Ott
Rosner

Mathematik für berufliche Gymnasien – Analysis, Stochastik Wahlgebiet: Matrizen, Prozesse

Abitur 2019

mit Lernvideos

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner
Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule Schwäbisch Hall
Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

* * * * *

15. Auflage 2018

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-**0450-3**

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung dient zur Vorbereitung auf das **Abitur 2019** an beruflichen Gymnasien und ist auf die neue Prüfungsordnung abgestimmt.

Die Aufgaben sind nach den Prüfungsgebieten Analysis mit Anwendungen, Stochastik und Lineare Algebra gegliedert, was dem Schüler/der Schülerin ein gezieltes Üben ermöglicht.

Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.

Dem neuen Abiturmodus wird durch eine Vielzahl von Aufgaben für Teil 1, der ohne Hilfsmittel bearbeitet werden muss, und für die Teile 2 – 4, bei denen Hilfsmittel zugelassen sind, Rechnung getragen.

Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben ist unterschiedlich, um den beruflichen Gymnasien aller Richtungen gerecht zu werden.

Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.

Da die Aufgabensammlung allen Schülern/Schülerinnen bei der **selbstständigen** Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben.

An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Zur Unterstützung des Lernerfolges ist die Hauptprüfung 2016/2017 und die Hauptprüfung 2017/2018 in einigen **Lernvideos** aufgearbeitet. In der Sprache der Abiturienten und Abiturientinnen werden alle Aufgabenteile ausführlich gelöst.

Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der Abiturprüfung in Mathematik 5

I Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung 7

1 Übungsaufgaben 7
1.1 Analysis Übungsaufgaben 7
1.2 Stochastik Übungsaufgaben 13
1.3 Matrizen und Prozesse Übungsaufgaben 17

Lösungen Übungsaufgaben 22

2 Aufgabensätze Teil 1 ohne Hilfsmittel 39

Lösungen Aufgabensätze Teil 1 ohne Hilfsmittel 52

II Teil der Abiturprüfung mit Hilfsmittel 64

Übungsaufgaben 64
Teil 2 Analysis – Anwendungsorientierte Analysis 64
Teil 3 Stochastik 80
Teil 4 Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse 88

Lösungen Übungsaufgaben 98

III Musteraufgabensätze zur Abiturprüfung 130

Aufgabensatz 1 131
Aufgabensatz 2 140
Aufgabensatz 3 149
Aufgabensatz 4 158
Aufgabensatz 5 167
Lösungen Musteraufgabensätze zur Abiturprüfung 176
Lösungen Aufgabensatz 1 176
Lösungen Aufgabensatz 2 187
Lösungen Aufgabensatz 3 199
Lösungen Aufgabensatz 4 212
Lösungen Aufgabensatz 5 223

IV Hauptprüfungen 234
Hauptprüfung 2016/2017 235
Lösungen Hauptprüfung 2016/2017 244
Hauptprüfung 2017/2018 252
Lösungen Hauptprüfung 2017/2018 261

I Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

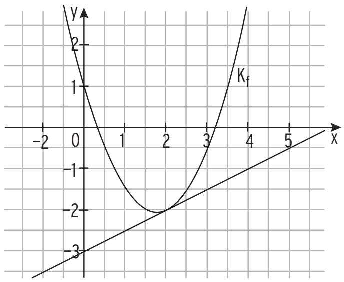
1 Übungsaufgaben

1.1 Analysis Übungsaufgaben

Lösungen Seite 22 - 24

Aufgabe 1

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f.
Ermitteln Sie einen möglichen Funktionsterm.



Aufgabe 2

Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 4$ besitzt einen Wendepunkt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt.

Aufgabe 3

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung. Der Punkt $H(1\,|\,1)$ ist der Hochpunkt des Schaubilds.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabe 4

K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^{x-3} - 2$.
Die Tangente an K an der Stelle $x = 3$ schneidet die Asymptote von K in S.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{2} (x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)\,dx$.

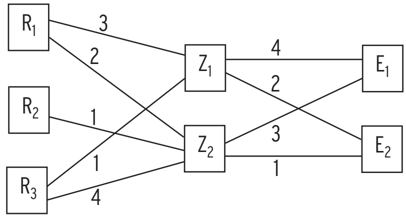
Interpretieren Sie den Integralwert mithilfe geeigneter Flächenstücke.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 2x$.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

Aufgabe 14 Lösungen Seite 38

Bei einem zweistufigen Produktionsprozess wird der Bedarf je Mengeneinheit an Roh- und Zwischenprodukten für die Endprodukte in dem folgenden Verflechtungsdiagramm verdeutlicht.



Die Kosten für je eine Mengeneinheiten der Rohstoffe entsprechen dem Zeilenvektor (2 5 3).

1 Zeigen Sie, dass für die Rohstoff-Endprodukt-Matrix gilt: $C_{RE} = \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 3 & 1 \\ 16 & 6 \end{pmatrix}$.

2 Nehmen Sie Stellung zu der Behauptung, dass die Rohstoffkosten für 10 ME von E_1 über 1000 GE betragen.

Aufgabe 15

Ein Unternehmen stellt aus drei unterschiedlichen Bauteilen B1, B2 und B3 die Endprodukte E1, E2 und E3 her. Das Unternehmen hat noch 70 ME von B1 und jeweils 60 ME von B2 und B3 auf Lager.

1 Die Materialverflechtung ist der Matrix M_{BE} zu entnehmen: $M_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie, wie viele ME der Endprodukte hergestellt werden können, wenn der Lagerbestand vollständig aufgebraucht werden soll.

2 Durch eine Veränderung der Produktion werden nun für die Herstellung von einer ME von E3 eine zusätzliche ME von B3 benötigt. Als umgeformte erweiterte Koeffizienten-Matrix ergibt sich bei obigen Lagerbeständen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 70 \\ 0 & 2 & 6 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Matrix im Sachzusammenhang.

Lösungen – Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

Lösungen 1.1 Analysis Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Die Abbildung zeigt eine Parabel K_f von f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Ableitung: $f'(x) = 2a \cdot x + b$

Bedingungen ablesen und LGS aufstellen: $f(0) = 1$ $\quad c = 1$

$f(2) = -2 \quad 4a + 2b + c = -2$

$f'(2) = \frac{1}{2} \quad 4a + b = \frac{1}{2}$

Einsetzen von c = 1 in $4a + 2b + c = -2$: $\quad 4a + 2b = -3$ $\quad +$

$4a + b = \frac{1}{2} \quad | \cdot (-1)$

Addition ergibt: $\quad b = -3{,}5$

Einsetzen in z. B. $4a + b = \frac{1}{2}$ ergibt $\quad 4a - 3{,}5 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$

Möglicher Funktionsterm $\quad f(x) = x^2 - 3{,}5x + 1$

Aufgabe 2

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 4$; Ableitungen: $f'(x) = -3x^2 + 6x - 1$; $f''(x) = -6x + 6$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ $\quad -6x + 6 = 0$ für $x = 1$

Mit $f'''(x) = -6 \neq 0$ ist x = 1 eine Wendestelle.

Mit $f(1) = -3$ ergibt sich der Wendepunkt $W(1 \mid -3)$.

Ansatz für die Tangente: $\quad y = mx + b$

$f'(1) = 2 = m$; Punktprobe mit W: $\quad -3 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -5$

Gleichung der Tangente: $\quad y = 2x - 5$

Aufgabe 3

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen: $\quad f(0) = 0 \quad d = 0$

$f'(0) = 0 \quad c = 0$

$H(1 \mid 1)$ der Hochpunkt: $f(1) = 1 \quad a + b + c + d = 1$

$f'(1) = 0 \quad 3a + 2b + c = 0$

Aufgabe 3

c und d eingesetzt: $\begin{aligned} a + b &= 1 \quad &|\cdot 3 \\ 3a + 2b &= 0 \quad &|\cdot (-1) \end{aligned}$ +

Additionsverfahren: $b = 3$

Einsetzen in $a + b = 1$ ergibt $a = -2$

Funktionsterm: $f(x) = -2x^3 + 3x^2$

Aufgabe 4

K: $f(x) = e^{x-3} - 2$; Ableitung: $f'(x) = e^{x-3}$

Ansatz für die Tangente: $y = mx + c$

Mit $f(3) = -1$ und $f'(3) = 1 = m$

erhält man mit durch einsetzen: $-1 = 1 \cdot 3 + c \Rightarrow c = -4$

Gleichung der Tangente: $y = x - 4$

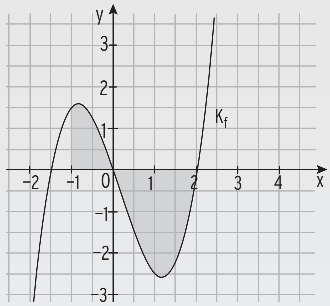
Die Asymptote hat die Gleichung $y = -2$.

Schnittpunkt von Tangente und Asymptote: $-2 = x - 4 \Rightarrow x = 2$

Koordinaten des Schnittpunktes: $S(2\,|-2)$

Aufgabe 5

$$\int_{-1}^{2} (x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{2}$$
$$= 4 - \frac{4}{3} - 6 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{3}{2}\right)$$
$$= -2 - \frac{4}{3} - \frac{3 + 2 - 18}{12} = -\frac{27}{12}$$
$$= -2{,}25$$



(Flächenbilanz)

Das Flächenstück zwischen K_f und der x-Achse oberhalb der x-Achse ist um 2,25 kleiner als das Flächenstück zwischen K_f und de x-Achse unterhalb der x-Achse.

Aufgabe 6

Schnittstellen von f und g durch

Gleichsetzen: $f(x) = g(x)$ $-x^2 + 3 = 2x$

Nullform: $x^2 + 2x - 3 = 0$

Lösung mit Formel: $x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_{1|2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$

Schnittstellen = Integrationsgrenzen: $x_1 = -3$; $x_2 = 1$

Integration von -3 bis 1 über $f(x) - g(x)$: $\int_{-3}^{1} (f(x) - g(x))dx$

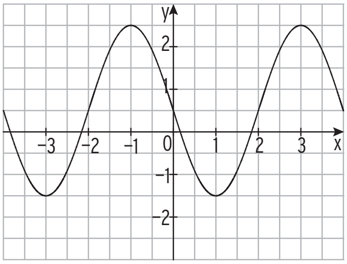
III Musteraufgabensätze zur Abiturprüfung

Aufgabensatz 1 **Lösungen Seite 176 - 186**

Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis **Punkte**

1.1 Gegeben ist das folgende Schaubild einer Funktion: 6



Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) Der Wert der ersten Ableitung an der Stelle $x = 0$ ist negativ.

b) Der Funktionswert an der Stelle $x = -2$ ist positiv.

c) Der Wert der ersten Ableitung an der Stelle $x = -3$ ist null.

d) Der Wert der zweiten Ableitung an der Stelle $x = 3$ ist positiv.

1.2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - 6x;\ x \in \mathbb{R}$. 4
Berechnen Sie, an welchen Stellen das zugehörige Schaubild K eine waagerechte Tangente aufweist.

1.3 Die Funktion g hat die Eigenschaften: $g(3) = 0$ und $\int_0^6 g(x)dx = 0$ 4
Skizzieren Sie ein mögliches Schaubild von g und begründen Sie Ihre Vorgehensweise.

1.4 Das Schaubild einer trigonometrischen Funktion ist symmetrisch zur y-Achse, verläuft durch den Punkt $S(0 \mid 3)$ und hat in $T(3 \mid 0)$ einen Tiefpunkt. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm an. 3

Aufgabensatz 1

Teil 1 ohne Hilfsmittel

2 Stochastik

Punkte

Bei der Wintersportart Biathlon wird bei jeder Schießeinlage auf fünf Scheiben geschossen. Ein Biathlet tritt bei einem Einzelrennen zu einer Schießeinlage an, bei der er auf jede Scheibe einen Schuss abgibt. Diese Schießeinlage wird modellhaft durch eine Bernoullikette mit der Länge 5 und der Trefferwahrscheinlichkeit p beschrieben.

2.1 Gib für die folgenden Ereignisse A, B und C jeweils einen Term an, der die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses in Abhängigkeit von p beschreibt. — 3

A: „Der Biathlet trifft bei genau vier Schüssen."

B: „Der Biathlet trifft nur bei den ersten beiden Schüssen."

C: „Der Biathlet trifft bei höchstens vier Schüssen."

2.2 Erläutere anhand eines Beispiels, dass die modellhafte Beschreibung der Schießeinlage durch eine Bernoullikette unter Umständen der Realität nicht gerecht wird. — 2

3 Lineare Algebra: Matrizen

3.1 Die monatliche Entwicklung einer Population mit den drei Stufen S_1, S_2 und S_3 wird beschrieben durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$.

3.1.1 Zeichnen Sie das zugehörige Übergangsdiagramm — 1

3.1.2 Zeigen Sie, dass sich die Verteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$ von Monat zu Monat wiederholt. — 2

3.1.3 Tim: „Es liegt also eine zyklische Populationsentwicklung mit einem einmonatigen Zyklus vor." Beurteilen Sie diese Aussage. — 2

3.2 Untersuchen Sie die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems. — 3

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 18 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ x_2 + x_3 &= 8 \end{aligned}$$

30

Aufgabensatz 1

Teil 2 mit Hilfsmittel

Aufgabe 1

Analysis **Punkte**

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{x-1} - x$; $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild der Funktion f heißt K.

1.1 Zeichnen Sie das Schaubild K in ein Koordinatensystem ein. Geben Sie die Gleichung der Asymptote von K an und zeichnen Sie diese ebenfalls ein. 5

1.2 Untersuchen Sie K auf Extrempunkte. 4

1.3 Das Schaubild K und die 2. Winkelhalbierende schließen mit der y-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = a$ für $a < 0$ eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von a. Gegen welchen Wert strebt dieser Flächeninhalt für $a \to -\infty$? 4

2.1 Das zur y-Achse symmetrische Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades schneidet die y-Achse im Punkt $S(0|2)$, es hat an der Stelle $x = 1$ die Steigung -4 und einen Extrempunkt an der Stelle $x = \sqrt{2}$. Bestimmen Sie den zugehörigen Funktionsterm. 4

2.2 Zeigen Sie: Die Wendestelle einer Polynomfunktion 3. Grades liegt bei $x = -2$, wenn die Koeffizienten von x^3 und x^2 das Verhältnis $1 : 6$ haben. 3

Lösungen Musteraufgabensätze zum Abitur

Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis

1.1

a) Aussage wahr. Bei $x = 0$ fällt die Kurve.

b) Aussage wahr. Bei $x = -2$ befindet sich das Schaubild oberhalb der x-Achse.

c) Aussage wahr. Bei $x = -3$ hat das Schaubild einen Tiefpunkt mit Steigung 0.

d) Aussage falsch. Bei $x = 3$ ist das Schaubild rechtsgekrümmt, daher hat die zweite Ableitung hier einen negativen Wert.

1.2 $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - 6x;\ x \in \mathbb{R};\ f'(x) = x^4 + x^2 - 6$

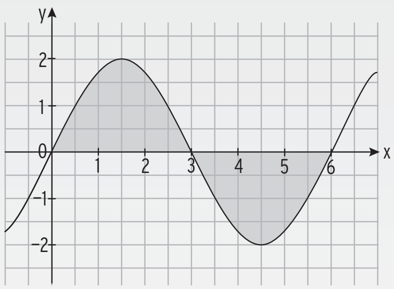
Stellen mit waagerechter Tangente

Bedingung: $f'(x) = 0$	$x^4 + x^2 - 6 = 0$
Substitution: $(u = x^2)$	$u^2 + u - 6 = 0$
Lösungen in u:	$u_{1\|2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$
Lösungen der Gleichung in u:	$u_1 = 2;\ u_2 = -3$
Lösungen in x:	$u_1 = 2 \Rightarrow x_{1\|2} = \pm\sqrt{2}$

Bei $x_{1|2} = \pm\sqrt{2}$ weist das Schaubild eine waagerechte Tangente auf.

1.3 $g(3) = 0$: Das Schaubild muss in x=3 einen gemeinsamen Punkt mit der x-Achse aufweisen.

$\int_0^6 g(x)dx = 0$: Die „Flächenbilanz“ muss Null ergeben, d.h. die Inhalte der Flächen zwischen Schaubild und x-Achse müssen ober- und unterhalb der x-Achse gleich groß sein.



Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis

1.4 Aufgrund der Symmetrie zur y-Achse wird eine Kosinusfunktion verwendet:

$f(x) = a \cdot \cos(k \cdot x) + b$

Diese weist den Hochpunkt S(0 | 3) und den Tiefpunkt T (3 | 0) auf.
Man erhält:
Amplitude: $a = \frac{y_H - y_T}{2} = \frac{3-0}{2} = \frac{3}{2}$
Mittellinie: $b = \frac{y_H + y_T}{2} = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}$
Zwischen dem Hoch- und Tiefpunkt liegt eine halbe Periodenlänge.

Die Periodenlänge p = 6 führt auf $k = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Möglicher Funktionsterm: $f(x) = \frac{3}{2}\cos(\frac{\pi}{3}x) + \frac{3}{2}$

2 Stochastik

2.1 X: Anzahl der Treffer, X ist $B_{5;\,p}$-verteilt

$P(A) = P(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)^1 = 5 \cdot p^4 \cdot (1-p)$ mit $\binom{5}{4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \binom{5}{1} = \frac{5}{1} = 5$

$P(B) = p^2 \cdot (1-p)^3$ (Reihenfolge ist festgelegt)

$P(C) = P(X \leq 4) = 1 - P(5 \text{ Treffer}) = 1 - p^5$

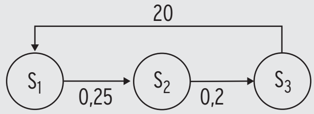
2.2 Eine Voraussetzung für eine Bernoullikette ist eine konstante Trefferwahrscheinlichkeit des Schützen. Dies ist in der Realität nicht gegeben, da der Biathlet beim ersten Schuss beispielsweise noch einen erhöhten Puls hat und damit möglicherweise eine geringere Trefferwahrscheinlichkeit.
Zudem ist die Trefferwahrscheinlichkeit auch stets vom Wind abhängig, der sich permanent ändert.

Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 1 ohne Hilfsmittel

3 Matrizen und Prozesse

3.1.1 Übergangsdiagramm



3.1.2 Für eine stationäre Verteilung gilt $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Berechnung von $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$

Es gilt $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Somit wiederholt sich die gegebene Verteilung von Monat zu Monat.

3.1.3 Es gilt: $0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 20 = 1$.

Somit liegt hier eine zyklische Population mit
einem dreimonatigen und nicht mit einem einmonatigen Zyklus vor.
Jede beliebige Startverteilung wiederholt sich nach drei Monaten.

Nur bestimmte Verteilungen, beispielsweise $\begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$, wiederholen sich monatlich.

3.2 Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems in Matrixform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 18 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Man erhält eine „Nullzeile“, ein Parameter ist frei wählbar. Das lineare Gleichungssystem ist also mehrdeutig lösbar
(besitzt unendlich viele Lösungen).

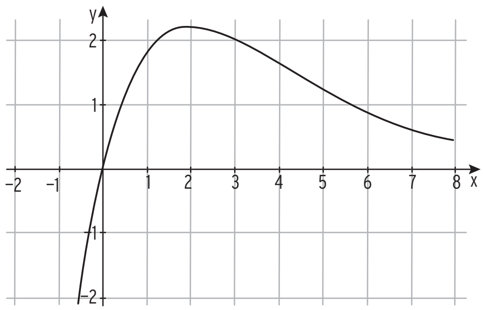
Hauptprüfung 2017/2018

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Lösungen Seite 261 - 272**

Lösungen Seite 261 - 272

Analysis **Punkte**

1.1 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds K_f einer Funktion f. 6



Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründen Sie.

(1) Es gilt: $f''(1) < 0$.

(2) Die Steigung von f an der Stelle $x = 0$ ist kleiner als die durchschnittliche Änderungsrate von f im Intervall $[0\,;\,3]$.

(3) Das Schaubild jeder Stammfunktion F von f hat an der Stelle $x = 0$ einen Tiefpunkt.

1.2 Berechnen Sie die erste Ableitung g' für die jeweilige Funktion g. 3

(1) $g(x) = (2x + 1)^2$

(2) $g(x) = (x + 1) \cdot e^x$

1.3 Gegeben ist die Funktion h durch $h(x) = \cos(\pi \cdot x) + 1$ mit $x \in \mathbb{R}$.

1.3.1 Skizzieren Sie das Schaubild von h für $0 \leq x \leq 4$. 3

1.3.2 Berechnen Sie: $\int_0^2 h(x)\,dx$ 3

$\overline{15}$

Teil 1 ohne Hilfsmittel

Stochastik **Punkte**

2 In der norwegischen Hauptstadt Oslo ist jeder zehnte PKW ein Elektroauto.

2.1 Auf einem kommunalen Parkplatz in Oslo beträgt die Parkgebühr für PKW fünf norwegische Kronen. Elektroautos parken kostenlos. Pro Tag wird der Parkplatz von 300 PKW genutzt. 2

Bestimmen Sie die Höhe der Einnahmen, die man erwarten kann.

2.2 Im Folgenden werden in Oslo zufällig vorbeifahrende PKW betrachtet.

2.2.1 Drei PKW fahren vorbei. 4

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Unter diesen PKW ist genau ein Elektroauto.

B: Unter diesen PKW ist mindestens ein Elektroauto.

2.2.2 Definieren Sie die Zufallsvariable X und formulieren Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnet werden kann: 2

$P(X \leq 2) = 0{,}9^{100} + 100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^{99} + \binom{100}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{98}$

$\overline{8}$

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

Punkte

3.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems: 3

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3$$
$$3x_2 - x_3 = 5$$

3.2 Im Folgenden sind alle vorliegenden $(n \times n)$ - Matrizen invertierbar. 4

E ist die Einheitsmatrix.

Lösen Sie die Matrizengleichung $(B + A) \cdot (E - A) = (X - B) \cdot A$ nach X auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

$\overline{7}$

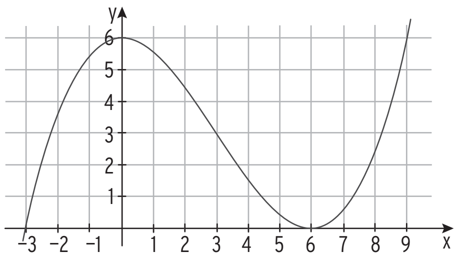
Hauptprüfung 2017/2018

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Analysis **Punkte**

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds K von f.



1.1.1 Bestimmen Sie die reellen Werte von a, b und c, sodass gilt: 3

$f(x) = a \cdot (x - b) \cdot (x - c)^2$; $x \in \mathbb{R}$.

1.1.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von K und zeigen Sie, dass dieser auf der ersten Winkelhalbierenden liegt. 4

1.1.3 Das Schaubild K schließt mit der x-Achse eine Fläche A ein, die von der y-Achse in zwei Flächen unterteilt wird. 4

Bestimmen Sie den prozentualen Anteil des Inhalts der kleineren Fläche am Inhalt von A.

1.1.4 Geben Sie jeweils die Gleichung einer Geraden durch den Punkt $(0|6)$ an, die mit K 6

(1) genau einen Punkt

(2) genau drei Punkte

gemeinsam hat.

Die Gerade mit der Gleichung $y = m \cdot x + 6$ soll mit K genau zwei gemeinsame Punkte haben. Bestimmen Sie die beiden Werte für die Steigung m.

1.2 Die Funktion g ist gegeben durch 3

$$g(x) = \int_1^{x^2+1} \sin(2t)\,dt \text{ mit } x \in \mathbb{R}.$$

Gabi behauptet, dass die erste Ableitung der Funktion g wie folgt lautet:

$g'(x) = \sin(2x^2 + 2) - \sin(2)$. Beurteilen Sie diese Behauptung.

20

Lösungen Hauptprüfung 2017/2018

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Analysis

www.mvurl.de/qbc8

1.1.1 $f(x) = a \cdot (x - b) \cdot (x - c)^2$ ist der Nullstellenansatz des Funktionsterms.

Am Schaubild ist zu erkennen, dass f bei x = − 3 eine einfache Nullstelle besitzt. Somit muss b den Wert − 3 haben.

In x = 6 hat f eine doppelte Nullstelle, somit hat c den Wert 6.

Der Wert $a = \frac{1}{18}$ kann aus $f(x) = \frac{1}{18}x^3 - \ldots$ übernommen werden.

(Zusatz: Man erhält insgesamt den Term $f(x) = \frac{1}{18} \cdot (x + 3) \cdot (x - 6)^2$)

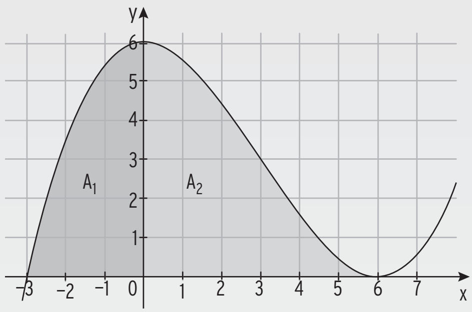
1.1.2 Ableitungen: $f'(x) = \frac{1}{6}x^2 - x$; $f''(x) = \frac{1}{3}x - 1$; $f'''(x) = \frac{1}{3}$

Bedingung für Wendepunkt: $f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{3}x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{3}x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 3$

Wegen $f'''(3) = \frac{1}{3} \neq 0$ und $f(3) = 3$ hat K in W(3 | 3) einen Wendepunkt.

Die erste Winkelhalbierende hat die Gleichung y = x. Alle Punkte, bei welchen sich die x- und die y-Koordinate entsprechen, liegen auf der ersten Winkelhalbierenden. Somit liegt auch W(3 | 3) darauf.

Alternativ Punktprobe: Einsetzen der Koordinaten von W(3 | 3) in y = x ergibt 3 = 3 und damit eine wahre Aussage.



1.1.3 Die Fläche A, welche K mit der x-Achse einschließt, wird durch die y-Achse in die beiden Teilflächen A_1 und A_2 unterteilt.

Berechnung der Flächeninhalte:

$$A_1 = \int_{-3}^{0} \left(\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6\right) dx = \left[\frac{1}{72}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 6x\right]_{-3}^{0}$$

$$= \frac{1}{72} \cdot 0^4 - \frac{1}{6} \cdot 0^3 + 6 \cdot 0 - \left(\frac{1}{72} \cdot (-3)^4 - \frac{1}{6} \cdot (-3)^3 + 6 \cdot (-3)\right) = \frac{99}{8} \approx 12{,}38$$

$$A_2 = \int_{0}^{6} \left(\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6\right) dx = \left[\frac{1}{72}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 6x\right]_{0}^{6}$$

$$= \frac{1}{72} \cdot 6^4 - \frac{1}{6} \cdot 6^3 + 6 \cdot 6 = 18$$

Lösungen Hauptprüfung 2017/2018

Teil 2 mit Hilfsmittel Analysis Aufgabe 1 Seite 1/2

1.1.3 Der Inhalt der Fläche A beträgt somit: $A = A_1 + A_2 = \frac{99}{8} + 18 = \frac{243}{8}$

(Hinweis: Die Berechnung von A ist auch durch $\int_{-3}^{6} (\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6)\,dx = \frac{243}{8}$ möglich.)

Prozentualer Anteil des Inhalts der kleineren Fläche am Inhalt von A:

$\frac{A_1}{A} = \frac{\frac{99}{8}}{\frac{243}{8}} = \frac{11}{27} = 0{,}4074...$ oder auch $\frac{12{,}38}{30{,}38} = 0{,}4075$

Dieser beträgt also ca. 40,7 %.

1.1.4 Zu möglichen Geradengleichungen, welche mit K einen bzw. drei Punkte gemeinsam haben sollen, gelangt man beispielsweise durch eigene Skizzen am Schaubild, welches auf dem Aufgabenblatt abgedruckt ist.

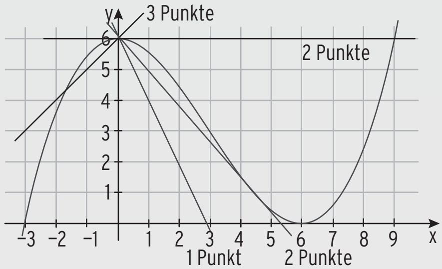
(1) Genau einen gemeinsamen Punkt:

z.B. $y = -3x + 6$ oder $x = 0$

(2) Genau 3 gemeinsame Punkte:

z.B. $y = 2x + 6$

In beiden Fällen sind weitere Lösungen möglich.



Bestimmung der beiden möglichen Werte für m, sodass die Gerade mit der Gleichung $y = m \cdot x + 6$ mit K genau zwei gemeinsame Punkte besitzt:

Bedingung: $\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6 = mx + 6 \quad | - mx - 6$

$\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - mx = 0$

Ausklammern von x: $x \cdot (\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{2}x - m) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x = 0 \vee \frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{2}x - m = 0$

Die Gerade und K haben in $x = 0$ also in jedem Fall einen gemeinsamen Punkt. Die Gleichung $\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{2}x - m = 0$ soll also auf genau eine weitere Lösung, welche ungleich 0 ist, führen.

Anwenden der Lösungsformel ergibt: $\frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{9}m}}{\frac{1}{9}}$

Für $\frac{1}{4} + \frac{2}{9}m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{8}$ erhält man genau eine weitere Lösung ungleich 0. Somit stellt $m = -\frac{9}{8}$ einen der beiden gesuchten Werte dar.

Hinweis: Klammert man $\frac{1}{18}x$ aus: $\frac{1}{18}x \cdot (x^2 - 9x - 18m) = 0$ erhält man die

Diskriminante $D = 81 + 72m$

Lösungen Hauptprüfung 2017/2018

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1** **Seite 2/2**

Analysis

1.1.4 Für m = 0 erhält man aus der Lösungsformel die Lösungen x = 0 und x = 9. Die Lösung x = 0 entspricht dann der bereits oben ermittelten Lösung. Für diesen Steigungswert ergeben sich also ebenfalls genau zwei gemeinsame Punkte. Dies ist der zweite gesuchte m-Wert.

(Hinweis: Für m = 0 lautet die zugehörige Geradengleichung: y = 6

1.2 1. Lösungsweg („konkret")

$$g(x) = \int_1^{x^2+1} \sin(2t)\,dt = \left[-\frac{1}{2} \cdot \cos(2t)\right]_1^{x^2+1}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot (x^2+1)) - (-\frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot 1)) = -\frac{1}{2} \cdot \cos(2x^2+2) + \frac{1}{2} \cdot \cos(2)$$

Durch Ableiten mit der Kettenregel erhält man:

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x^2+2) \cdot 4x = \sin(2x^2+2) \cdot 2x \neq \sin(2x^2+2) - \sin(2).$$

Behauptung ist falsch.

2. Lösungsweg („allgemein")

H ist eine Stammfunktion von h mit h(t) = sin(2t). Dann gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$g(x) = \int_1^{x^2+1} \sin(2t)\,dt = [H(t)]_1^{x^2+1} = H(x^2+1) - H(1)$$

Durch Ableiten mit der Kettenregel erhält man:

$$g'(x) = H'(x^2+1) \cdot 2x = \sin(2x^2+2) \cdot 2x \neq \sin(2x^2+2) - \sin(2).$$

Die Behauptung ist falsch.