Ott
Schomburg

Abitur 2023

Aufgabensammlung zur zentralen schriftlichen Abiturprüfung
Berlin/Brandenburg

Mathematik

erhöhtes Anforderungsniveau – Leistungskurs

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Wolfgang Schomburg
Studium der Mathematik an der Technischen Universität zu Berlin

* * * * *

5. Auflage 2022

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0644-05
ISBN ISBN 978-3-8120-0644-6

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung für Berlin und Brandenburg enthält auf die neue Prüfungsordnung für die gymnasiale Oberstufe abgestimmte Aufgaben zur Vorbereitung auf die schriftliche Abiturprüfung 2023 im Fach Mathematik.

Der aktuellen Entwicklung geschuldet ist eine veränderte Struktur der schriftlichen Prüfungsklausuren für das Fach Mathematik **im Abitur 2023**:

- Der Umfang der Prüfungsklausuren bleibt unverändert. Im Leistungskursfach müssen Aufgaben im Umfang von 120 Bewertungseinheiten bearbeitet werden.
- Der Anteil des hilfsmittelfreien Aufgabenteils bleibt unverändert bei 25 % der Bewertungseinheiten.
- Die Bearbeitungszeiten bleiben unverändert bei 330 Minuten (eA/LK), jeweils einschließlich Auswahlzeit.

Verändert werden der Auswahlmodus und der Umfang der einzelnen Aufgaben zu den Sachgebieten. Der Auswahlmodus enthält nun eine vorgeschaltete **„Auswahl durch die unterrichtende Lehrkraft“.** Dadurch werden das thematische Spektrum der zu bearbeitenden Aufgaben und die Auswahlmöglichkeiten für die Schülerinnen und Schüler beschränkt.

Die zentrale Abiturprüfung ab 2019 besteht aus zwei Teilen,
einem hilfsmittelfreien Prüfungsteil (ohne Formelsammlung, Taschenrechner, CAS-Gerät)
und einem Prüfungsteil mit Hilfsmittel (Formelsammlung und Taschenrechner/CAS).
Die Aufgaben für den **Leistungskurs bzw. das erhöhte Anforderungsniveau** sind gegliedert nach den Prüfungsgebieten: Analysis, Stochastik und Analytische Geometrie.
Die Zentralen Abiturprüfungen Berlin (LK) und Brandenburg (eA) der Jahre 2016 und 2018 wurden ergänzt und verändert, um in Umfang und Schwierigkeit der Abiturprüfung 2023 zu entsprechen.
Die Zentralen Abiturprüfungen für den Leistungskurs (Berlin) bzw. für das erhöhte Anforderungsniveau (Brandenburg) waren die letzten Jahre großteils identisch, ab 2018 vollkommen übereinstimmend. Daher ist es sinnvoll eine gemeinsame Aufgabensammlung anzubieten.
Die Original-Abituraufgaben ab 2019 werden in der Aufgabensammlung behandelt und ausführlich gelöst.
Diese Einteilung nach Prüfungsgebieten ermöglicht ein gezieltes Üben.
Insgesamt sind die Aufgaben als Übungsaufgaben zu verstehen, sowohl im Umfang und auch in den Fragestellungen. Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.
Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.
Da die Aufgabensammlung allen Schüler/innen bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben schülergerechte und ausführliche Lösungen angegeben. An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.
Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Veränderte Struktur der schriftlichen Prüfungsklausuren im Abitur 2023

Erhöhtes Anforderungsniveau (eA) — Leistungskurs (LK)

Die insgesamt zu erreichenden 120 Bewertungseinheiten verteilen sich folgendermaßen auf die beiden Prüfungsteile und die drei Sachgebiete:
Aufgabenstellung 1 (Hilfsmittelfreier Aufgabenteil): 30 BE (85 Minuten)
Das Aufgabenset für SuS enthält 4 Aufgaben zur Analysis (je 5 BE) und zwei Aufgaben (je 5 BE) zu einem Sachgebiet (Stochastik oder Analytische Geometrie)
Aufgabenstellung 2 (komplexe Aufgaben zu den Sachgebieten: 90 BE (245 Minuten)
Das Aufgabenset für SuS enthält 2 Aufgaben zur Analysis (je 50 BE) und eine Aufgabe (40 BE) zu einem Sachgebiet (Stochastik oder Analytische Geometrie)

<table>
<tr><th></th><th>Vorbereitete Prüfungsaufgaben</th><th>Auswahl durch die Lehrkraft</th><th>Aufgabenset für die SuS</th><th>Wahl durch die SuS</th><th>BE/Zeit</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Aufgabenstellung 1 (Hilfsmittelfreier Aufgabenteil)</td><td>4 Aufgaben zur Analysis (je 5 BE)</td><td>keine</td><td>4 Aufgaben zur Analysis</td><td rowspan="3">keine</td><td rowspan="3">30 BE (70 Minuten + 15 Minuten)</td></tr>
<tr><td>2 Aufgaben zur Analytische Geometrie (je 5 BE)</td><td rowspan="2">2 Aufgaben zu einem Sachgebiet</td><td rowspan="2">2 Aufgaben zu einem anderen Sachgebiet</td></tr>
<tr><td>2 Aufgaben zur Stochastik (je 5 BE)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Aufgabenstellung 2 (komplexe Aufgaben zu den Sachgebieten)</td><td>2 Aufgaben zur Analysis 50 BE</td><td>keine</td><td>2 Aufgaben zur Analysis</td><td>1 Aufgabe muss ausgewählt werden</td><td rowspan="3">50 BE + 40 BE (245 Minuten einschl. Auswahlzeit)</td></tr>
<tr><td>1 Aufgabe zur Analytische Geometrie 40 BE</td><td rowspan="2">1 Aufgabe zu einem Sachgebiet</td><td rowspan="2">1 Aufgabe zu einem anderen Sachgebiet</td><td rowspan="2">keine</td></tr>
<tr><td>1 Aufgabe zur Stochastik 40 BE</td></tr>
</table>

Die Gesamtbearbeitungszeit beträgt 330 Minuten. Sie beinhaltet eine individuelle Lese- und Auswahlzeit für die Prüflinge, die 30 Minuten nicht überschreiten sollte.
Die Abiturprüfung beginnt mit der Bearbeitung der Aufgabenstellung 1 zum hilfsmittelfreien Teil in einem Umfang von 85 Minuten.
Hinweis: Hier gibt es keine Wahlmöglichkeiten für SuS. Die Aufgabenstellung und die Lösung zum hilfsmittelfreien Teil werden spätestens nach 85 Minuten abgegeben.
Eine frühere Abgabe ist möglich. Prüflinge, die für die Aufgabenstellung 1 weniger Zeit benötigen, können bereits mit der Bearbeitung der weiteren Wahlaufgaben beginnen, vorerst ohne die Nutzung von Hilfsmitteln.
Nach der **vollständigen Abgabe der Lösungen der Aufgabenstellung 1** durch alle Prüflinge beginnt mit der Nutzung von Formelsammlung und Rechner bzw. CAS-Rechengerät die weitere Arbeit an den Aufgaben.
Hinweis für das Abitur 2023: *Wenn eine Schule sich z.B. für Vektorgeometrie und gegen Stochastik entschieden hat, dann fliegt die Stochastik aus dem hilfsmittelfreien Teil und aus den weiteren Aufgabenstellungen heraus! In der Aufgabensammlung werden die beiden Gebiete jedoch gleichwertig behandelt.*

I Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung eA/LK

Übungsaufgaben zur Aufgabenstellung 1 Analysis

Aufgabe 1 **Lösungen Seite 22/23**

a) Die Funktion g erfüllt folgende Bedingungen: $g'(3) = 2$

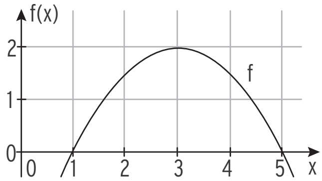
$g''(3) = 0$

$g'''(3) \neq 0$

Welche Aussagen lassen sich damit über das Schaubild der Funktion g treffen

b) Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = e^{2 \cdot x} - 4 \cdot x; x \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie den Punkt, an dem das Schaubild von h eine waagrechte Tangente hat.
Ermitteln Sie eine Stammfunktion von h, deren Schaubild durch den Punkt $P(1 \mid 0)$ verläuft.

c) Die Abbildung zeigt den Graphen einer quadratischen Funktion f.



c1) Geben Sie eine Gleichung der Funktion f an.

c2) Gegeben sind die beiden Terme

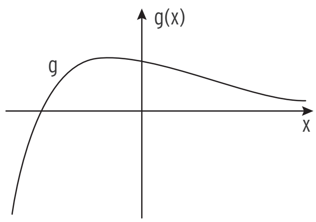
(I) $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$ und (II) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{f(4) - f(x)}{4 - x}$; $x \neq 4$

Beschreiben Sie ihre jeweilige Bedeutung in Bezug auf den Graphen von f.

c3) Veranschaulichen Sie den Wert des Terms $4 \cdot 2 - \int_1^5 f(x)dx$.

Aufgabe 2

Die Abbildung zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten, differenzierbaren Funktion g.
Betrachtet wird eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f, für deren erste Ableitungsfunktion $f'(x) = e^{g(x)}$ gilt.

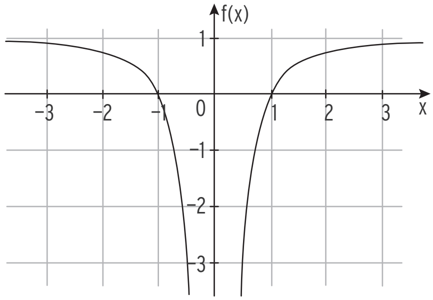


a) Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Extrempunkt hat.

b) Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Wendepunkt hat.

Aufgabe 3 **Lösungen Seite 23/24**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$; $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, die die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat. Die Abbildung zeigt den Graphen von f , der symmetrisch bezüglich der Ordinatenachse ist. Weiterhin ist die Gerade g mit $g(x) = -3$ gegeben.



a) Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x-Koordinate $\frac{1}{2}$ hat.

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die Abszissenachse und die Gerade g einschließen.

Aufgabe 4

K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^{x-3} - 2$.
Die Tangente an K an der Stelle $x = 3$ schneidet die Asymptote von f in S.

Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{2} (x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)dx$.

Interpretieren Sie den Integralwert mithilfe geeigneter Flächenstücke.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 2x$.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

Aufgabe 7

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4e^{2x} - 2$.
Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(0{,}5) = -1$.

Aufgabe 8 **Lösungen Seite 25/26**

Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:

(1) $f(2) = 1$ (2) $f'(2) = 0$

(3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$ (4) Für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 5$

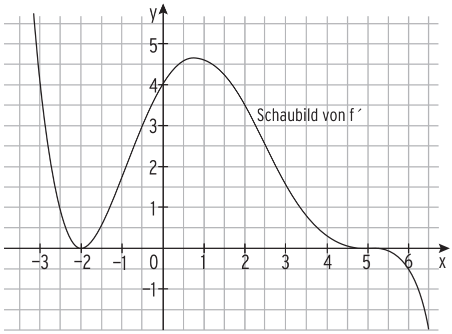
Beschreiben Sie für jede dieser vier Eigenschaften, welche Bedeutung sie für den Graphen von f hat. Skizzieren Sie eine möglichen Verlauf des Graphen.

Aufgabe 9

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$.

Aufgabe 10

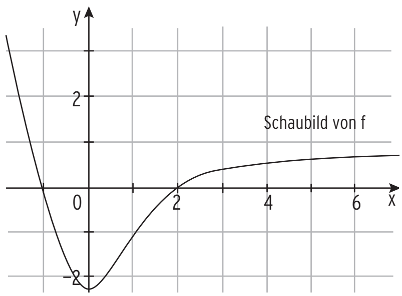
Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f′ einer Funktion f. Geben Sie für jeden der folgenden Sätze an, ob er richtig, falsch oder nicht entscheidbar ist. Begründen Sie jeweils ihre Antwort.



1. Das Schaubild von f hat bei $x = -2$ einen Tiefpunkt.
2. Das Schaubild von f hat für $-3 \leq x \leq 6$ genau zwei Wendepunkte.
3. Das Schaubild von f verläuft im Schnittpunkt mit der y-Achse steiler als die erste Winkelhalbierende
4. $f(0) > f(5)$

Aufgabe 11

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f. F ist eine Stammfunktion von f.

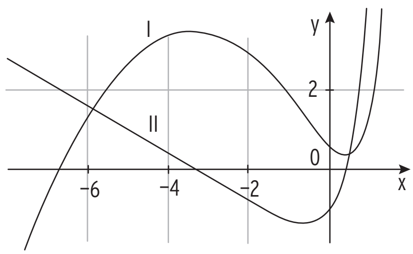


a) Machen Sie Aussagen über F im Bereich $-2 < x < 7$ hinsichtlich Extremstellen, Wendestellen, Nullstellen. Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Begründen Sie, dass $F(6) - F(2) > 1$ gilt.

c) Bestimmen Sie näherungsweise: $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

Aufgabe 12



Die Abbildung zeigt die Graphen einer Funktion und der zugehörigen Ableitungsfunktion. Entscheiden Sie, welcher der Graphen I und II die Ableitungsfunktion darstellt.

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösungen – Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

Lösungen – Stochastik Übungsaufgaben

Aufgabe 1 *Lösungen der Aufgaben Seite 38*

a) Spätestens beim 4. Zug zieht man eine rote Kugel. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis beträgt $p = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

Die Wahrscheinlichkeit höchstens drei Kugeln zu ziehen, beträgt somit $1 - p = \frac{19}{20}$.

b) $p = 0{,}5$; viermalige Durchführung: $n = 4$; X: Anzahl der Treffer

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}5^4 = 1 - \frac{1}{16} < 1 - \frac{1}{20} = 0{,}95$

Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Experiment bei 4-maliger Durchführung mindestens einmal gelingt, nicht mehr als 95 %.

c)

1) Ermitteln der Sektorenanzahlen:

5% von 360° sind 18°, es müssen daher drei blaue Sektoren enthalten sein.

$\frac{1}{3}$ von 360° sind 120°, damit müssen 20 gelbe Sektoren vorhanden sein.

Die restlichen der insgesamt 60 Sektoren, also 37, müssen rot sein.

2) Für die Kosten K, die dem Landwirt pro Dreh entstehen, gilt:

$K = 1 - 0{,}05 \cdot 15 - \frac{1}{3} \cdot 1{,}50 = -0{,}25$

Der Landwirt hat pro Dreh mit Kosten von 0,25 € zu rechnen.

Aufgabe 2

a) $P(\{2; 0; 1{,}9\}) = (\frac{1}{5})^3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{625}$

b) Summe größer oder gleich 11 bei zwei Drehungen {9; 9} oder {2; 9} oder {9; 2}:

$P(\text{Summe} \geq 11) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{25}$

Aufgabe 3 *Lösungen der Aufgabe Seite 39*

a) 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

$P(\text{keine gelbe Kugel}) = 0{,}8^3 = \frac{64}{125} = 0{,}512$

b) 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen

$P(\text{gleiche Farbe}) = P(rr) + P(ww) + P(gg)$

$P(\text{gleiche Farbe}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{14}{45}$

Aufgabe 4 *Lösungen der Aufgaben Seite 39*

a) $P(A) = \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$ A: Nils zieht 3 Gewinnlose.

b) $P(B) = \binom{14}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{12} + \binom{14}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{11}$

B: Nils zieht 2 oder 3 Gewinnlose.

c) $P(C) = 1 - \binom{14}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{14}$ C: Nils zieht mindestens ein Gewinnlos.

d) $14 \cdot 0{,}05$ Durchschnittlich zu erwartende Anzahl von Gewinnlosen unter 14 Losen

Aufgabe 5

X ist binomialverteilt mit n = 10; p = 0,8

a) $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

Ablesen ergibt den Näherungswert: $0{,}30 + 0{,}27 + 0{,}11 = 0{,}68$

b) $P(X = 0) = 0{,}2^{10}$

Abschätzung: $0{,}2^{10} = \left(\frac{2}{10}\right)^{10} = \frac{2^{10}}{10^{10}} = \frac{1024}{10\,000\,000\,000} = \frac{1{,}024}{10\,000\,000}$

$0{,}2^{10} = \frac{0{,}1024}{1\,000\,000} < \frac{1}{1\,000\,000}$

Aufgabe 6 *Lösungen der Aufgaben Seite 40*

a) $P(X = 4) = 1 - 0{,}3 - 0{,}5 = 0{,}2$

Erwartungswert von X: $E(X) = 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}5 = 4{,}4$

b) Das Produkt 12 kann hier auf zwei Möglichkeiten erreicht werden: 2;6 und 6;2.

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit:

$P(12) = 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}30$

Aufgabe 7

a) Ereignis A: Man verliert von 10 Spielen mindestens acht.

b) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der verlorenen Spiele an. X ist binomialverteilt

mit $n = 4$ und $p = \frac{2}{3}$: $P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$

Mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{8}{27}$ verliert er dabei genau zwei Mal.

Hinweis: $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ oder $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$

Aufgabe 8 *Lösungen der Aufgaben Seite 40*

P(drei verschiedene Zahlen) = $0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 6 = 0{,}18 = \frac{9}{50}$

P(dreimal die „1") = 0,008

Erwartungswert für den Gewinn:

$E = 100 \cdot 0{,}008 \quad + 0{,}18 \cdot 1 - 1 = -0{,}02$

Dieses Spiel ist nicht fair.

Aufgabe 9 *Lösungen der Aufgaben Seite 41*

FF: falsche Form; RF: richtige Form

FG: fehlerhaftes Gewinde; RG: fehlerfreies Gewinde

Gegeben: $P(FF) = 0{,}05$; $P_{FF}(FG) = 0{,}4$; $P(RF \cap RG) = 0{,}90$

Gesucht: $P_{FG}(FF)$

$P_{FF}(FG) = 0{,}4$ $\quad P_{FF}(FG) = \frac{P(FF \cap FG)}{P(FF)} = 0{,}4$

$P(FF \cap FG) = 0{,}05 \cdot 0{,}4 = 0{,}02$

Aufstellen einer Vierfeldertafel:

	FF	RF	gesamt
FG	0,02	0,05	0,07
RG	0,03	0,90	0,93
gesamt	0,05	0,95	1

$P_{FG}(FF) = \frac{P(FF \cap FG)}{P(FG)} = \frac{0{,}02}{0{,}07} = \frac{2}{7}$

Aufgabe 10

1 Ziehen mit Zurücklegen; P(einwandfrei) = 0,9; P(defekt) = 1 – 0,9 = 0,1

$P(E_1) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$

$P(E_2) = 3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}027$ $\quad (dd\bar{d}, \bar{d}dd, d\bar{d}d)$

2 Es git für die Standardabweichung $\quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Einsetzen: $\quad 3 = \sqrt{n \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}$

Quadrieren $\quad 9 = n \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9$

$9 = n \cdot 0{,}09$

$n = \frac{9}{0{,}09} = \frac{9}{\frac{9}{100}} = \frac{900}{9} = 100$

Der Stichprobenumfang beträgt n = 100.

Hinweis: $\quad 9 = n \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 \quad | \cdot 100$

$900 = n \cdot 1 \cdot 9$

Aufgabe 11 *Lösungen der Aufgaben Seite 41*

Trefferquote p = 0,8 ; P(Zwei Treffer in den ersten beiden Würfen) = $0{,}8^2 = 0{,}64$

Ereignis A: Er wirft 10 Mal daneben

Ereignis B: Er trifft bei 50 Würfen genau 40 Mal.

Aufgabe 12

X: Anzahl der defekten Smartphones unter 50 Smartphones; X ist $B_{50;0,04}$ – verteilt

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$$= \binom{50}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}04^1 \cdot 0{,}96^{49}$$

Aufgabe 13

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit n = 10 und p = 0,6.

a) E(X) = 6; Größte Wahrscheinlichkeit bei X = 6; Abb. 3 zeigt die Verteilung

b) $P(4 < X < 7) = P(X = 5) + P(X = 6) = 0{,}2 + 0{,}25 = 0{,}45$

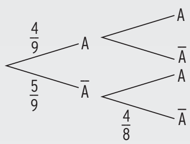
$P(X \neq 5) = 1 - P(X = 5) = 0{,}8$

Aufgabe 14 *Lösungen der Aufgaben Seite 42*

a) Ziehen ohne Zurücklegen

Es wird nur zwischen Assen und „Nicht-Assen“ unterschieden. Bei der ersten Ziehung sind 5 von 9 Karten „Nicht-Asse“, bei der zweiten Ziehung sind 4 von 8 Karten „Nicht-Asse“).

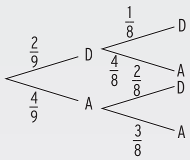
$P(A) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$



Das Ereignis B enthält die beiden Ergebnisse

„erst Dame (D) dann Ass (A)“ und „erst Ass dann Dame“.

$P(B) = P(DA) + P(AD) = \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{9}$



b) Falls gleich beim ersten Mal ein Ass aufgedeckt wird, gilt X = 1.

Da spätestens die sechste Karte ein Ass sein muss (wenn davor die drei Könige und die zwei Damen aufgedeckt werden) kann X maximal den Wert 6 annehmen.

X kann also die Werte von 1, 2, 3, 4, 5, 6 annehmen.

$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{13}{18}$

Aufgabe 15

P(„Wappen“) = p.

a) $P(A) = \binom{5}{3} \cdot p^3 \cdot (1 - p)^2$

$P(B) = p^2 \cdot 3 \cdot p \cdot (1 - p)^2$

b) P(dreimal „Wappen“) = $p^3 = 0{,}216 \Rightarrow p = 0{,}6 > 0{,}5$ ($6^3 = 216$)

Das Ergebnis „Wappen“ ist wahrscheinlicher als das Ergebnis „Zahl“.

Aufgabe 16 *Lösungen der Aufgaben Seite 42*

P(A) = 20 % = 0,2

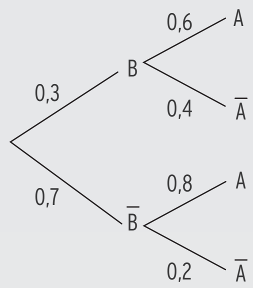
n = 40: $P(X = 8) = \binom{40}{8} \cdot 0{,}2^8 \cdot 0{,}8^{32}$

Aufgabe 17

a) $P(\overline{A}) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}26$

b) Vierfeldertafel

	A	$\overline{A}$	
B	0,18	0,12	0,3
$\overline{B}$	0,56	0,14	0,7
	0,74	0,26	1



Aufgabe 18 *Lösungen der Aufgaben Seite 43*

$P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

A: Beim ersten Wurf höchstens AZ 3 und beim zweiten Wurf eine Zahl mindestens AZ 4

B: Bei beiden Wurf eine ungerade Zahl

Aufgabe 19

P(nicht normgerecht) = 0,05

a) A: Mindestens 195 Tüten sind normgerecht

b) $P(A) = P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$.

Aufgabe 20

P("gelb") = p; P("schwarz") = 1 – p

Erwartungswert für den Gewinn: $E = p \cdot 1 + (1 - p)\cdot(-0{,}1) = 1{,}1p - 0{,}1$

Bedingung für fair: E = 0 $1{,}1p - 0{,}1 = 0 \Leftrightarrow 11p = 1$

Für $p = \frac{1}{11}$ ist das Spiel fair.

Aufgabe 21

$$P = \frac{\binom{12}{1} \cdot \binom{13}{2}}{\binom{25}{3}}$$ 1 aus 12 und 2 aus 13

Aufgabe 22

55 Frauen (F) und 45 Männer (M)

65 Raucher, davon 35 Frauen (und damit 30 Männer)

a) 15 der befragten Männer rauchen nicht (15 %).

b) weibliche Nichtraucher unter den beiden

Geschlechtern: $F \wedge NR$

20 % sind weibliche Nichtraucher

Vierfeldertafel in %:

	R	$\overline{R}$ = NR	
M	30	15	45
$\overline{M}$ = F	35	20	55
	65	35	100

Aufgabe 23 *Lösungen der Aufgaben Seite 44*

7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, As jeweils in den Farben Rot (Herz und Karo) und auch in den Farben Schwarz (Kreuz und Pik); 32 verschiedene Spielkarten.

$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ $P(B) = \frac{16 + 2 \cdot 4}{32} = \frac{3}{4}$

$P(C) = 1$ $P(D) = \frac{1}{2}$ (Karo ist in Rot enthalten)

$P(E) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ oder $P(E) = \frac{24}{32}$ $P(F) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$

$P(G) = 0$ (unmöglich) $P(H) = \frac{12 + 8}{32} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$

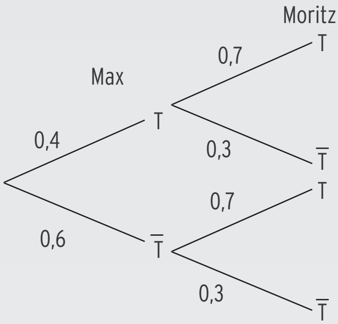
Aufgabe 24

$P(A) = P(\overline{T}\,\overline{T}) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}18$

$P(B) = P(T\,\overline{T}) + P(\overline{T}\,T)$

$= 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}54$

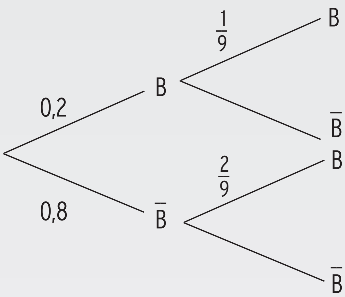
$P(C) = P(T\,T) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28$



Aufgabe 25

a) $P(w) = 0{,}5$ und damit $P(\overline{w}) = 0{,}5$

In einer Urne sind gleichviele weiße Kugeln enthalten wie schwarze und grüne, also 7 (n = 7)



b) • $P = P(RR) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$

• $P = P(B\,B) + P(\overline{B}\,B) =$

$P = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$

Aufgabe 26

a) Es kommen 5 Ziffern in Frage: 9,8,7,6,5

Es gibt $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ Zahlenkombinationen

b) pro Stelle die Ziffern 0 – 9 wählbar, also 10 Möglichkeiten

10^4 Zahlenkombinationen sind möglich

Aufgabe 27

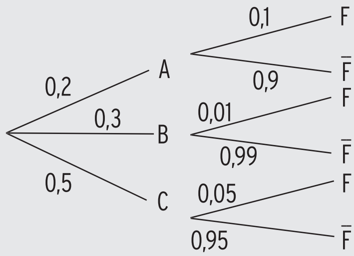
Es gibt $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{1} = 10 \cdot 4 \cdot 5 = 200$ unterschiedliche Zusammensetzungen.

Aufgabe 28 *Lösungen der Aufgaben Seite 45*

Für das Ereignis gibt es 4 günstige Ergebnisse des 2. Würfels: 3, 4, 5, 6

$P = \frac{2}{3}$ z. B. er zieht zu seiner 5 die AZ 3 bis 6

Aufgabe 29



A: 20 % B: 30 % C: 50 %

Produktionsfehler: A: 10 % B: 1 % C: 5 %

a) P(fehlerhaft)

$= 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}01 + 0{,}5 \cdot 0{,}05$

$= 0{,}048$

(F und aus A oder F und aus B oder F und aus C)

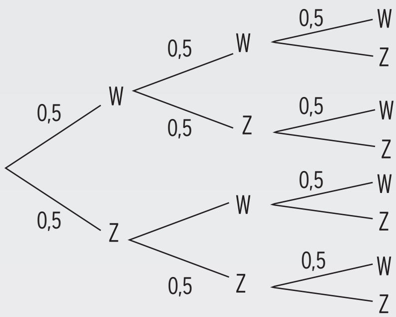
Es ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 4,85 % fehlerhaft.

b) Bedingte Wahrscheinlichkeit $P_F(A) = \frac{P(F \cap A)}{P(F)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}1}{0{,}048} = \frac{20}{48}$

$= \frac{5}{12} \approx 41{,}7\ \%$

Aufgabe 30

Eine Münze wird dreimal geworfen. Baumdiagramm



$P(A) = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

$P(B) = 1 - P(A) = 1 - (\frac{1}{2})^3 = \frac{7}{8}$

$P(C) = 1 - (\frac{1}{2})^3 = \frac{7}{8}$

$P(D) = 3 \cdot (\frac{1}{2})^3 = \frac{3}{8}$

Aufgabe 31

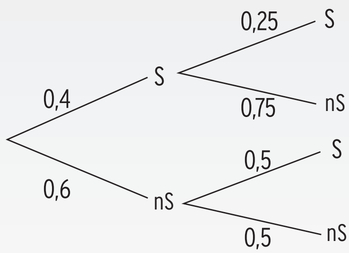
$P(4\ \text{richtig}) = (\frac{1}{3})^4$

$P(\text{genau 3 richtig}) = 4 \cdot (\frac{1}{3})^3 \cdot \frac{2}{3}$

$P(\text{Test bestanden}) = (\frac{1}{3})^4 + 4 \cdot (\frac{1}{3})^3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$

Aufgabe 32

S: Schmuggler nS: nicht schmuggelnd



a) $P(\text{keine Schmuggler}) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$

oder $P(nS\ nS) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0{,}3$

b) P(mindestens einer der beiden Schmuggler)

$= 1 - P(\text{keine Schmuggler}) = 1 - 0{,}6 \cdot 0{,}5 = \frac{7}{10}$

II Aufgabensätze zur Abiturprüfung 2023

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2016

angepasst für die Abiturprüfung 2023

Mathematik Kurs auf erhöhtem Anforderungsniveau – Leistungskurs

Aufgabenstellung 1

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis

a) Geben Sie je eine reelle Zahl für die Parameter a, b und c an, sodass die Funktionen F_a, G_b und H_c Stammfunktionen der Funktionen f, g und h sind.

f: $f(x) = 2x^3 + 4x - 1$ $\qquad F_a$: $F_a(x) = 0{,}5x^4 + ax^2 - x + 3$

g: $g(x) = \sqrt{x - 4}$ $\qquad G_b$: $G_b(x) = \frac{2}{b}(x - 4)^{\frac{3}{2}}$

h: $h(x) = 4e^{-2x+1} + e$ $\qquad H_c$: $H_c(x) = c \cdot e^{-2x+1} + ex - e$

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion von f, deren Graph die y-Achse im Punkt $S_y(0| -1)$ schneidet.

b) Von einer ganzrationalen Funktion dritten Grades ist folgendes bekannt:

- $x_N = 1$ ist die Nullstelle der Funktion.
- $S_y(0| 1)$ ist Sattelpunkt des Graphen.

Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, mit dem man die Koeffizienten dieser ganzrationalen Funktion dritten Grades ermitteln kann.

Hinweis: Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt, in dem eine zur x-Achse parallele Tangente existiert.

1.2 Analytische Geometrie

a) Die Gerade g verläuft durch die Punkte P(1|1|1) und Q(2|2|2).

Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an.

Ermitteln Sie eine Gleichung einer Geraden h, die die Geradeg im Mittelpunkt der Strecke PQ orthogonal schneidet.

b) In einer Ebene E liegen die Punkte P(4| − 6|3) und Q(9|12|4) sowie das Dreieck ABC mit dem Punkt A(0|0|1). Ermitteln Sie eine Parametergleichung der Ebene E .

Mit der Gleichung $\cos(\sphericalangle BAC) = \dfrac{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$

hat ein Schüler den Innenwinkel des Dreiecks ABC mit dem Scheitelpunkt A korrekt berechnet.

Geben Sie für die Punkte B und C mögliche Koordinaten an.

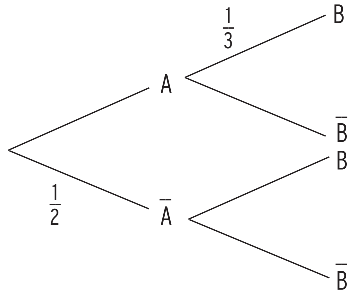
Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2016

Aufgabenstellung 1

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.3 Stochastik

a) Das nebenstehende Baumdiagramm gehört zum Zufallsexperiment „Zweimaliges, unabhängiges Werfen mit einem fairen Würfel“.
Übertragen Sie das Baumdiagramm auf Ihr Arbeitsblatt.
Ergänzen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten.
Geben Sie $P_{\overline{A}}(\overline{B})$ und P(B) an.
Formulieren Sie mögliche Ereignisse A und B.



b) An der Vorbereitung einer Abiturfeier sind insgesamt 30 Mädchen und 25 Jungen beteiligt.
Man betrachtet das Ereignis
T: Auf dem Titelbild für die Einladung sind genau a Jungen und b Mädchen abgebildet.

Geben Sie a und b an, wenn P(T) mithilfe des Terms $\frac{\binom{30}{3}\cdot\binom{25}{2}}{\binom{55}{5}}$

korrekt berechnet werden kann.
Auf dem Titelbild sollen die ausgewählten a Jungen und b Mädchen so in einer Reihe angeordnet werden, dass ein Junge stets zwischen zwei Mädchen steht.
Ermitteln Sie die Anzahl der Möglichkeiten für die Anordnung auf dem Titelbild.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilgebiet	Analysis		Geometrie		Stochastik		
Teilaufgabe	a)	b)	a)	b)	a)	b)	Summe
BE	5	5	5	5	5	5	30

Hinweis für das Abitur 2023:

Aufgrund der vorgeschalteten „Auswahl durch die unterrichtende Lehrkraft“ erhalten die Abiturientinnen und Abiturienten in der Prüfung zur Bearbeitung

- in Aufgabenstellung 1 entweder die Stochastik- oder die Analytische Geometrie-Aufgabe.
- in Aufgabenstellung 3 und 4 nur **eine** Aufgabe (Stochastik- oder Analytische Geometrie).

Um allen Prüflingen die Möglichkeit zum Üben zu geben, haben die Autoren den Umfang belassen.

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2016

Aufgabenstellung 2

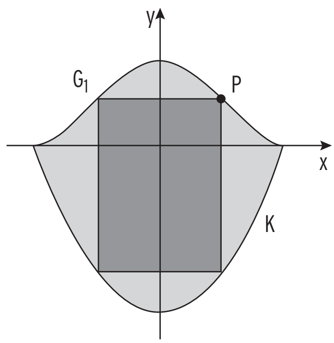
Aufgabe 2.1 Stadtwappen

Gegeben sind die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = x^4 - 2ax^2 + a^2$; $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und die Funktion g mit $g(x) = 2x^2 - 2$.
Die Graphen der Schar f_a sind G_a und der Graph der Funktion g ist K .

a) Weisen Sie nach, dass alle Graphen G_a achsensymmetrisch zur y-Achse verlaufen. Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von a G mit den beiden Koordinatenachsen.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte von G_a in Abhängigkeit von a. Für jeden Parameterwert a mit $a > 0$ sind die drei lokalen Extrempunkte Eckpunkte eines Dreiecks. Wenn der Parameterwert a verdoppelt wird, vervielfacht sich der Flächeninhalt des ursprünglichen Dreiecks $A_\triangle$. Das neue Dreieck hat den Flächeninhalt $A_{neu} = v \cdot A_\triangle$. Ermitteln Sie den Faktor v.

c) Die Graphen G_1 und K schließen im Intervall [– 1; 1] eine Fläche ein, die als Schablone für das Wappen einer Stadt genutzt werden soll. Berechnen Sie den zugehörigen Flächeninhalt.



d) Der Punkt P liegt im I. Quadranten auf G_1 (siehe Abbildung). P ist Eckpunkt eines Rechtecks, dessen Seiten achsenparallel verlaufen und dessen weitere Eckpunkte auf den Begrenzungslinien des Wappens liegen. Innerhalb dieses Rechtecks soll das Wappentier abgebildet werden. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt eines solchen Rechtecks mit der Gleichung $A(x) = 2x^5 - 8x^3 + 6x$ berechnet werden kann und ermitteln Sie den maximalen Flächeninhalt des Rechtecks. Auf den Nachweis des Maximums wird verzichtet.

e) Die untere Begrenzung des Stadtwappens soll statt durch die quadratische Parabel K mithilfe einer anderen quadratischen Parabel modelliert werden. Dabei sollen die Symmetrie des Wappens sowie die Schnittpunkte $S_1(-1|0)$und $S_2(1|0)$ mit G_1 zwar erhalten bleiben, sich aber die Fläche des Wappens um 2 FE vergrößern. Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung der neuen Parabel.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	9	12	5	9	5	40

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2016

Aufgabenstellung 2

Aufgabe 2.2 Bremsschuh

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = -e^{x-a} + e^{2x}$; $a \in \mathbb{R}$.

Die Graphen der Schar f_a sind G_a.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_a mit den beiden Koordinatenachsen in Abhängigkeit von a. Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f_1 für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.

b) Jeder Graph G_a hat im Punkt $E_a(-a-\ln 2 | f_a(-a-\ln 2))$ eine zur x-Achse parallele Tangente. Zur Ermittlung des x-Wertes dieses Punktes hat ein Schüler den folgenden Lösungsweg korrekt angegeben:

(1) $f_a'(x) = -e^{x-a} + 2e^{2x}$

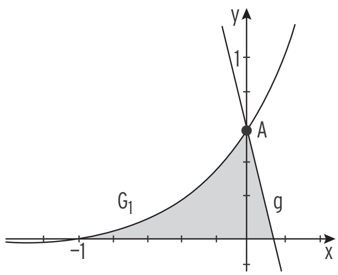
(2) $0 = -e^{x-a} + 2e^{2x} \Leftrightarrow \quad e^{x-a} = 2e^{2x}$

(3) $e^{-x-a} = 2$

(4) $x = -a - \ln 2$

Geben Sie drei Regeln an, die beim Ableiten des Funktionsterms von f_a genutzt worden sind und begründen Sie die Umformung von Gleichung (2) zu Gleichung (3).
Zeigen Sie, dass für a = 0 der Punkt E_0 ein lokaler Extrempunkt von G_0 ist.
Bestimmen Sie dessen Koordinaten sowie die Art des Extremums.

c) Der Graph G_1 und die Gerade g mit der Gleichung $y = -4x + 1 - \frac{1}{e}$ begrenzen gemeinsam mit der x-Achse eine Fläche, die dem Querschnitt eines Bremsschuhs entspricht, der das Wegrollen von Fahrzeugen verhindert (1 LE = 25 cm). Die „Tiefe" des Bremsschuhs beträgt 20 cm. Zeigen Sie, dass sich G_1 und g auf der y-Achse schneiden.
Berechnen Sie das Volumen eines solchen Bremsschuhs.



d) Ermitteln Sie die Größe des Winkels, den G_1 und g im Punkt $A(0 | 1-\frac{1}{e})$ einschließen.

e) Der Produzent der Bremsschuhe möchte auf der Querschnittsfläche des Bremsschuhs sein rechteckiges Firmenlogo mit den Seitenlängen 5 cm und 15 cm so einstanzen lassen, dass die längere der beiden Seiten parallel zur x-Achse verläuft.

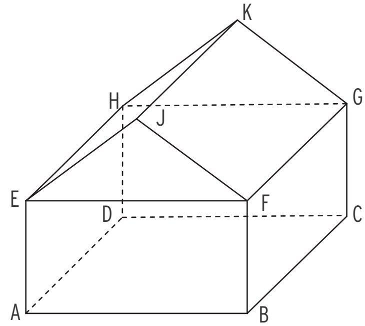
Untersuchen Sie, ob das möglich ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	6	11	13	5	5	40

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2016

Aufgabenstellung 3

Aufgabe 3 Haus



Die Abbildung zeigt ein Haus.

Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass sich die rechteckige Grundfläche des Hauses achsenparallel in der x-y-Ebene befindet. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte D(0|0|0), F(10|8|4), G(0|8|4) und J(10|4|7).

Es gilt: 1 LE = 1 m.

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte K und E an. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E*, in der die Dachfläche FGKJ liegt, in Koordinatenform.

[Kontrollergebnis: E*: $3y + 4z = 40$]

Berechnen Sie den Neigungswinkel der Dachfläche FGKJ gegenüber einer horizontalen Ebene.

b) Paralleles Licht fällt in Richtung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -\sqrt{39} \\ y \\ -5 \end{pmatrix}$ auf das Hausdach.

Bestimmen Sie einen möglichen Wert für y so, dass der Winkel zwischen der Richtung der Lichtstrahlen und der Dachfläche FGKJ 30° beträgt.

c) Ein Drittel der Dachfläche FGKJ wird mit Solarzellen bestückt. Ermitteln Sie die Größe dieser Fläche.

Die Solarzellen können sowohl in der Dachfläche montiert werden als auch in Ebenen F_a, die parallel zur Dachfläche liegen. Dabei darf der Abstand der Ebenen F_a zur Dachfläche maximal 20 cm betragen. Entwickeln Sie unter Verwendung des Parameters a eine Gleichung für die Ebenen F_a und geben Sie ein Intervall für die Einschränkung des Parameters a an.

d) Im Innern des Hauses ist auf dem Fußboden EFGH des Dachraumes im Punkt P(1|5|4) ein 4 m langer, senkrecht stehender Mast für eine Satellitenantenne montiert. Dieser Mast ragt durch das Dach ins Freie. Ermitteln Sie die Länge des Teiles dieses Mastes, der sich außerhalb des Hauses befindet.

Berechnen Sie den Abstand der Mastspitze S zur Ebene E*.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben					
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	8	4	6	7	25

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2016

Aufgabenstellung 4

Aufgabe 4 Strassenverkehr

In einer Stadt werden 25 % des täglichen Straßenverkehrs als Berufsverkehr eingestuft.

Eine viel befahrene Straße wird saniert. Aus Erfahrung weiß man, dass beim Befahren dieser Straße während des Berufsverkehrs mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,7 ein Stau auftritt. Außerhalb dieser Verkehrszeit liegt die Stauwahrscheinlichkeit bei 0,2.

a) Stellen Sie die oben beschriebenen Zusammenhänge in einem Baumdiagramm dar.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fahrzeug im Stau steht.
Untersuchen Sie, ob die Ereignisse Berufsverkehr und Stau stochastisch abhängig sind.

b) Ein Autofahrer aus dieser Stadt hat für sich ein bestimmtes Fahrverhalten festgelegt.
Während des Berufsverkehrs benutzt er immer die Umgehungsstraße. Fährt er außerhalb des Berufsverkehrs, so benutzt er mit 50 %-iger Wahrscheinlichkeit die Umgehungsstraße.
Ereignis U: „Dieser Autofahrer benutzt die Umgehungsstraße.“
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit P(U).

c) Der Anteil der Busse im Straßenverkehr macht durchschnittlich 4 % aus. In einem Stau stehen 60 Fahrzeuge. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse B_1 und B_2.
B_1: „Es stehen genau zwei Busse im Stau.“
B_2: „Es stehen mindestens zwei Busse im Stau.“

d) Es werden im Folgenden nur Fahrzeuge betrachtet, die in einem Stau stehen. Unter diesen Fahrzeugen liegt der PKW-Anteil bei 55 %. Von diesen PKW kommen 31 % aus der Stadt. Insgesamt kommen aber nur 24 % der im Stau stehenden Fahrzeuge aus der Stadt.
Ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug im Stau ist kein PKW. Bestimmen Sie unter dieser Bedingung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Fahrzeug aus der Stadt kommt.

e) Von f Fahrzeugen, die in einem Stau stehen, sind genau zehn PKW.
Von diesen f Fahrzeugen werden zwei zufällig ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter diesen zwei Fahrzeugen genau ein PKW befindet, beträgt 50 %.
Berechnen Sie, wie viele Fahrzeuge in diesem Stau stehen können.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	8	4	6	4	3	25

Lösungen Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2016

Aufgabenstellung 1 – Lösungen

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis

a) Funktion | Ableitung der Stammfunktion

Funktion	Ableitung der Stammfunktion	
$f: f(x) = 2x^3 + 4x - 1$	$F'_a(x) = 2x^3 + 2ax - 1$	$2a = 4$ für $a = 2$
$g: g(x) = \sqrt{x-4} = (x-4)^{0,5}$	$G'_b(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{b}(x-4)^{\frac{3}{2}-1}$	$\frac{3}{b} = 1$ für $b = 3$
$h: h(x) = 4e^{-2x+1} + e$	$H'_c(x) = -2c \cdot e^{-2x+1} + e$	$-2c = 4$ für $c = -2$

Stammfunktion von f durch $S_y(0|-1)$: $F(x) = 0{,}5x^4 + 2x^2 - x + C$

$F(0) = -1$: $F(x) = 0{,}5x^4 + 2x^2 - x - 1$

b) Funktion dritten Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$

- $x_N = 1$ ist die Nullstelle der Funktion: $f(1) = 0 \qquad a + b + c + d = 0$
- $S_y(0|1)$ ist Sattelpunkt des Graphen: $f(0) = 1 \qquad d = 1$

$f'(0) = 0 \qquad c = 0$

$f''(0) = 0 \qquad b = 0$

Funktionsgleichung: $f(x) = -x^3 + 1$

1.2 Analytische Geometrie

a) g durch P(1|1|1) und Q(2|2|2): $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2-1\\2-1\\2-1\end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$; Ursprungsgerade

Mittelpunkt der Strecke PQ: M(1,5|1,5|1,5)

(Mittelwert der Koordinaten von P und Q)

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 0$ h orthogonal zu g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}5\\1{,}5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

b) Ebene E mit P(4|−6|3); Q(9|12|4); A(0|0|1)

Parametergleichung der Ebene E: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AP} + s \cdot \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}4\\-6\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}9\\12\\3\end{pmatrix}$

Skalarprodukt: $\cos(\sphericalangle BAC) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}\right|}$

Für $\overrightarrow{AB}$ gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} = \overrightarrow{OB} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$, also B(2|−3|2)

Für $\overrightarrow{AC}$ gilt: $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} = \overrightarrow{OC} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$, also C(3|4|2)

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2016

Aufgabenstellung 1 – Lösungen

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

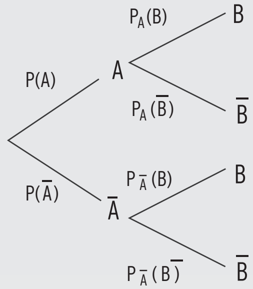
1.3 Stochastik

a) „Zweimaliges, unabhängiges Werfen mit einem fairen Würfel“.

Baumdiagramm mit Wahrscheinlichkeiten.

Es gilt: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

$P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$



$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{2}{3}$

$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Mögliche Ereignisse A und B:

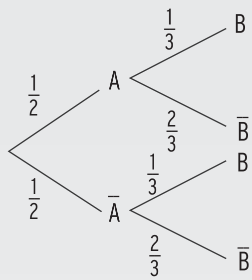
A: Werfen einer geraden Zahl

B: Werfen einer Zahl kleiner als 3

oder

A: Werfen einer ungeraden Zahl

B: Werfen einer Zahl größer als 4



b) 30 Mädchen und 25 Jungen

T: Auf dem Titelbild für die Einladung sind genau a Jungen und b Mädchen abgebildet.

Für das Ereignis T werden a Jungen aus 25 Jungen und b Mädchen aus 30 Mädchen jeweils ohne Zurücklegen gezogen.

Insgesamt werden 5 Personen gezogen.

$$P(T) = \frac{\binom{30}{3} \cdot \binom{25}{2}}{\binom{55}{5}} \Rightarrow a = 2;\ b = 3$$

Auf dem Titelbild sind genau zwei Jungen und drei Mädchen abgebildet.

Folgende Anordnungen sind möglich (ein Junge stets zwischen zwei Mädchen):

$M_1 J_1 M_2 J_2 M_3$

Für M_1 gibt es 3 Möglichkeiten (1 Mädchen aus 3), für M_2 gibt es 2 Möglichkeiten (1 Mädchen aus 3 – 1), für M_3 gibt es 1 Möglichkeit.

Für J_1 gibt es zwei Möglichkeiten (1 Jungen aus 2), für J_2 gibt es 1 Möglichkeit.

Anzahl der Möglichkeiten: $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 12$

Lösungen Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2016

Aufgabenstellung 2

Aufgabe 2.1 Stadtwappen

G_a: f_a mit $f_a(x) = x^4 - 2ax^2 + a^2$; $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

K: g mit $g(x) = 2x^2 - 2$

a) G_a ist **symmetrisch zur y-Achse**, denn $f_a(-x) = f_a(x)$

$$(-x)^4 - 2a(-x)^2 + a^2 = x^4 - 2ax^2 + a^2$$

Schnittpunkt von G_a mit der y-Achse: $S_y(0 \mid a^2)$

mit der x-Achse: $f_a(x) = 0$ $\quad x^4 - 2ax^2 + a^2 = 0$

Substitution $x^2 = z$: $\quad z^2 - 2az + a^2 = 0$

Mit der pq-Formel: $\quad z_{1|2} = a \pm \sqrt{a^2 - a^2} = a$

Rücksubstitution ergibt: $\quad x_1 = \sqrt{a}$; $x_2 = -\sqrt{a}$

Für $a > 0$ gibt es zwei Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_{1|2}(\pm\sqrt{a} \mid 0)$.

b) **Lokale Extrempunkte** von G_a

Ableitungen: $f_a'(x) = 4x^3 - 4ax$; $f_a''(x) = 12x^2 - 4a$

Notwendige Bedingung: $f_a'(x) = 0$ $\quad 4x^3 - 4ax = 0$

Ausklammern: $\quad 4x(x^2 - a) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $\quad x = 0 \vee x = -\sqrt{a} \vee x = \sqrt{a}$ $\quad$ (für $a > 0$)

Mit $f_a''(0) = -4a$; $f_a''(\pm\sqrt{a}) = 8a$ ergibt sich für

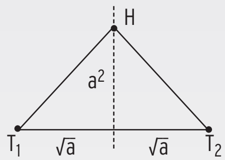
$a < 0$ (nur $x = 0$): $f_a(0) = a^2$; $f_a''(0) = -4a > 0$: Tiefpunkt $(0 \mid a^2)$

$a > 0$: $f_a(0) = a^2$; $f_a''(0) = -4a < 0$: Hochpunkt $H(0 \mid a^2)$

$f_a(\pm\sqrt{a}) = 0$; $f_a''(\pm\sqrt{a}) = 8a > 0$: Tiefpunkte $T_{1|2}(\pm\sqrt{a} \mid 0)$

Dreieck mit den Eckpunkten

$H(0 \mid a^2)$ und $T_{1|2}(\pm\sqrt{a} \mid 0)$:



Flächeninhalt:

$A = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a} \cdot a^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a^4} = \sqrt{a^5}$

Für $a_{neu} = 2a$: $A_{neu} = \sqrt{(2a)^5} = \sqrt{32a^5}$

$A_{neu} = v \cdot A_{\triangle} = \sqrt{32} \cdot \sqrt{a^5}$

Faktor $v = \sqrt{32}$

c) G_1, K: $N_{1|2}(\pm 1 \mid 0)$ sind die einzigen Schnittpunkte von G_1 und K; G_1 und K sind symmetrisch zur y-Achse (siehe Abb.);

Flächeninhalt $A = \int_{-1}^{1} (f_1(x) - g(x))dx = \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1) - (2x^2 - 2))dx$

$$= 2 \cdot \int_{0}^{1} (x^4 - 4x^2 + 3)dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 3x\right]_0^1 = \frac{56}{15}$$

Die eingeschlossene Fläche hat einen Inhalt von $\frac{56}{15}$ FE.

III Zentrale schriftliche Abiturprüfungen eA/LK

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2023

Mathematik Kurs auf erhöhtem Anforderungsniveau – Leistungskurs

Aufgabenvorschlag Teil 1

Hilfsmittel: Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache
nicht für Aufgabenstellung 1
Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist
Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen

Gesamtbearbeitungszeit: 300 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit
Zusätzlich stehen weitere 30 Minuten als Bearbeitungszeit zur Verfügung (Gesamtbearbeitungszeit: 330 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit).

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: hilfsmittelfreier Teil

Hinweis: Hier gibt es keine Wahlmöglichkeiten.
Die Bearbeitungszeit von 70 Minuten für die Aufgabenstellung 1 wird um 15 Minuten verlängert. Sie beträgt daher 85 Minuten.
Die Aufgabenstellung und die Lösungen zum hilfsmittelfreien Teil werden nach 85 Minuten abgegeben.
Mit der Bearbeitung der weiteren Aufgabenstellungen kann bereits zuvor begonnen werden.
In jedem Fall können die zugelassenen Hilfsmittel erst nach Ablauf der 85 Minuten verwendet werden.

Aufgabenvorschlag Teil 2

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: **Analysis**

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: **Analytische Geometrie oder Stochastik**

Hinweis: Bearbeiten Sie Aufgabe 3.

Für die Prüfung 2023 gilt: Schüler*in erhält nur die von der Lehrkraft ausgewählte Aufgabe zur Aufgabenstellung 1 und die ausgewählte Aufgabe zur Aufgabenstellung 3 (Stochastik oder Analytische Geometrie).

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

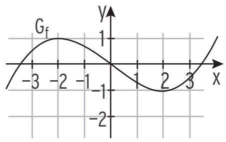
Erhöhtes Anforderungsniveau - Leistungskurs

Aufgabenvorschlag Teil 1

Aufgabenstellung 1

1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis

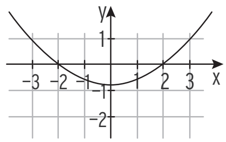


Der abgebildete Graph G_f stellt eine Funktion f dar.

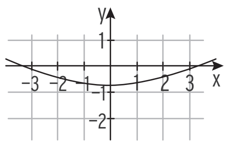
a) Einer der folgenden Graphen I, II und III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f.

Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.

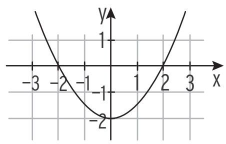
I



II



III



b) Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f.

Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall [1; 3] an.

Begründen Sie Ihre Angabe.

1.2 Analysis

Gegeben ist die Funktion f' mit $f'(x) = 3x^2 - 6x - 6$.

a) Der Punkt $P(-1|10)$ liegt auf dem Graphen der Funktion f.

Bestimmen Sie eine Gleichung von f.

b) Für die Funktion f gilt: $\int_a^b f(x)dx = 0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$; $a \neq b$ und $f(a) = f(b) = 0$.

Geben Sie die Anzahl und Lage der Nullstellen der Funktion f an.

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil (Fortsetzung)

1.3 Analytische Geometrie

Gegeben sind die Ebene E: $4x - y + 2z = 9$ und die Ebene H: $x - 2y + z = 1$.

a) Begründen Sie, dass die Ebenen E und H nicht parallel zueinander sind.

b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ursprungsgeraden, die sowohl zur Ebene E als auch zur Ebene H parallel ist.

1.4 Analytische Geometrie

Die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und die Ebene E: $x + 2y - 2z = 2$

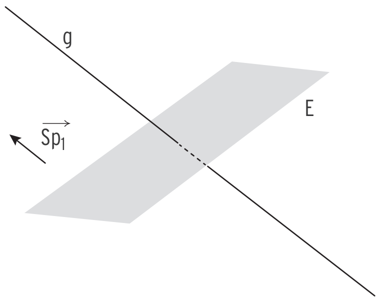
schneiden sich im Punkt S.

a) Berechnen Sie die Koordinaten von S.

b) Der Punkt P_1 liegt auf g, aber nicht in E. Die Abbildung zeigt die Ebene E, die Gerade g sowie einen Repräsentanten des Vektors $\overrightarrow{SP_1}$.

Für den Punkt P_2 gilt: $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_1} - 4 \cdot \overrightarrow{SP_1}$, wobei O den Koordinatenursprung bezeichnet.

Zeichnen Sie die Punkte S, P_1 und P_2 in die Abbildung ein.



Fortsetzung auf der nächsten Seite

Hinweis für das Abitur 2023:

Aufgrund der vorgeschalteten „Auswahl durch die unterrichtende Lehrkraft“ erhalten die Abiturientinnen und Abiturienten in der Prüfung zur Bearbeitung

- in Aufgabenstellung 1 entweder die Stochastik- oder die Analytische Geometrie-Aufgabe.
- in Aufgabenstellung 3 und 4 nur **eine** Aufgabe (Stochastik- oder Analytische Geometrie). Diese Aufgabe hat aber den Umfang von 40 BE.

Um allen Prüflingen die Möglichkeit zum Üben zu geben, haben die Autoren alle Aufgaben belassen.

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil (Fortsetzung)

1.5 Stochastik


Pauls erster Wurf

Erscheinen beim Wurf von fünf Würfeln fünf gleiche Zahlen, so spricht man von einem Kniffel.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit fünf idealen Würfeln einen Kniffel zu erhalten.

Erhält man ein Paar gleicher Zahlen und eine andere Zahl auf allen restlichen drei Würfeln, so spricht man vom Full House. Hat man beim ersten Wurf sein Ziel noch nicht erreicht, darf man einen zweiten Wurf wagen.

b) Paul hat vier gleiche Zahlen gewürfelt, er benötigt jedoch ein Full House.
Nun will er nur mit einem der vier Würfel mit gleicher Zahl weiterwürfeln.
Jasmin schlägt vor, zusätzlich den Würfel mit der einzelnen Zahl zum Würfeln aufzunehmen.
Untersuchen Sie, wer die bessere Gewinnstrategie hat.

1.6 Stochastik

Ein Glücksrad besteht aus fünf gleich großen Sektoren. Einer der Sektoren ist mit „0“ beschriftet, einer mit „1“ und einer mit „2“, die beiden anderen Sektoren sind mit „9“ beschriftet.

a) Das Glücksrad wird viermal gedreht.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahlen 2, 0, 1 und 9 in der angegebenen Reihenfolge erzielt werden.

b) Das Glücksrad wird zweimal gedreht.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen mindestens 11 beträgt.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgaben													
Aufgabe	1.1 Analysis 1		1.2 Analysis 2		1.3 Geometrie 1		1.4 Geometrie 2		1.5 Stochastik 1		1.6 Stochastik 2		
Teilaufgabe	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)	Summe
BE	3	2	3	2	2	3	3	2	2	3	2	3	30

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgabenvorschlag Teil 2

Aufgabenstellung 2

Aufgabe 2.1 Fischlogo

Gegeben ist die Funktionenschar f_a durch $f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot \ln\left(\frac{x}{a}\right)$; $a \in \mathbb{R}$; $a > 0$.
Die zugehörigen Graphen sind G_a.
Des Weiteren ist die Funktion h durch $h(x) = \frac{1}{10}\, e^{x-1} + 2$ gegeben.
Der Graph dieser Funktion ist K.

a) Geben Sie den Definitionsbereich von f_a an.
Berechnen Sie die Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a.

b) Alle Graphen G_a der Funktionenschar f_a besitzen genau einen lokalen Extrempunkt $E(x|\, f_a(x))$.
Zeigen Sie, dass die x-Koordinate dieses Punktes $x = \frac{a}{e}$ ist und bestimmen Sie die Art des Extrempunktes.
Begründen Sie, dass für den Wertebereich W aller Funktionen der Schar f_a gilt:
$W = \{y|\ y \in \mathbb{R},\ y \geq -e^{-1}\}$.

c) Die Funktionenschar $\overline{f_a}$ ist durch $\overline{f_a}(x) = \frac{x}{a} \cdot \ln\left(\frac{x}{a}\right)$; $a \in \mathbb{R}$; $a < 0$ gegeben.
Geben Sie den Definitionsbereich von $\overline{f_a}$ an.
Erläutern Sie, wie sich die Lage und die Art des Extrempunktes der Graphen von $\overline{f_a}$ ohne Rechnung aus der Lage und der Art des Extrempunktes der Graphen von f_a ergeben.

d) Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von h für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ an.
Skizzieren Sie den Graphen K mindestens im Intervall $-2 \leq x \leq 4$.

e) An die Graphen der Funktionen h und ihrer Ableitungsfunktion h′ wird in den Punkten $B(u|h(u))$ und $B^*(u|h'(u))$ mit $u \in \mathbb{R}$ jeweils eine Tangente gelegt.
Beschreiben Sie die besondere Lage dieser beiden Tangenten zueinander.
Begründen Sie Ihre Aussage.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019 **Aufgabenstellung 2**

Aufgabe 2.1 Fischlogo (Fortsetzung)

Der Inhaber eines Geschäftes für Anglerbedarf möchte seine Außenwerbung verbessern. Er entwirft als Logo einen großen Fisch, dessen Konturen durch Lichtschläuche gebildet werden. Der Durchmesser der Lichtschläuche kann vernachlässigt werden.

Der Fisch kann modellhaft in einem Koordinatensystem durch Funktionsgraphen veranschaulicht werden. (siehe Abbildung)
Die Spitze des Fischmauls liegt im Punkt P(4|4).
Der höchste Punkt des Logos befindet sich im Punkt Q(− 1|6).
Es gilt: 1 LE = 1 m.

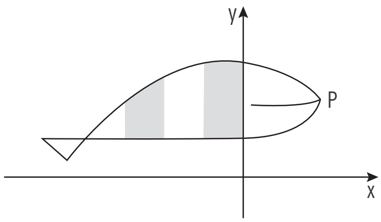


Abbildung nicht maßstabsgerecht

f) Der Fischrücken soll durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion p zweiten Grades im Intervall $-9 \leq x \leq 4$ modelliert werden.
Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung für p.
$\left[\text{Kontrollergebnis: } p(x) = -\frac{2}{25}x^2 - \frac{4}{25}x + \frac{148}{25}\right]$

g) Für den Bauch des Fisches wird der Graph K gewählt.
Es werden zwei senkrechte farbige Streifen zwischen dem Graphen K und dem Graphen der Funktion p gemalt. Ein Streifen liegt im Intervall [− 2 ; 0].
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Streifens.

h) Das Fischmaul wird durch den Graphen der Funktion m im Intervall $0{,}5 \leq x \leq 4$ beschrieben.
Der Graph der Funktion m ist der um 4 Einheiten entlang der y-Achse nach oben verschobene Graph G_4.
Geben Sie eine zugehörige Funktionsgleichung für m an.
Das Fischauge befindet sich im Punkt A. Über die Lage des Punktes A ist Folgendes bekannt:
- A liegt auf der Strecke zwischen Rücken und Maul, die parallel zur y-Achse verläuft, für die der senkrechte Abstand von Rücken und Maul am größten ist.
- A liegt genau in der Mitte dieser Strecke.

Beschreiben Sie, wie die Koordinaten des Punktes A berechnet werden können.

	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben								
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	Summe
BE	4	9	4	4	3	6	6	4	40

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgabenstellung 2

Aufgabe 2.2 Funktionenschar

1. Für jeden Wert von $k \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion f_k durch $f_k(x) = 8k \cdot (kx - 1)^2 \cdot (kx + 1)^2;\ x \in \mathbb{R}$ festgelegt. Die Graphen von f_k werden mit G_k bezeichnet.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte, die G_k mit den Koordinatenachsen gemeinsam haben. Skalieren Sie in der Abbildung 1 die beiden Achsen so, dass die gezeigte Kurve den Graphen $G_{0,25}$ darstellt.

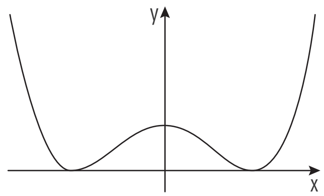


Abb. 1

b) Beschreiben Sie, wie die Graphen G_{2k} aus G_k hervorgehen.

Begründen Sie, dass $f_k(x) = 8k \cdot (k^2x^2 - 1)^2$ gilt, und zeigen Sie, dass G_k symmetrisch bezüglich der y-Achse sind.

c) Für einen Wert von k gibt es einen Punkt $(x_1 | f_k(x_1))$ mit $x_1 > 1$, für den die Gleichung

$$\frac{f_k(x_1) - 0}{x_1 - 0} = -\frac{1}{f'_k(x_1)}$$ gilt.

Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung dieser Gleichung.

G_k schließt im ersten Quadranten mit den Koordinatenachsen ein Flächenstück ein. Die Abbildung 2 zeigt dieses Flächenstück (grau markiert) sowie das Rechteck mit den Eckpunkten $(0| f_k(0))$ und $(\frac{1}{k} |0)$, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind.

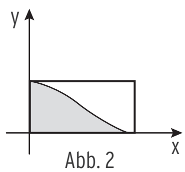


Abb. 2

d) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks.

e) Bei Rotation des Rechtecks um die x-Achse entsteht ein Körper, ebenso bei Rotation um die y-Achse. Skizzieren Sie einen der beiden Körper und beschriften Sie die Skizze mit den Maßen des Körpers. Ermitteln Sie denjenigen Wert von k, für den die beiden Körper das gleiche Volumen haben.

f) Bei Rotation des grau markierten Flächenstücks um die y-Achse entsteht ein weiterer Körper. Begründen Sie, dass das Volumen dieses Körpers mit zunehmendem Wert von k beliebig klein wird.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgabenstellung 2

Aufgabe 2.2 Funktionenschar (Fortsetzung)

2. Im Folgenden werden die in ℝ definierten Funktionen f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4$ und g mit $g(x) = (x-2)^2 \cdot e^x$ betrachtet.

a) Die Funktion f ist eine Funktion der Schar aus Aufgabe 1.
Ermitteln Sie den zugehörigen Wert von k.
Zwei Extrempunkte des Graphen von f liegen auf dem Graphen von g.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.

b) Die Abbildung 3 zeigt die Graphen von f und g für $0 \leq x \leq 2$.
Ordnen Sie jeden der Graphen I und II der passenden Funktion zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

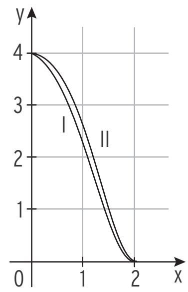


Abb. 3

c) Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von g im Punkt $P(p|g(p))$ mit $0 < p < 2$.
Ermitteln Sie rechnerisch denjenigen Wert von p, für den diese Tangente die x-Achse im Punkt $Q(2|0)$ schneidet.

	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben								
Teilaufgabe	1a)	1b)	1c)	1d)	1e)	1f)	2a)	2b)	2c)	Summe
BE	5	5	3	4	5	4	6	2	6	40

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgabenstellung 3

Aufgabe 3.1 Tunnel

Ein Berg wird von seiner Südseite zu seiner Nordseite durch einen Autotunnel unterquert.
Der Verlauf des Autotunnels kann als Teil einer Geraden modelliert werden.
Die x-y-Ebene befindet sich auf der Höhe des Meeresspiegels. (1 LE = 100 m)
Auf der Südseite beginnt der Tunnel im Punkt $S(0|40|6)$ und endet auf der Nordseite im Punkt $N(30|65|7)$.

a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, mit deren Hilfe man den Verlauf des Autotunnels modellieren kann.
Berechnen Sie die Länge des Autotunnels.
Ermitteln Sie den Winkel, in dem die Gerade zur x-y-Ebene ansteigt.

b) In der Mitte des Autotunnels befindet sich eine Nothaltebucht, die vereinfacht modellhaft als Punkt L beschrieben werden kann.
Geben Sie die Koordinaten des Punktes L an.
Von der Nothaltebucht führt ein Lüftungsrohr senkrecht zum Meeresspiegel nach oben.
Das Lüftungsrohr ragt 2 m aus der Oberfläche des Berges hinaus. Die Oberfläche des Berges kann in diesem Bereich durch eine Ebene F beschrieben werden mit
$F\colon 10x + 5\,y + 7z = 475{,}5$.
Ermitteln Sie die Länge des Lüftungsrohrs.

Ein Bahntunnel verläuft geradlinig zwischen den Punkten $A(20|60|5{,}6)$ und $B(60|65|6)$.

c) Zeigen Sie, dass der Bahntunnel den Autotunnel nicht kreuzt.
Hinweis: Die Querschnitte der Tunnel können vernachlässigt werden.

d) Die Lok eines 700 m langen Güterzuges fährt um 09:10 Uhr in den Bahntunnel hinein. Der letzte Wagen ist um 09:13 Uhr vollständig aus dem Bahntunnel herausgefahren.
Der Güterzug bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit durch den Bahntunnel.
Prüfen Sie, ob der Zug die zulässige Höchstgeschwindigkeit von 100 km/h einhält.

e) Vom Punkt $P(1|51|6{,}2)$ ist eine geradlinige Zufahrt in den Autotunnel geplant.
Bestimmen Sie den Punkt Q, in dem die Zufahrt auf den Autotunnel treffen muss, damit sie die kleinstmögliche Länge hat.

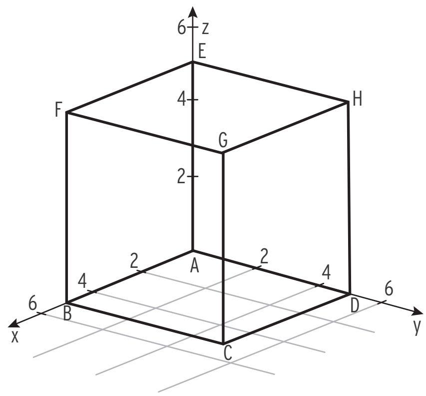
f) Die geradlinige Zufahrt vom Punkt P zum Autotunnel wird schließlich nicht so gebaut, dass sie die kleinstmögliche Länge hat, sondern so, dass ihre Länge 1300 m beträgt.
Begründen Sie, dass es dafür nur genau eine Möglichkeit gibt.

	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	5	6	4	3	5	2	25

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgabenstellung 3

Aufgabe 3.2 Würfel



Die Abbildung zeigt den Würfel ABCDEFGH mit A(0|0|0) und G(5|5|5) in einem kartesischen Koordinatensystem.
Die Ebene T schneidet die Kanten des Würfels unter anderem in den Punkten I(5|0|1), J(2|5|0), K(0|5|2) und L(1|0|5) .

a) Zeichnen Sie das Viereck IJKL in die Abbildung ein.

b) Begründen Sie, dass das Viereck IJKL ein Trapez ist, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.

c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene T in Koordinatenform.
[zur Kontrolle: T: $5x + 4y + 5z = 30$]

d) Spiegelt man T an der Ebene mit der Gleichung $x = 2{,}5$, so erhält man die Ebene T′.
Zeigen Sie, dass T′ durch die Gleichung $-5x + 4y + 5z = 5$ beschrieben wird.
Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem sich T und T′ schneiden.

e) Die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche IJKL liegt auf der Strecke $\overline{FG}$.
Untersuchen Sie, ob die Höhe dieser Pyramide $\frac{18}{\sqrt{66}}$ betragen kann.

Betrachtet wird die Schar der Geraden g_a : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $r \in \mathbb{R}$.

f) Begründen Sie ohne zu rechnen, dass keine Gerade der Schar in der Ebene mit der Gleichung $z = 3{,}5$ liegt.

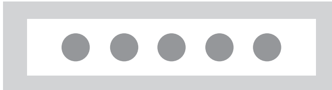
g) Untersuchen Sie, ob die Schnittgerade von T und T′ zur betrachteten Schar gehört.

	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	Summe
BE	2	3	4	6	4	2	4	25

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgabenstellung 4

Aufgabe 4.1 Biathlon



Biathlon ist eine Sportart, die sich aus den Disziplinen Skilanglauf und Schießen zusammensetzt.

Während eines Einzelrennens kommen alle Biathleten mehrmals an Schießstände.

Dort versuchen sie, mit fünf Schüssen die fünf schwarzen Zielscheiben zu treffen.

a) Eine Biathletin hat unabhängig von allen äußeren Umständen eine konstante Trefferwahrscheinlichkeit von 90 %.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse.
A: Sie trifft an einem Schießstand alle fünf Scheiben.
B: Im gesamten Einzelrennen mit 20 Schüssen hat sie höchstens einen Fehlschuss.

b) Ein Biathlet hat am Schießstand beim ersten Schuss eine Trefferwahrscheinlichkeit von nur 75 %, bei den anderen vier Schüssen von jeweils 90 %.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
F_1: Er hat einen Fehlschuss beim ersten Schuss, alle anderen Schüsse treffen.
F_2: Er hat genau einen Fehlschuss beim 2. bis 5. Schuss, alle anderen Schüsse treffen.
F_3: Der Biathlet hat bei seinen fünf Schüssen genau einen Fehlschuss.

c) Nach einer Wettkampfsaison wurde die Treffergenauigkeit der gesamten deutschen Biathlon-Mannschaft ausgewertet. Insgesamt gingen 5096 Schüsse in die Auswertung ein. Dabei ergab sich, dass 811 Fehlschüsse abgegeben wurden und dass bei den Damen von 2533 Schüssen 2119 das Ziel trafen.
Von den betrachteten Biathleten wird eine Person zufällig ausgewählt.
Untersucht werden die folgenden Ereignisse:
D: Die Person ist eine Frau.
T: Die Person trifft das Ziel.
Erstellen Sie eine Vierfeldertafel zu diesem Sachverhalt.
Prüfen Sie, ob $P_D(T) = P_{\overline{D}}(T)$ gilt.
Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgabe 4.1 Biathlon (Fortsetzung)

Bei einem Staffelrennen, bei dem jeweils vier Biathleten einer Mannschaft nach einander den Rundkurs absolvieren, gelten abweichende Regeln am Schießstand. Wenn nicht alle fünf Scheiben getroffen wurden, darf jetzt bis zu dreimal nachgeladen und erneut geschossen werden. Es können also maximal acht Schüsse abgegeben werden.

Es wird im Folgenden wieder von einer konstanten Trefferwahrscheinlichkeit von $p = 0{,}9$ ausgegangen.

d) Begründen Sie, warum der Term $\left(\binom{5}{4} \cdot 0{,}90^4 \cdot 0{,}10^1\right) \cdot 0{,}9$ geeignet ist, die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, dass genau ein Nachlader erforderlich ist, um alle fünf Scheiben zu treffen.

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei Nachlader erforderlich sind, um alle fünf Scheiben zu treffen.

f) Untersucht wird wie in Teilaufgabe d) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Nachlader erforderlich ist. Die Funktion f gibt diese Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Trefferwahrscheinlichkeit p an.
Zeigen Sie, dass gilt: $f(p) = 5p^5 - 5p^6$.
Ermitteln Sie, für welchen Wert von p der Funktionswert f(p) maximal wird.
[Hinweis: Ein Nachweis mithilfe einer hinreichenden Bedingung ist nicht erforderlich.]

	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	4	6	6	2	3	4	25

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgabenstellung 4

Aufgabe 4.2 Ausflugsschiff

Ein Unternehmen organisiert Fahrten mit einem Ausflugsschiff.
Betrachtet wird zunächst eine Fahrt, bei der das Schiff mit 60 Fahrgästen voll besetzt ist.
Zu Beginn der Fahrt werden drei Fahrgäste zufällig ausgewählt; diese erhalten jeweils ein Freigetränk.

a) Ermitteln Sie die Anzahl möglicher Dreiergruppen, die sich bei der Auswahl ergeben können.

b) Zwei Drittel der Fahrgäste kommen aus Deutschland, die übrigen aus anderen Ländern. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei ausgewählten Fahrgäste aus Deutschland kommen.

c) Unter den Fahrgästen befinden sich Erwachsene und Kinder. Die Hälfte der Fahrgäste isst während der Fahrt ein Eis, von den Erwachsenen nur jeder Dritte, von den Kindern 75 %. Berechnen Sie, wie viele Kinder an der Fahrt teilnehmen.

Möchte man an einer Fahrt teilnehmen, so muss man dafür im Voraus eine Reservierung vornehmen. Erfahrungsgemäß erscheinen von den Personen mit Reservierung einige nicht zur Fahrt. Für die 60 Plätze lässt das Unternehmen deshalb bis zu 62 Reservierungen zu.
Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Fahrt tatsächlich 62 Reservierungen vorgenommen werden. Erscheinen mehr als 60 Personen mit Reservierung zur Fahrt, so können nur 60 von ihnen daran teilnehmen; die übrigen müssen abgewiesen werden. Vereinfachend soll angenommen werden, dass die Anzahl der Personen mit Reservierung, die zur Fahrt erscheinen, binomialverteilt ist, wobei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, 10 % beträgt.

d) Geben Sie einen Grund dafür an, dass es sich bei dieser Annahme im Sachzusammenhang um eine Vereinfachung handelt.

e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Person mit Reservierung abgewiesen werden muss.

f) Bei den sogenannten Mondscheinfahrten im Sommer muss erfahrungsgemäß bei 2 % der Fahrten jemand mit Reservierung abgewiesen werden. Ermitteln Sie, wie viele Fahrten höchstens durchgeführt werden können, damit die Wahrscheinlichkeit, dass bei mindestens einer Fahrt jemand abgewiesen werden muss, höchstens 50 % beträgt.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgabe 4.2 Ausflugsschiff (Fortsetzung)

Das Unternehmen richtet ein Online-Portal zur Reservierung ein und vermutet, dass dadurch der Anteil der Personen mit Reservierung, die zur jeweiligen Fahrt nicht erscheinen, zunehmen könnte. Als Grundlage für die Entscheidung darüber, ob pro Fahrt künftig mehr als 62 Reservierungen angenommen werden, soll die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, beträgt höchstens 10 %.“ mithilfe einer Stichprobe von 200 Personen mit Reservierung auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden. Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Anzahl der Reservierungen pro Fahrt nur dann zu erhöhen, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden müsste.

g) Ermitteln Sie für den beschriebenen Test die zugehörige Entscheidungsregel.

h) Entscheiden Sie, ob bei der Wahl der Nullhypothese eher das Interesse, dass weniger Plätze frei bleiben sollen, oder das Interesse, dass nicht mehr Personen mit Reservierung abgewiesen werden müssen, im Vordergrund stand.
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

i) Beschreiben Sie den Fehler zweiter Art im Sachzusammenhang.

	Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile									
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	Summe
BE	2	2	3	1	3	4	5	3	2	25

Summierte Binomialverteilung für n = 200 (Auszug)

Gerundet auf vier Nachkommastellen, weggelassen ist „0,“,

alle freien Plätze links unten enthalten 1,0000.

Wird die Tabelle „von unten“ gelesen (p > 0,5), ist der richtige Wert 1 – (abgelesener Wert).

n	k	p: 0,05	0,10	$\frac{1}{6}$	0,20	0,25	0,30	$\frac{1}{3}$	0,40	0,45	0,50	k	n
200	0	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	200	200
	1	0004	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	199	
	2	0023	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	198	
	3	0090	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	197	
	4	0264	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	196	
	5	0623	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	195	
	6	1237	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	194	
	7	2133	0005	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	193	
	8	3270	0014	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	192	
	9	4547	0035	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	191	
	10	5831	0081	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	190	
	11	6998	0168	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	189	
	12	7965	0320	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	188	
	13	8701	0566	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	187	
	14	9219	0929	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	186	
	15	9556	1431	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	185	
	16	9762	2075	0003	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	184	
	17	9879	2849	0006	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	183	
	18	9942	3724	0013	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	182	
	19	9973	4655	0027	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	181	
	20	9988	5592	0052	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	180	
	21	9995	6484	0094	0002	0000	0000	0000	0000	0000	0000	179	
	22	9998	7290	0163	0005	0000	0000	0000	0000	0000	0000	178	
	23	9999	7983	0269	0010	0000	0000	0000	0000	0000	0000	177	
	24		8551	0426	0020	0000	0000	0000	0000	0000	0000	176	
	25		8995	0648	0036	0000	0000	0000	0000	0000	0000	175	
	26		9328	0945	0064	0000	0000	0000	0000	0000	0000	174	
	27		9566	1329	0110	0000	0000	0000	0000	0000	0000	173	
	28		9729	1803	0179	0001	0000	0000	0000	0000	0000	172	
	29		9837	2366	0283	0002	0000	0000	0000	0000	0000	171	
	30		9905	3007	0430	0004	0000	0000	0000	0000	0000	170	
	31		9946	3711	0632	0008	0000	0000	0000	0000	0000	169	
	32		9971	4454	0899	0014	0000	0000	0000	0000	0000	168	
	33		9985	5210	1239	0026	0000	0000	0000	0000	0000	167	
	34		9992	5953	1656	0044	0000	0000	0000	0000	0000	166	
	35		9996	6658	2151	0073	0000	0000	0000	0000	0000	165	
	36		9998	7305	2717	0117	0001	0000	0000	0000	0000	164	
	37		9999	7877	3345	0182	0001	0000	0000	0000	0000	163	
	38			8369	4019	0276	0003	0000	0000	0000	0000	162	
	39			8777	4718	0405	0005	0000	0000	0000	0000	161	
	40			9106	5422	0578	0009	0000	0000	0000	0000	160	
	41			9362	6108	0804	0016	0000	0000	0000	0000	159	
	42			9556	6758	1089	0027	0001	0000	0000	0000	158	
	43			9699	7355	1438	0045	0002	0000	0000	0000	157	
	44			9801	7887	1852	0072	0003	0000	0000	0000	156	
	45			9872	8349	2332	0111	0005	0000	0000	0000	155	
	46			9919	8738	2870	0169	0009	0000	0000	0000	154	
	47			9950	9056	3458	0249	0016	0000	0000	0000	153	
	48			9970	9310	4083	0359	0026	0000	0000	0000	152	
	49			9983	9506	4729	0506	0042	0000	0000	0000	151	
	50			9990	9655	5379	0695	0067	0000	0000	0000	150	
	51			9995	9764	6017	0934	0103	0000	0000	0000	149	
	52			9997	9843	6626	1228	0154	0000	0000	0000	148	
	53			9998	9897	7192	1579	0226	0000	0000	0000	147	
	54			9999	9934	7707	1988	0323	0001	0000	0000	146	
	55				9959	8162	2455	0453	0002	0000	0000	145	
	56				9975	8555	2972	0621	0003	0000	0000	144	
	57				9985	8885	3532	0833	0005	0000	0000	143	
	58				9991	9157	4123	1094	0008	0000	0000	142	
	59				9995	9375	4733	1409	0013	0000	0000	141	
	60				9997	9546	5348	1778	0021	0000	0000	140	
	61				9998	9677	5953	2202	0034	0000	0000	139	
	62				9999	9774	6533	2677	0052	0000	0000	138	
	63					9846	7079	3198	0080	0001	0000	137	
	64					9897	7579	3755	0119	0001	0000	136	
	65					9932	8028	4338	0173	0002	0000	135	
	66					9956	8421	4934	0247	0004	0000	134	
	67					9972	8758	5530	0346	0006	0000	133	
						Werte für 67 < k < 132 sind nicht dargestellt							
n	k	p: 0,95	0,90	$\frac{5}{6}$	0,80	0,75	0,70	$\frac{2}{3}$	0,60	0,55	0,50	k	n

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Erhöhtes Anforderungsniveau - Leistungskurs Lösungen

Aufgabenstellung 1 Lösungen

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis

a) Graph I

Begründung: Graph II kommt nicht infrage, da die Extremstellen von f ($x = \pm 2$) Nullstellen von f' sein müssen. Graph III kommt nicht infrage, da die Steigung des Graphen von f im Punkt $(0|f(0))$ nicht kleiner als -1 ist.

b) Für $1 \leq x \leq 3$ gilt $F'(x) = f(x) \leq 0$. Damit ist F im gegebenen Intervall monoton fallend.

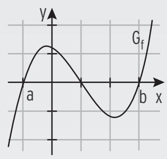
1.2 Analysis

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + c;\ c \in \mathbb{R}$

Punktprobe mit $P(-1 \mid 10)$: $10 = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 6\cdot(-1) + c \Rightarrow c = 8$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

b) Die Funktion f ist eine Funktion dritten Grades und besitzt maximal drei Nullstellen. Außer a und b existiert noch eine weitere Nullstelle, da die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen gleich groß ist. Beide Teilflächen liegen auf unterschiedlichen Seiten der x-Achse. Deshalb liegt die dritte Nullstelle zwischen a und b.



1.3 Analytische Geometrie

E: $4x - y + 2z = 9$; H: $x - 2y + z = 1$

a) Normalenvektor von E: $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; ... von H: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ kat keine Lösung

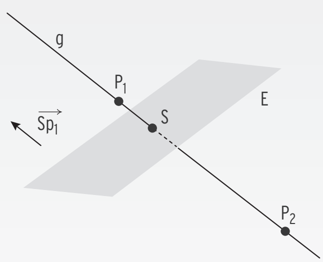
Die Normalenvektoren der Ebenen E und H sind nicht kollinear.

Damit verlaufen die beiden Ebenen nicht parallel zueinander.

b) Der Richtungsvektor der Geraden kann z. B. aus dem Vektorprodukt der Normalenvektoren ermittelt werden. $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$

Dieser Vektor ist Richtungsvektor der Schnittgeraden, er steht senkrecht auf beiden Normalenvektoren: g: $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

g verläuft parallel zu E und zu H.



1.4 Analytische Geometrie

a) g in E einsetzen: $2r + 2(2 + 4r) - 2r = 2 \Rightarrow r = -\frac{1}{4}$,

d.h. $S(-\frac{1}{2} \mid 1 \mid -\frac{1}{4})$

b) Hinweis: $-\overrightarrow{SP_1}$

Lösungen Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgabenstellung 1

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.5 Stochastik

a) $P(\text{Kniffel}) = 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^4$ Im 1. Wurf kann jede Zahl fallen.

b) Paul muss die einzelne Zahl zum zweiten Mal würfeln. Diese ist damit vorgegeben:

P_1 (Full House) = $\frac{1}{6}$

Jasmin kann eine der fünf übrigen Zahlen würfeln und muss diese Zahl auf dem zweiten geworfenen Würfel wiederholen.

P_2 (Full House) = $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

Da $\frac{5}{36} < \frac{1}{6}$, hat Paul die bessere Strategie.

1.6 Stochastik

a) $P(0) = P(1) = P(2) = \frac{1}{5}$; $P(9) = \frac{2}{5}$ $\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{625}$

b) Möglichkeiten: (2;9), (9; 2), (9; 9) $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{25}$

Lösungen Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgabenstellung 2 Aufgabe 2.1 Fischlogo

G_a: $f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot \ln\left(\frac{x}{a}\right)$; $a \in \mathbb{R}$; $a > 0$.

K: $h(x) = \frac{1}{10} e^{x-1} + 2$

a) Definitionsbereich von f_a

Es muss gelten $\frac{x}{a} > 0 \Rightarrow x > 0$, also ist $D_{f_a} = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$.

Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a

Bedingung für Nullstellen: $f_a(x) = 0$ $\frac{x}{a} \cdot \ln\left(\frac{x}{a}\right) = 0$

$\frac{x}{a} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ entfällt, da $x = 0$ nicht zum Definitionsbereich gehört

$\ln\left(\frac{x}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{a} = 1 \Leftrightarrow x = a$

Die Graphen der Funktionenschar f_a besitzen die Nullstelle a.

b) Ableitung: $f_a'(x) = \frac{1}{a} \cdot \ln\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \cdot \ln\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{a}$

Hinweis: $\ln\left(\frac{x}{a}\right) = \ln(x) - \ln(a)$; $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ oder $\left(\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = \frac{1}{\frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{x}$

Notwendiges Kriterium für Extremstelle: $f_a'\left(\frac{a}{e}\right) = 0$

Einsetzen: $\frac{1}{a} \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) + \frac{1}{a} = 0$ wegen $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(1) - \ln(e) = -1$

Untersuchung der Art des Extrempunktes: $f_a''(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{ax}$

($\frac{1}{a}$ ist eine Konstante.)

$f_a''\left(\frac{a}{e}\right) = \frac{1}{a \cdot \frac{a}{e}} = \frac{e}{a^2} > 0$; In $\frac{a}{e}$ liegt ein lokales Minimum vor

Lösungen Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgabenstellung 2 Aufgabe 2.1 Fischlogo Fortsetzung

b) Wertebereich:

Funktionswert: $f_a(\frac{a}{e}) = \frac{1}{e} \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$

Der Funktionswert $y = -\frac{1}{e}$ ist unabhängig von a .

Da es genau einen Extrempunkt für alle Funktionen der Schar f_a gibt, ist $E(\frac{a}{e} \mid -\frac{1}{e})$ globaler Tiefpunkt.

Es gilt: $\lim\limits_{x \to \infty} f_a(x) = +\infty$.

Der lokale Tiefpunkt ist gleichzeitig der globale Tiefpunkt, also $f_a(x) \geq -\frac{1}{e}$

c) $\overline{f_a}(x) = \frac{x}{a} \cdot \ln\left(\frac{x}{a}\right)$; $a < 0$

Es muss gelten $\frac{x}{a} > 0 \Rightarrow x < 0$, also ist $D_{\overline{f_a}} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 0\}$.

Die Graphen der Funktionenschar $\overline{f_a}$, $a < 0$ gehen durch Spiegelung an der y-Achse aus den Graphen der Funktionenschar f_a mit $a > 0$ hervor. Daher besitzt die Funktionenschar $\overline{f_a}$, $a < 0$ die lokalen Tiefpunkte $T(\frac{a}{e} \mid -\frac{1}{e})$.

Hinweis: $\frac{a}{e} < 0$ für $a < 0$

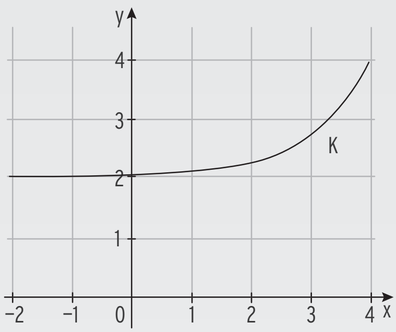
d) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 2$

($e^{x-1} \to 0$ für $x \to -\infty$)

waagrechte Asymptote: y = 2

$\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = +\infty$

($e^{x-1} \to \infty$ für $x \to \infty$)



e) $h(x) = \frac{1}{10} e^{x-1} + 2$; $h'(x) = \frac{1}{10} e^{x-1} = h''(x)$

Die Tangenten verlaufen zueinander parallel, da der Anstieg der Tangenten in allen Punkten $B(u \mid h(u))$ und $B^*(u \mid h'(u))$ gleich ist $(h'(u) = h''(u) = \frac{1}{10} e^{u-1})$.

f) Ansatz: $p(x) = ax^2 + bx + c$ Ableitung: $p'(x) = 2ax + b$

Bedingungen und LGS für a,b, c:

$p(-1) = 6$ $a - b + c = 6$

$p(-1) = 0$ $-2a + b = 0$

$p(4) = 4$ $16a + 4b + c = 4$

Lösung des LGS: $a = -\frac{2}{25}$; $b = -\frac{4}{25}$; $c = \frac{148}{25}$

Funktionsgleichung: $p(x) = -\frac{2}{25}x^2 - \frac{4}{25}x + \frac{148}{25}$ oder auch $p(x) = -0{,}08x^2 - 0{,}16x + 5{,}92$

g) $g(x) = p(x) - h(x) = -\frac{2}{25}x^2 - \frac{4}{25}x + \frac{148}{25} - (\frac{1}{10} e^{x-1} + 2)$

Stammfunktion von g: $G(x) = -\frac{2}{75}x^3 - \frac{2}{25}x^2 + \frac{148}{25}x - (\frac{1}{10} e^{x-1} + 2x)$

Lösungen Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgabenstellung 2 Aufgabe 2.1 Fischlogo Fortsetzung

g) $A = \int_{-2}^{0} k(x)\,dx = [\,G(x)\,]_{-2}^{0} \approx 7{,}91$ Der Flächeninhalt des Streifens beträgt ca. 7,9 m².

h) Maul: $m(x) = \frac{x}{4}\ln\left(\frac{x}{4}\right) + 4$

Es wird die Differenzenfunktion $d(x) = p(x) - m(x)$ gebildet.

Die Extremstelle der Differenzenfunktion ist die Abszisse des Punktes A (x_A).

Die Ordinate des Punktes ergibt sich aus der Summe des Funktionswertes von m an der Stelle x_A und der Hälfte des Funktionswertes der Differenzenfunktion d an Stelle x_A.

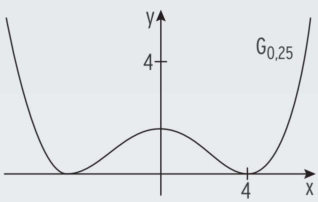
oder $x_A = \frac{1}{2}(m(x_A) + p(x_A))$

Hinweis: Dass die Extremstelle u. U. am Rand des Intervalls $0{,}5 \leq x \leq 4$ liegen kann, muss nicht betrachtet werden.

Lösungen Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2019

Aufgabenstellung 2 Aufgabe 2.2 Funktionenschar

1. $G_k : f_k(x) = 8k \cdot (kx-1)^2 \cdot (kx+1)^2;\ x \in \mathbb{R}$



a) Gemeinsame Punkte mit den Achsen:

$f_k(0) = 8k;\ f_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{k} \vee x = -\frac{1}{k}$

damit $(0 \mid 8k);\ (\frac{1}{k} \mid 0);\ (-\frac{1}{k} \mid 0)$

Abbildung 1 skaliert: $G_{0,25}$

$f_{0,25}(x) = 2 \cdot (0{,}25x - 1)^2 \cdot (0{,}25x + 1)^2;\ f_{0,25}(0) = 2$; Nullstellen von $f_{0,25}$: ± 4

b) G_{2k} geht aus G_k durch eine Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ und eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2 hervor.

$f_k(x) = 8k \cdot (kx-1)^2 \cdot (kx+1)^2$; $f_{2k}(x) = 16k \cdot (2kx-1)^2 \cdot (2kx+1)^2$;

Faktor: $8k \rightarrow 16k$ Streckung in y-Richtung mit dem Faktor

Aus (kx wird 2kx, Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$

$(kx-1)^2 \cdot (kx+1)^2 = ((kx-1) \cdot (kx+1))^2 = (k^2x^2 - 1)^2$, also $f_k(x) = 8k \cdot (k^2x^2 - 1)^2$

G_k symmetrisch bezüglich der y-Achse:

Bedingung: $f_k(-x) = f_k(x)$ $f_k(-x) = 8k \cdot (k^2(-x)^2 - 1)^2 = 8k \cdot (k^2x^2 - 1)^2 = f_k(x)$

c) Die Tangente an G_k im Punkt $(x_1 \mid f_k(x_1))$ steht senkrecht zur Gerade durch diesen Punkt und den Koordinatenursprung.

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2022

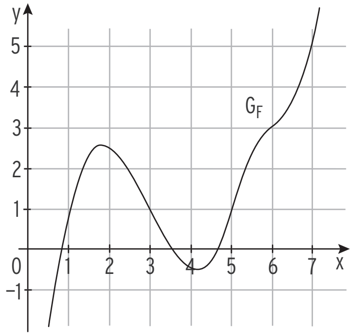
Erhöhtes Anforderungsniveau - Leistungskurs

Aufgabenvorschlag Teil 1

1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis

Betrachtet werden die in ℝ definierten Funktionen f und F, wobei F eine Stammfunktion von f ist. Die Abbildung zeigt den Graphen G_F von F.



a) Bestimmen Sie den Wert des Integrals 2

$$\int_1^7 f(x)dx\,.$$

b) Bestimmen Sie näherungsweise den Funktionswert von f an der Stelle 1. 3

Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in der Abbildung.

1.2 Analysis

Gegeben sind die in ℝ definierten ganzrationalen Funktionen

$f_k(x) = x^4 + (2 - k) \cdot x^3 - k \cdot x^2$ mit $k \in \mathbb{R}$.

a) Begründen Sie, dass der Graph von f_2 symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. 1

b) Es gibt einen Wert von k, für den 1 eine Wendestelle von f_k ist. Berechnen Sie diesen Wert von k. 4

1.3 Analysis

Gegeben ist die in ℝ definierte Funktionsschar $f_a(x) = a^2x^4 + 4ax^3$; $a \in \mathbb{R}$; $a > 0$.

a) Berechnen Sie den Wert von a, für den $x = -1$ eine Nullstelle von f_a ist. 1

b) Alle Graphen von f_a haben einen von a abhängigen Extrempunkt. Alle diese Extrempunkte liegen auf dem Graphen der Ortskurve h. 4

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ortskurve h.

1.4 Analysis

Gegeben ist die in ℝ definierte Funktionsschar f_a mit $f_a(x) = e^x(1 - ax)$; $a \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass $f_a'(x) = e^x(1 - ax - a)$ die erste Ableitung von f_a ist. 2

b) Untersuchen Sie, für welche Werte des Parameters a der Graph von f_a eine waagerechte Tangente besitzt. 3

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil (Fortsetzung)

*Hinweis: Schüler*in bearbeitet entweder die analytische Geometrie oder die Stochastik.*

1.5 Analytische Geometrie

Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$

und die Ebene E: $3x - z = -2$.

a) Begründen Sie, dass g senkrecht zu E steht. 1

b) Die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$ hat mit E keinen gemeinsamen Punkt. 4

Es gibt Geraden, die in E liegen und parallel zu h verlaufen. Bestimmen Sie eine Gleichung derjenigen dieser Geraden, die von h den kleinsten Abstand hat.

1.6 Analytische Geometrie

Gegeben ist die Ebenenschar $E_{a,b}$: $(2a - 1) \cdot x + b \cdot y - z = 1$; $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Prüfen Sie, ob F: $3x + 3y = 1 + z$ zur Ebenenschar $E_{a,b}$ gehört. 2

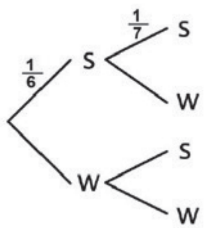
b) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Geradenschar g_b, die die Schnittgeraden der Ebenen $E_{a,b}$ mit der yz-Ebene enthält. 3

30

1.5 Stochastik

In einer Urne befinden sich schwarze (s) und weiße (w) Kugeln. Ohne Zurücklegen wird zweimal nacheinander genau eine Kugel gezogen.

Für das Zufallsexperiment gilt das nebenstehende unvollständige Baumdiagramm.



a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine weiße Kugel gezogen wird. 1

b) Ermitteln Sie die Anzahl der weißen und der schwarzen Kugeln, die sich vor dem Ziehen in der Urne befanden. 4

1.6 Stochastik

Gegeben ist eine Zufallsgröße X, die die Werte $x_i \in \{0,1,2,3,4\}$ annehmen kann.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist symmetrisch.

a) Es gilt $P(X = 2) = 0{,}6$. Bestimmen Sie $P(X \leq 2)$. 2

b) Weisen Sie nach, dass die Zufallsgröße X nicht binomialverteilt sein kann. 3

30

Aufgabenvorschlag Teil 2

Aufgabenstellung 2

Aufgabe 2.1 Ganzrationale Funktionenschar

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{a}{12}x^3 + 2x$; $a \in \mathbb{R}$.
Der Graph wird mit G_a bezeichnet.
Für die erste Ableitungsfunktion von f_a' gilt $f_a'(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{a}{4}x^2 + 2$.

a) Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f_0 für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ an. 2

b) Weisen Sie nach, dass G_0 genau einen lokalen Tiefpunkt besitzt und bestimmen Sie dessen Koordinaten. 4

c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t_0 an den Graphen G_0 im Schnittpunkt mit der y-Achse. Begründen Sie, dass t_0 Tangente aller Graphen G_a im Schnittpunkt mit der y-Achse ist. 4

(zur Kontrolle: $y = 2x$)

d) Untersuchen Sie, ob es einen Wert von a gibt, so dass die Gerade mit der Gleichung $y = 2x - 54$ Tangente an den Graphen G_a im Punkt $(6 \mid f_a(6))$ ist. 4

e) Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der zweiten Ableitungsfunktion der Funktion f_0 . Begründen Sie mithilfe dieses Graphen, dass der Punkt $(0|f(0))$ kein Wendepunkt des Graphen G_0 ist. 2

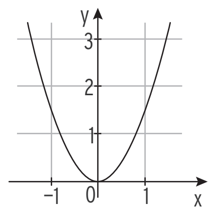


Abb. 1

f) Weisen Sie nach, dass für $a \neq 0$ alle Graphen G_a einen gemeinsamen und einen weiteren, nicht gemeinsamen Wendepunkt haben. 7

g) Es gilt: $f_6'(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2(x + 1)$.
Zeigen Sie, dass an der Stelle $x = 2$ der Anstieg des Graphen der Funktion f_6 null ist. 5
Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Funktion f_6 keine Extremstelle bei $x = 2$ hat.

h) Ermitteln Sie den Wertebereich der Funktion f_6 . 4

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabenstellung 2

Aufgabe 2.1 Ganzrationale Funktionenschar (Fortsetzung)

i) Eine ganzrationale Funktion g dritten Grades hat folgende Eigenschaften: 7

- Der Graph der Funktion g verläuft durch den Koordinatenursprung.
- Die Funktion g hat an der Nullstelle -2 die Steigung -5 .
- Die Tangente an den Graphen der Funktion g im Punkt $(2|g(2))$ verläuft parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = -9x + 9$.

Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von g.

(zur Kontrolle: $g(x)=-\frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$)

Die Abbildung 2 zeigt den Graphen der Funktion g aus Teilaufgabe i. Die Funktion g hat drei Nullstellen: $x_1 = -2;\ x_2 = 0;\ x_3 = \frac{4}{3}$.

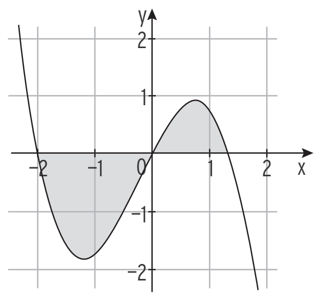


Abb. 2

j) Es gilt: $\int_{-1}^{1} f(x)dx = -\frac{1}{3}$ 3

Erläutern Sie unter Zuhilfenahme der Abbildung 2 die geometrische Bedeutung dieser Gleichung.

k) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage richtig ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung. 2

Der Graph jeder Stammfunktion von g hat zwei Hochpunkte.

l) Für einen Wert des Parameters a liegt der Punkt $(2|f_a(2))$ auf dem Graphen der Funktion g. Bestimmen Sie diesen Wert von a. 2

(zur Kontrolle: $a = 15$)

m) Ermitteln Sie alle $x \in \mathbb{R}$ für die gilt: $f_{15}(x) > g(x)$. 4

50

Aufgabenstellung 2

Aufgabe 2.2 Exponentialfunktion

1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}}$. Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von f ohne das zugrunde liegende Koordinatensystem.

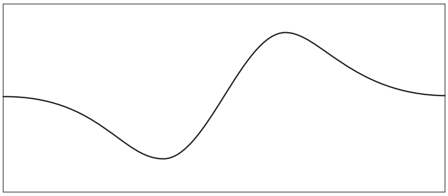


Abb. 1

a) Zeigen Sie anhand des Funktionsterms von f, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. Begründen Sie, dass f genau eine Nullstelle hat, und geben Sie den Grenzwert von f für $x \to +\infty$ an. 4

b) Bestimmen Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion f′ von f. 2

(zur Kontrolle: $f'(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}}$)

c) Untersuchen Sie rechnerisch das Monotonieverhalten von f. Ergänzen Sie in der Abbildung 1 die Koordinatenachsen und skalieren Sie diese passend. 5

d) Der Graph von f besitzt im I. Quadranten einen Wendepunkt. Zeigen Sie, dass die
3
Koordinaten dieses Punktes $(\sqrt{3} \,|\, \frac{\sqrt{3}}{e})$ sind. Geben Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f im III. Quadranten an.

Hinweis: Ohne Nachweis kann verwendet werden $f''(x) = (x^3 - x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}}$.

e) Die folgende Rechnung stellt die Lösung einer Aufgabe dar. 3

$$\frac{f(\sqrt{3}) - f(-\sqrt{3})}{\sqrt{3} - (-\sqrt{3})} = f'(x) \Leftrightarrow x_1 \approx -0{,}83;\ \ x_2 \approx 0{,}83$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung.

f) An den Graphen von f werden im I. Quadranten Tangenten gelegt, die jeweils die y-Achse in einem Punkt $(0|y_S)$ schneiden. 4

Beurteilen Sie folgende Aussage: *Es gibt eine Tangente mit $y_S > 1{,}9$.*

g) Ist g′ die erste Ableitungsfunktion einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g, so gilt 3

$$\int_u^v g'(x) \cdot e^{g(x)} dx = \left[e^{g(x)}\right]_u^v.$$

Berechnen Sie damit den Wert des Terms $\int_0^1 f(x)dx$.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabenstellung 2

Aufgabe 2.2 Exponentialfunktion (Fortsetzung)

h) Interpretieren Sie den folgenden Sachverhalt geometrisch: 3

Für jede Stammfunktion F von f und für jede reelle Zahl w > 2022 gilt

$$F(w) - F(0) = \int_0^{2022} f(x)dx.$$

2 Betrachtet wird nun die Schar der in ℝ definierten Funktionen f_a mit

$f_a(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}}$; $a \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass genau ein Graph der Schar den Punkt (1|1) enthält, und geben Sie den zugehörigen Wert von a an. 3

b) Der Graph der Funktion f_0 ist eine Gerade. Geben Sie die Steigung dieser Gerade und die Koordinaten ihres Schnittpunkts mit der y-Achse an. 2

c) Die folgenden Aussagen gelten für alle reellen Zahlen a, a_1 und a_2: 3

- $f_a(0) = 0$
- $f_a'(0) = f_0'(0)$
- $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x) \Leftrightarrow a_1 = a_2$ oder $x = 0$

Geben Sie an, was sich aus diesen Aussagen hinsichtlich des Verlaufs der Graphen der Schar folgern lässt.

d) Zeigen Sie, dass die folgende Aussage für jeden Wert von a richtig ist: 3

Wird der Graph von f_a mit dem gleichen Faktor k > 0 sowohl in x-Richtung als auch in y-Richtung gestreckt, so stellt der dadurch entstehende Graph ebenfalls eine Funktion der Schar dar.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabenstellung 2

Aufgabe 2.2 Exponentialfunktion (Fortsetzung)

Die Graphen der Schar lassen sich in die beiden folgenden Gruppen I und II einteilen:

I Der Graph hat genau zwei Extrempunkte.

II Der Graph hat keine Extrempunkte.

Die Abbildung 2 zeigt einen Graphen der Gruppe I, die Abbildung 3 einen Graphen der Gruppe II.

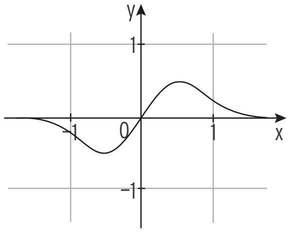


Abb. 2

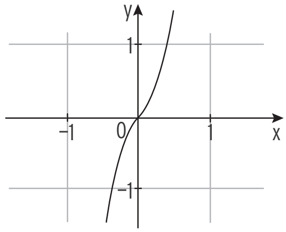


Abb. 3

Die Extremstellen von f_a stimmen mit den Lösungen der Gleichung $ax^2 = 1$ überein.

e) Geben Sie zu jeder der beiden Gruppen I und II alle zugehörigen Werte von a an und begründen Sie Ihre Angabe. 3

f) Alle Extrempunkte der Graphen der Schar liegen auf einer Gerade. Begründen Sie, dass es sich dabei um die Gerade mit der Gleichung $y = x$ handelt. 3

g) Für jeden positiven Wert von a bilden der Hochpunkt $(v|f_a(v))$ des Graphen von f_a, der Punkt $(0|\frac{2}{v})$, der Koordinatenursprung und der Punkt $(v|0)$ die Eckpunkte eines Vierecks. Bestimmen Sie ausgehend von einer geeigneten Skizze denjenigen Wert von a, für den das Viereck den Flächeninhalt 49 hat. 6

50

Hinweis für das Abitur 2023:

Aufgrund der vorgeschalteten „Auswahl durch die unterrichtende Lehrkraft“ erhalten die Abiturientinnen und Abiturienten in der Prüfung zur Bearbeitung

- in Aufgabenstellung 1 entweder die Stochastik- oder die Analytische Geometrie-Aufgabe.
- in Aufgabenstellung 3 nur **eine** Aufgabe (Stochastik- oder Analytische Geometrie).

Um allen Prüflingen die Möglichkeit zum Üben zu geben, haben die Autoren alle Aufgaben belassen.

Aufgabenstellung 3: Analytische Geometrie

Aufgabe 3: Pyramiden

Betrachtet werden die Pyramiden $ABCD_k$ mit $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $C(0|4|0)$ und $D_k(0|0|k)$, wobei $0 \leq k \leq 8$ gilt. Die Abbildung 1 zeigt eine dieser Pyramiden.

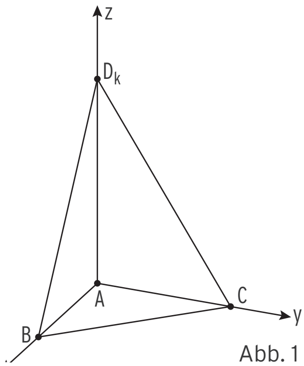


Abb. 1

a) Begründen Sie, dass das Dreieck BCD_k gleichschenklig ist. 2

b) Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ ist $M(2|2|0)$.

Begründen Sie, dass $\left|\overrightarrow{MD_k}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2\\-2\\k\end{pmatrix}\right|$ die Länge einer Höhe des Dreiecks BCD_k ist. 3

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks BCD_k.

Für jeden Wert von k liegt die Seitenfläche BCD_k in der Ebene L_k.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung von L_k in Koordinatenform. 4

(zur Kontrolle: $x + y + \frac{4}{k} \cdot z = 4$)

d) Ermitteln Sie denjenigen Wert von k, für den die Größe des Winkels, unter dem die z-Achse die Ebene L_k schneidet, 30° beträgt. 5

e) Die Punkte $U(0|0|-1)$, B, C und D_8 sind ebenfalls Eckpunkte einer Pyramide. Ermitteln Sie, um wie viel Prozent das Volumen dieser Pyramide größer ist als das Volumen der Pyramide $ABCD_8$. 3

f) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $U(0|0|-1)$ von der Ebene L_8. 2

g) Der Punkt U wird an der Ebene L_8 gespiegelt. Ermitteln Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes U′. 5

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 3: Pyramiden (Fortsetzung)

Zusätzlich zu den Pyramiden wird der in der Abbildung 2 gezeigte Quader betrachtet. Die Punkte A und $Q(1|1|3)$ sind Eckpunkte des Quaders, die Seitenflächen des Quaders sind parallel zu den Koordinatenebenen.
Für $k = 6$ enthält die Seitenfläche BCD_k der Pyramide den Eckpunkt Q des Quaders. Für kleinere Werte von k schneidet die Seitenfläche BCD_k den Quader in einem Vieleck.

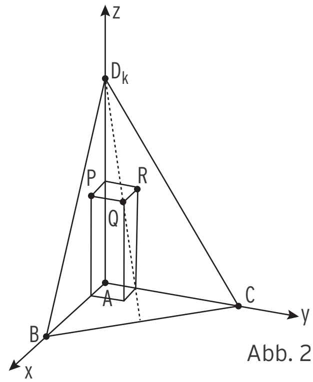


Abb. 2

h) Für einen Wert von k verläuft die Seitenfläche BCD_k durch die Eckpunkte P und R des Quaders. Bestimmen Sie diesen Wert von k. (zur Kontrolle: $k = 4$) 3

i) Geben Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Eckpunkte des Vielecks an, in dem die Seitenfläche BCD_k den Quader schneidet. 4

j) Nun wird die Pyramide $ABCD_6$, d. h. diejenige für $k = 6$, betrachtet. Dieser Pyramide werden Quader mit quadratischer Grundfläche einbeschrieben; der Punkt A ist gemeinsamer Eckpunkt der Quader. Die Seitenflächen der Quader sind parallel zu den Koordinatenebenen. Die Höhe h der Quader durchläuft alle Werte mit $0 < h < 6$. Für jeden Wert von h liegt der Eckpunkt Q_h in der Seitenfläche BCD_6 der Pyramide. Die Abbildung 3 zeigt einen dieser Quader. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts Q_h in Abhängigkeit von h. 4

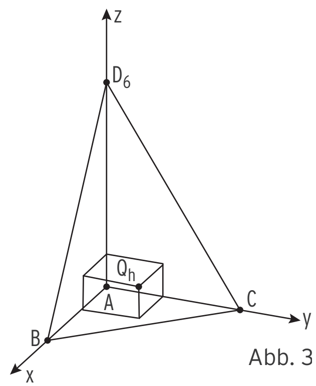


Abb. 3

k) Eine Ebene T, die parallel zur yz-Ebene liegt, schneidet die Pyramide $ABCD_6$, so, dass die beiden entstehenden Teilkörper das gleiche Volumen haben. Ermitteln Sie die Stelle, an der die Ebene T die x-Achse schneidet. 5

$\overline{40}$