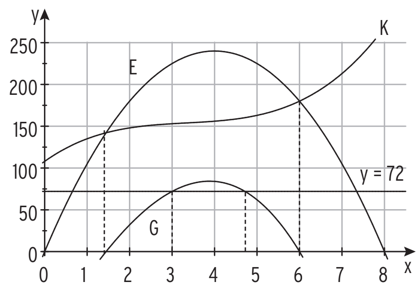
Gewinn von 72 GE: $G(x) = 72$

für $x = 3$ oder $x = 4{,}72$ $(x > 0$ sinnvoll)

Bei einer Produktionsmenge von

4,7 ME wird der gleiche Gewinn erzielt.

Skizze der Graphen von K, E, G:



Lehrbuch Seite 164

2 a) Mittlere Änderungsrate auf [0; 2]: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{E(2) - E(0)}{2} = 1{,}5$

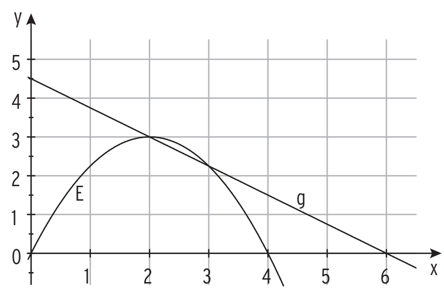
mittlerer Erlöszuwachs 1,5 GE/ME

b) Gleichung der Sekante g durch

P(2 | 3) und Q(3 | 2,25):

$y = -\frac{3}{4}x + 4{,}5$

mittlere Erlösabnahme 0,75 GE/ME



c) Momentane Änderungsrate

von E an der Stelle x = 2:

Tabelle

$[2; x_2]$	[2; 2,1]	[2; 2,01]	[2; 2,001]
$\Delta x = x_2 - 2$	0,1	0,01	0,001
$\frac{f(x_2) - f(2)}{x_2 - 2}$	− 0,075	− 0,0075	− 0,00075

Die mittlere Änderungsrate strebt gegen 0. Die Tangente an der Stelle x = 2 hat die Steigung 0 (waagrechte Tangente). Momentane Erlösänderung 0 GE/ME

Lehrbuch Seite 175

3 a) $K'(x) > 10$: $0 \leq x < 1{,}5$ oder $x > 5$

b) Aus der Abbildung: $K'(0) = 30$ und $K'(3) \approx 0$

Die Grenzkosten sind zu Beginn wesentlich höher als in $x = 3$ (Wendestelle).

c) $K'(1) > K'(2)$ w. A. degressiver Kostenverlauf

d) $K'(4) < 0$ f. A. Kostenkurve nicht fallend

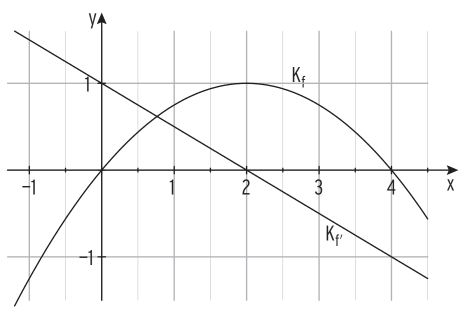
e) $K'(x) > 0$ w. A. Kostenkurve ist steigend.

Lehrbuch Seite 181

3 Der Graph von f hat einen Hochpunkt in $x = 2$, die Steigung wechselt das Vorzeichen von + nach −.

Der Graph von f ist wachsend für $x < 2$, danach fallend.

Der Graph von f ist eine Parabel, das Schaubild einer Polynomfunktion 2. Grades.



Lehrbuch Seite 184

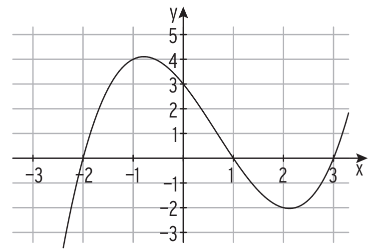
1 a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 3$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2}$; $f''(x) = 3x - 2$

H(− 0,79 | 4,10); T(2,12 | − 2,03)

$N_1(-2 \mid 0)$; $N_2(1 \mid 0)$; $N_3(3 \mid 0)$

$S_y(0 \mid 3)$



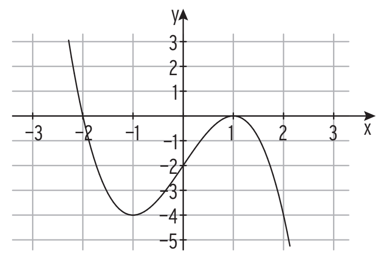
b) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

$f'(x) = -3x^2 + 3$; $f''(x) = -6x$

H(1 | 0); T(− 1 | − 4)

$N_1(-2 \mid 0)$; $N_{2|3}(1 \mid 0)$

$S_y(0 \mid -2)$

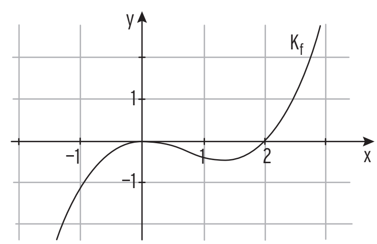


c) $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2$

$f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{3}{2}x$; $f''(x) = \frac{9}{4}x - \frac{3}{2}$

$H(0 \mid 0) = N_1$; $T(\frac{4}{3} \mid -\frac{4}{9})$

$N_2(2 \mid 0)$



Lehrbuch Seite 192

2 a) $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + 3$; $f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$; $f''(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$; $f'''(x) = -\frac{3}{4} \neq 0$

$W(\frac{2}{3} \mid \frac{128}{27})$

b) $f(x) = 6x^2 - \frac{2}{3}x^3$; $f'(x) = 12x - 2x^2$; $f''(x) = 12 - 4x$; $f'''(x) = -4 \neq 0$

W(3 | 36)

Lehrbuch Seite 195

1 c) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$

$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$; $f''(x) = -6x + 12$

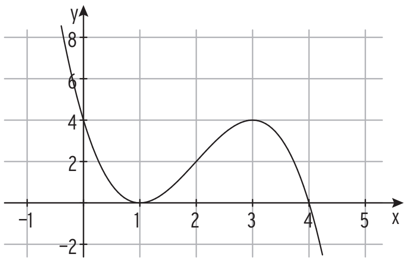
$f'''(x) = -6 \neq 0$

$f(x) = 0$

Polynomdivision mit $(x - 1)$

$N_{1|2}(1 \mid 0) = T$; $N_3(4 \mid 0)$; $S_y(0 \mid 4)$

$H(3 \mid 4)$; $W(2 \mid 2)$



Lehrbuch Seite 203

2 $G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 2x^2 + 60x - 98$

a) $G(7{,}9) = 7{,}8 > 0$ und $G(8{,}1) = -12{,}2 < 0$ VZW von G(x) von + nach −

b) $G(x) = 110 \Leftrightarrow -x^3 + 2x^2 + 60x - 208 = 0$

Polynomdivision mit $(x - 4)$ $(-x^3 + 2x^2 + 60x - 208) : (x - 4) = -x^2 - 2x + 52$

$-x^2 - 2x + 52 = 0$ für $x_2 = 6{,}28$, $(x_3 = -8{,}28)$

Bei der Produktionsmenge 6,28 ME beträgt der Gewinn auch 110 GE.

c) $G'(x) = -3x^2 + 4x + 60$; $G''(x) = -6x + 4$

$G'(x) = 0$ für $x_1 = 5{,}19$ ($x_2 = -3{,}85$ ökonomisch nicht sinnvoll)

Gewinnmaximum $G_{max} = G(5{,}19) = 127{,}47$

d) gewinnmaximaler Preis: $\frac{E(5{,}19)}{5{,}19} = \frac{353{,}44}{5{,}19} = 68{,}1$

Cournot'scher Punkt $C(5{,}19 \mid 68{,}1)$

Lehrbuch Seite 210

1 $K(x) = \frac{1}{4}x^3 - 6x^2 + 50x + 280$; $k(x) = \frac{1}{4}x^2 - 6x + 50 + \frac{280}{x}$; $k'(x) = \frac{1}{2}x - 6 - \frac{280}{x^2}$

a) $k'(14{,}5) = -0{,}08 < 0$; $k'(14{,}7) = 0{,}06 > 0$

VZW von $k'(x)$ von − nach + , also Tiefpunkt bei $x \approx 14{,}6$

Das Betriebsoptimum liegt bei etwa 14,6.

langfristige Preisuntergrenze $k(14{,}6) = 34{,}87$

b) $k_v(x) = \frac{1}{4}x^2 - 6x + 50$; $k_v'(x) = \frac{1}{2}x - 6$

Betriebsminimum: $k_v'(x) = 0$ $x_{BM} = 12$

kurzfristige Preisuntergrenze: $k_v(12) = 14$

Lehrbuch Seite 220

5 $E(x) = 69{,}5x$

Bedingungen für a, c und d in $K(x) = ax^3 - 30x^2 + cx + d$

$k_v(x) = ax^2 - 30x + c$; $k_v'(x) = 2ax - 30$

$K(0) = 100$: $d = 100$

$k_v'(7{,}5) = 0$ $15a - 30 = 0 \Rightarrow a = 2$

$k_v(7{,}5) = 37$ $56{,}25a - 225 + c = 37$

Einsetzen von a = 2 ergibt $56{,}25 \cdot 2 - 225 + c = 37$

$c = 149{,}5$

$K(x) = 2x^3 - 30x^2 + 149{,}5x + 100$

Lehrbuch Seite 230

5 F mit $F(x) = -2x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x + c$

Punktprobe mit $A(-1 \mid 2)$ ergibt $c = \frac{4}{3}$

$F(x) = -2x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x + \frac{4}{3}$

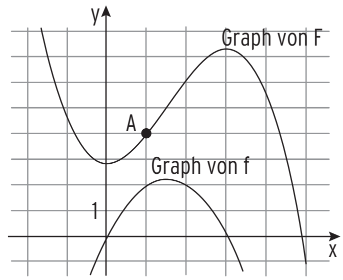
Lehrbuch Seite 234

9 Nullstelle von f mit VZW ist Extremstelle von F

$x = 0$: Minimalstelle von F

$x = 3$: Maximalstelle von F

In $x = 1{,}5$ hat der Graph von F die größte Steigung 2,25.



In $x = 1{,}5$ hat F eine Wendestelle.

Ein Schaubild einer Stammfunktion zeichnen und so nach oben verschieben, dass es durch A(1 I 4) verläuft.

Lehrbuch Seite 240

1 a) $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (2x + 1)dx = [\, x^2 + x \,]_0^2 = 6$

b) $\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{3} (0{,}5x^3)dx = \left[\frac{1}{8}x^4 \right]_{-1}^{3} = 10$

c) $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^4 (x^2 - \frac{x}{3})dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^2 \right]_0^4 = \frac{56}{3}$

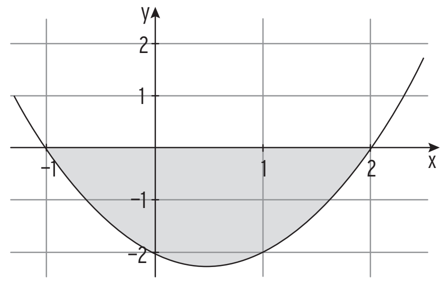
Lehrbuch Seite 248

3 a) Nullstellen: $f(x) = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = -1;\ x = 2$

Skizze:



Stammfunktion:

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$

$\int_{-1}^{2} (x - 2)(x + 1)dx$

$= \int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)dx = -\frac{9}{2};\ \ A = \frac{9}{2}$

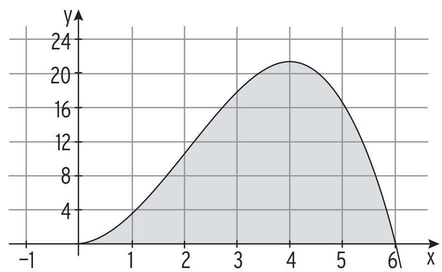
b) Nullstellen: $f(x) = 0$

$-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 = 0$

$x^2(-\frac{2}{3}x + 4) = 0$

$x = 0\ ;\ x = 6$

Skizze:



Stammfunktion: $F(x) = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{4}{3}x^3$

$\int_{0}^{6} (-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2)dx = 72$

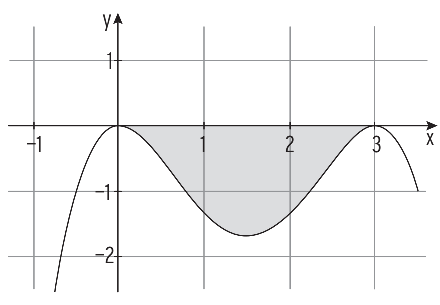
c) Nullstellen: $f(x) = 0$

$-\frac{1}{3}x^4 + 2x^3 - 3x^2 = 0$

$x^2(-\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3) = 0$

$x = 0;\ x = 3$

Skizze:



Stammfunktion:

$F(x) = -\frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - x^3$

$\int_{0}^{3} (-\frac{1}{3}x^4 + 2x^3 - 3x^2)dx = -\frac{27}{10}$

$A = \frac{27}{10}$

Lehrbuch Seite 249

12 Giebelrand: $f(x) = \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4$ Symmetrie zur y-Achse

$2\int_0^4 f(x)dx = 2\left[\frac{1}{320}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + 4x\right]_0^4 \approx 17{,}07$

Farbverbrauch: $350 \cdot 17{,}07 = 5974{,}5$

$2 \cdot 5974{,}5\ cm^3 = 11{,}949$ Liter

Es müssen mindestens 3 Dosen Farbe geliefert werden.

(2 Dosen à 5 Liter und 1 Dose à 2 Liter)

Lehrbuch Seite 252

4 a) $f(x) = 0{,}5(x^2 - 1)$; $g(x) = -0{,}5x - 1$ kein Schnittpunkt

$\int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,dx = 4{,}67$; $A = 4{,}67$

b) K: $f(x) = -x^2 - 2x + 5$; $g(x) = 2$

Schnittstellen: $x = 0$ und $x = 1$

$\int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = \frac{5}{3}$; $A = \frac{5}{3}$

Lehrbuch Seite 254

1 a) $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = -x + 3$

Schnittstelle von K_f und K_g: $x_1 = 1$

$\int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = -\frac{7}{6}$; $\int_1^2 (f(x) - g(x))\,dx = \frac{11}{6}$

$A = \frac{7}{6} + \frac{11}{6} = 3$

b) $f(x) = x^3 - x$; $g(x) = 3x$

Schnittstellen von K_f und K_g: $x_1 = 0$; $x_{2|3} = \pm 2$

$\int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx = -4$

Wegen der Symmetrie der beiden Kurven zum Ursprung: $A = 8$

Lehrbuch Seite 272

3 a) $g(x) = f(x) + 3 = e^{-x} + 3$

Vergleich mit $g(x) = ae^{-x} + b$ ergibt: $a = 1$; $b = 3$

b) $g(x) = -f(x) = -e^{-x}$; $a = -1$; $b = 0$

c) $g(x) = 0{,}5\, f(x) - 6 = 0{,}5e^{-x} - 6$; $a = 0{,}5$; $b = -6$

d) $g(x) = e^{-(x-2)} = e^{-x+2} = e^2 \cdot e^{-x}$; $a = e^2$; $b = 0$

Bemerkung zu d): Eine horizontale Verschiebung lässt sich durch eine Streckung in y-Richtung (Faktor e^2) ersetzen.

Gemeinsame Eigenschaft: Alle Kurven haben eine waagrechte Asymptote.

Lehrbuch Seite 276

2 K_f: $f(x) = 2 - e^{-x}$; K verläuft vom 3. in das 1. Feld.

Die Gerade mit $y = 2$ ist waagrechte Asymptote von K_f.

$S_y(0 \mid 1)$; $S_x(-0{,}7 \mid 0)$

$f(-0{,}70) \approx -0{,}01 < 0$; $f(-0{,}69) = 0{,}006... > 0$; VZW von f(x) zwischen − 0,70 und − 0,69.

K_f entsteht aus dem Schaubild von g durch Spiegelung an der x-Achse ($y = -e^{-x}$) und Verschiebung um 2 nach oben ($y = -e^{-x} + 2$).

Lehrbuch Seite 280

2 a) $4 - e^{-x} = 0$

$e^{-x} = 4$

$x = -\ln(4)$

b) $e^{3x-2} - 5 = 0$

$e^{3x-2} = 5$

$3x - 2 = \ln(5)$

$x = \frac{1}{3}(\ln(5) + 2)$

c) $4\,e^{0,4x+2} - 6 = 0$

$e^{0,4x+2} = 1,5$

$0,4x + 2 = \ln(1,5)$

$x = \frac{5}{2}\ln(\frac{3}{2}) - 5$

d) $\frac{1}{4}(6 - e^{-x}) = 0$

$e^{-x} = 6$

$x = -\ln(6)$

e) $(x - 5)e^x = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x - 5 = 0$

$x = 5 \quad (e^x \neq 0)$

f) $-\frac{5}{3}x\,e^{4x} = 0$

Satz vom Nullprodukt: $-\frac{5}{3}x = 0$

$x = 0 \quad (e^{4x} \neq 0)$

Lehrbuch Seite 287

1 Reale Situation: In einem See von der Größe 8 ha wachsen Seerosen.

Reales Modell:

Die bedeckte Fläche nimmt wöchentlich um 30% zu. Anfangs sind 150 m^2 der Oberfläche bedeckt. Annahme: Die Zunahme erfolgt exponentiell. Die bedeckte Fläche nach t Wochen (t = 0 entspricht dem Beginn der Messung) soll durch eine Funktion beschrieben werden.

Mathematisches Modell:

$B(0) = 150$; $B(t)$: bedeckte Fläche in m^2;

Mit a = 1,30 ergibt sich $B(t) = 150 \cdot 1{,}30^t$

Dieser Funktionsterm beschreibt die bedeckte Fläche in Abhängigkeit von der Zeit t.

Mathematische Lösung:

$B(t) = 80000 \Rightarrow 150 \cdot 1{,}30^t = 80000 \Rightarrow 1{,}30^t = 533{,}33$

Logarithmieren: $\ln(1{,}30) \cdot t = \ln(533{,}33) \Rightarrow t = 23{,}93$

Bewertung: Die Wasserrose bedeckt die gesamte Fläche nach ca. 24 Wochen.

Exponentielles Wachstum ist also nur in den ersten 24 Wochen möglich.

Lehrbuch Seite 291

1 a) $f'(x) = (x + 1)e^x + 1 \cdot e^x = f'(x) = (x + 2)e^x$

b) $f'(x) = -0{,}25x^2 \cdot e^{-0{,}25x} + 2x \cdot e^{-0{,}25x} = e^{-0{,}25x}(-0{,}25x^2 + 2x)$

Lehrbuch Seite 293

3 $f(x) = e^{0{,}5x}(x - 3)$; $f'(x) = e^{0{,}5x}(0{,}5x - 0{,}5)$;

$f''(x) = e^{0{,}5x}(0{,}25x + 0{,}25)$

Wertemenge von f : $T(1 \mid -2e^{0{,}5})$;

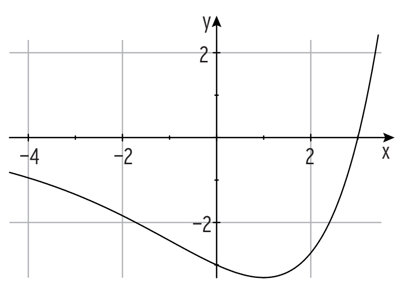
absolutes Minimum: $-2e^{0{,}5}$

$W_f = [-2e^{0{,}5}; \infty[$

$W(-1 \mid -4e^{-0{,}5})$; $f'(-1) = -e^{-0{,}5}$

Gleichung der Wendetangente:

$y = -e^{-0{,}5}(x + 1) - 4e^{-0{,}5} = -e^{-0{,}5}x - 5e^{-0{,}5}$



Lehrbuch Seite 308

1 b) $f(x) = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$

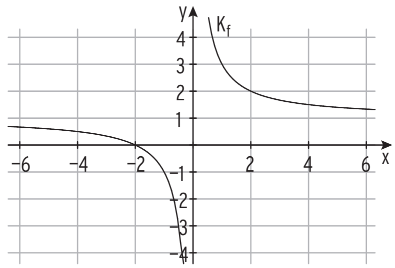
$D_{max} = \mathbb{R}\setminus\{0\} = \mathbb{R}^*$

N(− 2 | 0)

Kein Schnittpunkt mit der y-Achse

Senkrechte Asymptote: x = 0

Waagrechte Asymptote: y = 1



e) $f(x) = 2 - \frac{4}{1+x}$

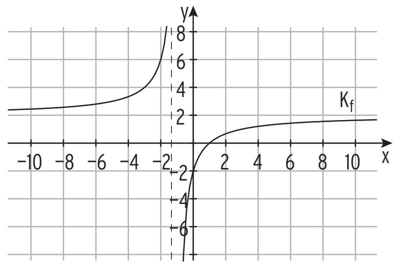
$D_{max} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

N(1 | 0)

$S_y(0 \mid -2)$

Senkrechte Asymptote: x = − 1

Waagrechte Asymptote: y = 2

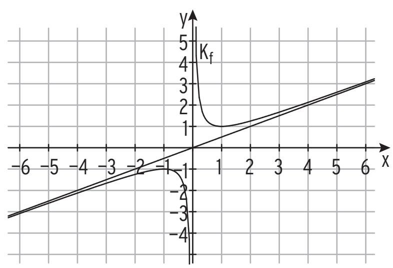


2 a) $f(x) = \frac{x^2+1}{2x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}$

$D_{max} = \mathbb{R}\setminus\{0\} = \mathbb{R}^*$

Senkrechte Asymptote: x = 0

Schiefe Asymptote: $y = \frac{1}{2}x$

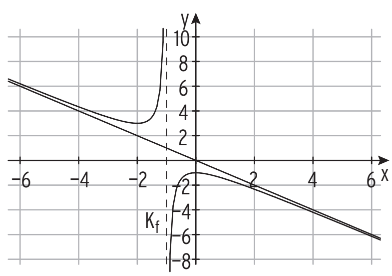


d) $f(x) = -x - \frac{1}{x+1}$

$D_{max} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Senkrechte Asymptote: x = − 1

Schiefe Asymptote: y = − x



Lehrbuch Seite 314

2 a) $K(x) = \frac{1}{8}x^3 - x^2 + \frac{7}{2}x + 20$

Gewinnschwelle $x_{GS} = 2$: $E(2) = K(2) = 24 \Rightarrow E(x) = 12x$

Gewinngrenze: $x_{GG} = 12{,}43$; $E(12{,}43) = 149{,}21 = K(12{,}43)$

$G(x) = E(x) - K(x) = 40$ für $x = 6 \vee x = 10$

b) Stückkosten $k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{1}{8}x^2 - x + \frac{7}{2} + \frac{20}{x}$; $k(2) = 12$

$k(x) = 12 \Rightarrow x = 12{,}43$

Hinweis: $k(x) = p \quad | \cdot x$ ergibt $k(x) \cdot x = p \cdot x$, also $K(x) = E(x)$

Die Lösungen von $k(x) = p$ sind die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze.

c) variable Stückkosten $k_v(x) = \frac{1}{8}x^2 - x + \frac{7}{2}$

Bedingung: $k_v(x) < 10 \Rightarrow 0 < x < 12{,}25$

Lehrbuch Seite 316

1 a) Ökonomisch sinnvoller Definitionsbereich

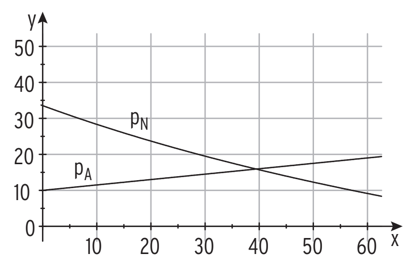
der Nachfragefunktion $p_N(x) = \frac{15900}{x + 170} - 60$

$p_N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 95$ ($x = 95$ ist Nullstelle von p_N)

$D_{ök} = [0; 95]$

Die Sättigungsmenge ist 95 ME

(Nullstelle von p_N).



Der Höchstpreis beträgt ca. 33,53 GE, da $p_N(0) \approx 33{,}53$.

b) Marktgleichgewicht: MGG(39,44 | 15,92)

Lehrbuch Seite 320

5 Produktivität: $p(x) = \frac{P(x)}{x} = -0{,}1x^2 + 0{,}8x + 0{,}1$; $0 < x \leq 7$

Scheitelpunkt des Schaubildes von p

x_S-Wert: $x_S = -\frac{-8}{2} = 4$

y_S-Wert: $y_S = p(4) = 1{,}7$

Scheitelpunkt: S(4 | 1,7)

Die maximale Produktivität beträgt 1,7 Tonnen Weizen pro Zentner Düngemittel.

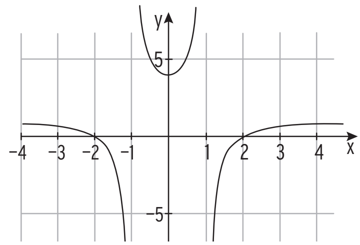
Lehrbuchseite 326

1 a) $f'(x) = \frac{2(3x+5) - (2x-3)\cdot 3}{(3x+5)^2} = \frac{19}{(3x+5)^2}$

d) $f'(x) = \frac{6(2x^2+1) - (6x-5)\cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{-12x^2+20x+6}{(2x^2+1)^2}$

Lehrbuchseite 329

5 a) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-1}$; $f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - (x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$



$f'(x) = \frac{6x}{(x^2-1)^2}$

$f''(x) = \frac{6(x^2-1)^2 - 2\cdot 6x\cdot(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{6(x^2-1) - 2\cdot 2x\cdot 6x}{(x^2-1)^3}$

$= \frac{-18x^2-6}{(x^2-1)^3}$

$N_{1|2}(\pm 2 \mid 0)$; $T(0 \mid 4)$

keine Wendepunkte

Lehrbuchseite 334

1 $p_1(x) = 5\cdot\frac{5-x}{x+2}$ und $p_2(x) = 0{,}9x + 1$; $x \in D_{ök}$

a) $p_1'(x) = \frac{-35}{(x+2)^2} < 0$; $p_1(x) = p_N(x)$ p_1 ist die Nachfragefunktion

$p_2'(x) = 0{,}9 > 0$; $p_2(x) = p_A(x)$ p_2 ist die Angebotsfunktion

Sättigungsmenge: $p_N(x) = 0$ für $x = 5$

Höchstpreis: $p_N(0) = 12{,}5$

ökonomisch sinnvoller Definitionsbereich für beide Funktionen: $D_{ök} = [0; 5]$.

b) $E(x) = 5x\cdot\frac{5-x}{x+2}$; $E'(x) = \frac{-5x^2 - 20x + 50}{(x+2)^2}$

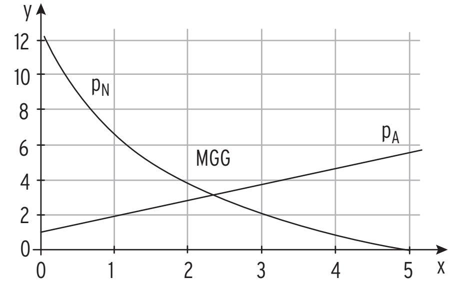
erlösmaximale Menge: 1,74

maximaler Erlös E(1,74) = 7,58

c) $5\cdot\frac{5-x}{x+2} = 0{,}9x + 1$

Gleichgewichtsmenge $x_G = 2{,}32$

Gleichgewichtspreis $p_G = 3{,}09$



Lehrbuch Seite 342

1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

b) $2A - B = 2\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -8 & 4 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & -2 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 5 \\ -4 & 15 & 3 \\ 3 & -3 & 10 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & -2,5 & 0,5 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1,5 & 0 & 5,5 \end{pmatrix}$

d) $3A - 4B = 3\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -12 & 6 \\ -6 & 15 & 9 \\ 0 & -3 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 0 & -20 & 12 \\ -12 & 4 & 16 \end{pmatrix}$

$3A - 4B = \begin{pmatrix} -5 & -8 & 10 \\ -6 & 35 & -3 \\ 12 & -7 & 5 \end{pmatrix}$

e) $\vec{x} - \vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

f) $2\vec{x} + 3\vec{y} = 2\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 348

1 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = (2 \;\; 3 \;\; -4)$

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 & 5 \\ 15 & -6 & -28 \\ -17 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ Berechnung im Schema

b) $B \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}$

c) $B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -2 & 10 \\ 5 & -14 & -2 \\ -6 & 18 & 21 \end{pmatrix}$ Berechnung im Schema

d) $(A + E) \cdot B = \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & -5 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$(A + E) \cdot B = \begin{pmatrix} -6 & -12 & 6 \\ 18 & -6 & -29 \\ -19 & 4 & 15 \end{pmatrix}$

e) $\frac{1}{20} \cdot A \cdot \vec{a} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 0 \\ -0{,}45 \end{pmatrix}$

f) $\vec{b} \cdot A = (2 \;\; 3 \;\; -4) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} = (1 \;\; 20 \;\; -19)$

g) $\vec{b} \cdot B \cdot A = (2 \;\; 3 \;\; -4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} = (19 \;\; -16 \;\; -21) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$\vec{b} \cdot B \cdot A = (54 \;\; 16 \;\; 59)$

h) $\vec{b} \cdot \vec{a} = (2 \;\; 3 \;\; -4) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Lehrbuch Seite 349

11 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1. Spalte und 2. Zeile bleibt erhalten

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

15 a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 210 & 120 \\ 180 & 220 \\ 320 & 300 \end{pmatrix}$

Maschinenlaufzeiten der Automaten je Arbeitsperiode:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1600 & 1500 \\ 1640 & 1640 \\ 1390 & 1380 \end{pmatrix}$$

Automat I braucht für die Produktion von 210 E_1, 180 E_2 und 320 E_3

in Periode I:

$210 \cdot 2 + 180 \cdot 3 + 320 \cdot 2 = 1600$ (Minuten)

In Periode I läuft Automat I 1600 Minuten, Automat II 1640 Minuten und

Automat III 1390 Minuten.

In Periode II läuft Automat I 1500 Minuten, Automat II 1640 Minuten und

Automat III 1380 Minuten.

b) Maschinenlaufzeit in Periode I: 4630 Minuten.

Maschinenlaufzeit in Periode II: 4520 Minuten.

Auslastung in Periode I: $\frac{4630}{7200} \cdot 100\% = 64{,}3\%$

Auslastung in Periode II: $\frac{4520}{6000} \cdot 100\% = 75{,}3\%$

Lehrbuch Seite 356

1 a)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & -7 \\ 3 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot(-2),\ + \\ \cdot 2,\ + \cdot(-3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & 5 & 23 \end{array}\right) \quad + \cdot 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 20 & 80 \end{array}\right)$$

Dreiecksform

Letzte Gleichung: $20x_3 = 80$

$x_3 = 4$

Einsetzen von $x_3 = 4$ in die zweite Gleichung $3x_2 + 5x_3 = 11$: $3x_2 + 5 \cdot 4 = 11$

$x_2 = -3$

Einsetzen von $x_3 = 4$ und $x_2 = -3$ in die erste Gleichung $2x_1 + x_2 - x_3 = -3$: $2x_1 - 3 - 4 = -3$

$x_1 = 2$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot(-3),\ + \\ \cdot 2,\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & 4 & 6 & 11 \end{array}\right) \quad +$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

Letzte Gleichung: $-2x_3 = -5 \Rightarrow x_3 = 2{,}5$

Einsetzen von $x_3 = 2{,}5$ ergibt: $-4x_2 - 8 \cdot 2{,}5 = -16 \Rightarrow x_2 = -1$

Einsetzen von $x_3 = 2{,}5$ und $x_2 = -1$: $x_1 - 1 + 2 \cdot 2{,}5 = 5 \Rightarrow x_1 = 1$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 363

1 a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Berechnung der Inversen

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot 2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right) \cdot (-7)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right) \mid :2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Berechnung der Inversen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot (-2) \quad \cdot 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \cdot (-4) \quad \cdot 4 \quad \cdot (-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 8 & 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 24 & 0 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \cdot 3 \quad \cdot (-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 24 & 0 & 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & 24 & 0 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \mid \cdot 6$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 24 & 0 & 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & 24 & 0 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 24 & -6 & 6 & 12 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 8 & 0 & -8 \\ 7 & -3 & 2 \\ -6 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Lehrbuch Seite 375

3 A: Rohstoff-Steckteile-Matrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

B: Steckteile-Endprodukt-Matrix: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

C: Rohstoff-Endprodukt-Matrix:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 & 16 \\ 7 & 9 & 13 & 22 \\ 3 & 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Lehrbuch Seite 381

2 a) Für die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C gilt: $A \cdot B = C$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 11 & 33 \\ 8 & 22 \end{pmatrix}$$

Tabelle:

	M_1	M_2
R_1	7	15
R_2	11	33
R_3	8	22

b) Aus $B \cdot \vec{x} = \vec{z}$ folgt $B \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 1700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10500 \\ 7100 \\ 7400 \end{pmatrix}$

Es müssen 10500 ME S_1, 7100 ME S_2 und 7400 ME S_3 vorrätig sein.

c) Aus $A \cdot \vec{z} = \vec{r}$ folgt: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 660 \\ 1140 \\ r_3 \end{pmatrix}$

Ausmultiplizieren ergibt ein lineares Gleichungssystem:

$s_1 + 2s_2 + 2s_1 = 660$

$4s_1 + 3s_2 + 2s_1 = 1140$

$s_1 + 5s_2 + s_1 = r_3$

Vereinfacht: $3s_1 + 2s_2 = 660$ I) $\cdot 2$

$6s_1 + 3s_2 = 1140$ II) $\cdot(-1)$

$2s_1 + 5s_2 - r_3 = 0$ III)

Auflösung ergibt: $s_2 = 180$

Einsetzen z. B. in Gleichung I) ergibt $s_1 = 100$.

Einsetzen in Gleichung III) ergibt $r_3 = 1100$.

Das LGS ist eindeutig lösbar mit $s_1 = 100$; $s_2 = 180$; $r_3 = 1100$

Es müssen 100 ME S_1, 180 ME S_2 und 100 ME S_3 vorrätig sein.

Vom Rohstoff R_3 müssen 1100 ME bestellt werden.

Lehrbuch Seite 391

2 $A = A_{RB}$; $B = B_{BE}$; $C = C_{RE}$

a) $A \cdot B = C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

b) LGS: $B \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 42 \\ 51 \end{pmatrix}$ Auflösung ergibt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}$

c) $C \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ t \\ t \end{pmatrix}$, dabei ist t jeweils der Rohstoffvorrat von R_2 und von R_3

$(C \mid \vec{r}\,) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 100 \\ 9 & 3 & t \\ 5 & 5 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 100 \\ 0 & 15 & 900 - 4t \\ 0 & -5 & 500 - 4t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 100 \\ 0 & 15 & 900 - 4t \\ 0 & 0 & 2400 - 16t \end{array}\right)$

Das LGS ist lösbar für $2400 - 16t = 0 \Leftrightarrow t = 150$.

Von R_2 und R_3 benötigt man 150 ME.

Lösung des LGS: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$

Dann müssen 20 ME E_2 und 10 ME E_1 produziert werden.

Alternative: LGS für die Unbekannten x_1, x_2 und y:

$4x_1 + 3x_2 = 100 \wedge 9x_1 + 3x_2 - y = 0 \wedge 5x_1 + 5x_2 - y = 0$

Lösung ergibt: $x_1 = 10$; $x_2 = 20$; $y = 150$

d) Variable Kosten: $K_v = (\vec{k}_R \cdot C + \vec{k}_B \cdot B + \vec{k}_E) \cdot \vec{x}$

$= (13{,}7 \quad 10{,}9)\begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix} = 1230$

Durchschnittliche variable Kosten in GE/ME: $\frac{1230}{100} = 12{,}30$

Lehrbuch Seite 408

2 Häufigkeitstabelle

a_i	0	1	2	3	4	6
n_i	16	26	20	12	4	2

$\bar{x} = 1{,}625$ Varianz $s^2 = 1{,}73$ Standardabweichung $s = 1{,}32$

Lehrbuch Seite 432

1 a) Zweimal Ziehen **mit** Zurücklegen

e_i	ww	ws	wr	sw	ss	sr	rw	rs	rr
P	$\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}=\frac{1}{4}$	$\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{20}$	$\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{10}=\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{1}{25}$

b) P(gleiche Farbe) = P(ww) + P(ss) + P(rr) = $\frac{1}{4}+\frac{9}{100}+\frac{1}{25}=0{,}38$

c) P(wr) = $\frac{1}{10}$

d) Zweimal Ziehen **ohne** Zurücklegen

e_i	ww	ws	wr	sw	ss	sr	rw	rs	rr
P	$\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$	$\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{1}{6}$	$\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{45}$

P(gleiche Farbe) = P(ww) + P(ss) + P(rr) = $\frac{2}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{45}=\frac{14}{45}=0{,}311$

P(wr) = $\frac{1}{9}$

Lehrbuch Seite 438

6 X: Auszahlungsbetrag   Bezeichung: L für leeres Feld

e_i	LL	AL, LA	AA	AB, BA	BB	BL, LB
x_i	0	6	12	8	4	2
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{16}\cdot\frac{9}{15}=\frac{3}{8}$	$2\cdot\frac{2}{16}\cdot\frac{10}{15}=\frac{1}{6}$	$\frac{2}{16}\cdot\frac{1}{15}=\frac{1}{120}$	$2\cdot\frac{2}{16}\cdot\frac{4}{15}=\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{3}$

Lehrbuch Seite 448

5 a) $\binom{5}{4}\cdot 0{,}4^4\cdot 0{,}6^1 = P(X = 4) = 0{,}0768$; X ist binomialverteilt mit n = 5; p = 0,4

b) $\binom{15}{4}\cdot 0{,}3^4\cdot 0{,}7^{11} = P(X = 4) = 0{,}2186$; X ist binomialverteilt mit n =15; p = 0,3

c) $\binom{50}{10}\cdot 0{,}1^{10}\cdot 0{,}9^{40} = P(X = 10) = 0{,}0152$;

X ist binomialverteilt mit n = 50; p = 0,1

d) $\binom{100}{44}\cdot 0{,}2^{44}\cdot 0{,}8^{56} = P(X = 44) = 3{,}25\cdot 10^{-8} \approx 0$

X ist binomialverteilt mit n = 100; p = 0,2; X ist $B_{100;\,0{,}2}$-verteilt

Lehrbuch Seite 452

2 Berechnung mit Hilfsmittel

a) X ist $B_{5;\,0,5}$- verteilt

$P(X = 3) = B_{5;\,0,5}(3) = 0,3125$

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,0313 + 0,1563 = 0,1876$

oder direkt mit dem WTR.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - B_{5;\,0,5}(0) = 1 - 0,0313 = 0,9687$

b) X ist $B_{20;\,0,2}$- verteilt

$P(X = 4) = B_{20;\,0,2}(4) = 0,2182$

$P(X \leq 1) = 0,0692$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0,0692 = 0,9308$

$P(2 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 1) = 0,9133 - 0,0692 = 0,8441$

c) X ist $B_{200;\,0,05}$- verteilt

$P(X = 25) = B_{200;\,0,05}(25) = 1,7 \cdot 10^{-5}$

$P(X \leq 1) = 4,04 \cdot 10^{-4}$

$P(20 < X < 45) = P(X \leq 44) - P(X \leq 20) = 1 - 0,9988 = 0,0012$

$P(10 \leq X < 15) = P(X \leq 14) - P(X \leq 9) = 0,92187 - 0,45471 = 0,46716$

Lehrbuch Seite 457

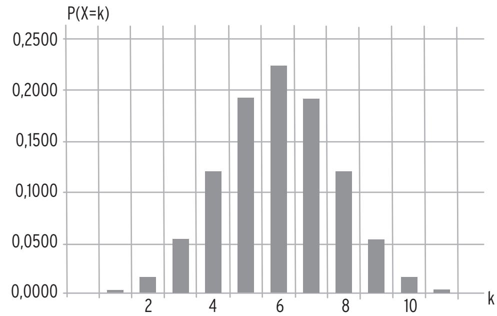
1 a) $p = 0{,}5$; $n = 12$:

$\mu = 6$; $\sigma = 1{,}73$

E(X) = 6

Größte Warscheinlichkeit:

P(X = 6) = 0,2256

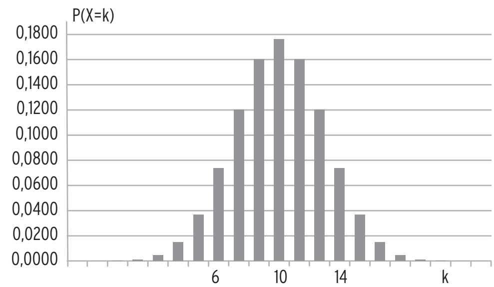


$p = 0{,}5$; $n = 20$: $\mu = 10$; $\sigma = 2{,}24$

E(X) = 10

Größte Wahrscheinlichkeit

P(X = 10) = 0,1762



b) $n = 50$; $p = 0{,}25$: $\mu = 12{,}5$; $\sigma = 3{,}06$

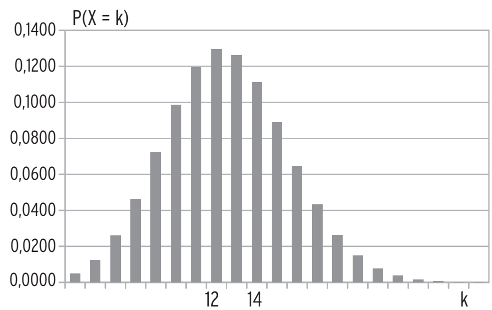
E(X) = 12,5

Größte Wahrscheinlichkeit

P(X = 12) = 0,1294

P(X = 13) = 0,1261

P(X = 12) ist das Maximum.

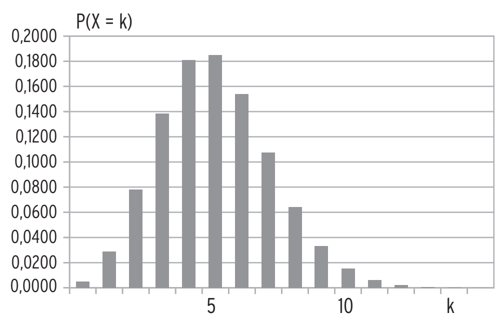


$n = 50$; $p = 0{,}1$: $\mu = 5$; $\sigma = 2{,}12$

E(X) = 5

Größte Wahrscheinlichkeit

P(X = 5) = 0,1849



Lehrbuch Seite 457

3 X: Anzahl der defekten Dichtungen; X ist $B_{500;\,0,05}$-verteilt

a) E(X) = 25

b) $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 4{,}87$

$\mu - \sigma = 20{,}13$ $\mu + \sigma = 29{,}87$

ganzzahlige Werte in dem Intervall [20,13; 29,87] sind 21, ... , 29.

$P(20{,}13 \leq X \leq 29{,}87) = P(21 \leq X \leq 29) = 0{,}8235 - 0{,}1789 = 0{,}6446$

c) Berechnungen mit Hilfsmittel:

X ist $B_{50;\,0,05}$-verteilt;

$P(A) = P(X = 0) = 0{,}0769$

$P(B) = P(X \leq 3) = 0{,}7604$

$P(C) = P(X > 35) = 1 - P(X \leq 35) = 0$

$P(D) = P(4 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3) = 0{,}9882 - 0{,}7604 = 0{,}2278$