Aufgaben

1. Vervollständigen Sie den Text.

   a) Der Term $3(a + b)$ ist ein $\boxed{}$. a und b sind $\boxed{}$.

   b) Der Term $\frac{5}{4}x^3 + x^2$ ist eine $\boxed{}$. x^3 und x^2 sind $\boxed{}$. 3 ist eine $\boxed{}$.

   c) Der Term $\frac{3}{a-b}$ ist ein $\boxed{}$. $a - b$ ist der $\boxed{}$ und eine $\boxed{}$.

2. Ergibt der Term $(a - 4 \cdot (3b - 2c)) \cdot 2$ die Zahl 60, wenn man für $a = 5$; $b = -2$ und $c = -7$ einsetzt?

   Falls Sie ein anderes Ergebnis haben, ändern Sie den ursprünglichen Term so ab, dass 60 das Ergebnis ist.

3. Ordnen Sie durch einen Pfeil dem Text den richtigen Term zu.

Produkt mit drei Faktoren	$a \cdot b + c$
	$a \cdot (b - c) \cdot d$
	$b + a \cdot c + d$

4. Vereinfachen Sie die folgenden Brüche: $\frac{\frac{1}{a}}{7}$; $\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}}$; $\frac{\frac{1}{a}}{a}$; $\frac{\frac{1}{a}}{\frac{5}{4a}}$; $\frac{\frac{3a}{4}}{\frac{6a}{8}}$.

5. Zeigen Sie an Hand eines Beispiels mit Zahlen den Unterschied zwischen $-\frac{x^2}{2}$ und $\left(-\frac{x}{2}\right)^2$.

6. Überprüfen Sie, ob die Rechenausdrücke $x^2 - bx + c$ und $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 - 4c}{4}$ gleich sind.

7. Überprüfen Sie, ob die folgenden Termumformungen korrekt sind.
   $-3(4x + y^2)^2 = -3(16x^2 + y^4) = -48x^2 + 3y^4$. Begründen Sie.

8. Welche Ziffern müssen eingesetzt werden, damit die Gleichung stimmt?

   a) $\sqrt{\boxed{}\boxed{1}} = 9$ b) $\sqrt{\boxed{}\boxed{}} \cdot \sqrt{121} = 55$

9. Füllen Sie die Leerfelder aus.

   a) $x^2 + \boxed{}x + 9 = (x + \boxed{})^2$ b) $x^2 - x - \boxed{} = (x - \boxed{})(x + 4)$

   c) $x^2 - 8x + \boxed{} = (x - \boxed{})^2$ d) $x^2 - \boxed{}x + 6 = (x - \boxed{})(x - 3)$

   e) $x^2 + \boxed{}x + 2{,}25 = (x + \boxed{})^2$ f) $x^2 - \boxed{} = (x - \boxed{})(x + 4)$

Was man wissen sollte... **zum Lösen quadratischer Gleichungen**

Die quadratische Gleichung wird in Nullform umgeformt (wenn nötig).

Lösung mit Formel:

$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0}$ — **Lösung mit der abc-Formel**

$$x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{mit } D = b^2 - 4ac$$

$\mathbf{x^2 + px + q = 0}$ — **Lösung mit der pq-Formel**

$$x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{mit } D = \frac{p^2}{4} - q$$

Die **Anzahl der Lösungen** hängt von der **Diskriminante D** ab.

D > 0	**D = 0**	**D < 0**
zwei Lösungen	**eine Lösung**	**keine Lösung**

Lösung ohne Formel:

$\mathbf{ax^2 + c = 0;\ a \neq 0}$ — **Umformung** zu $x^2 = -\frac{c}{a}$

Lösung durch **Wurzelziehen.**

$\mathbf{ax^2 + bx = 0;\ a \neq 0}$ — Lösung durch **Ausklammern**

$x(ax + b) = 0$

Satz vom Nullprodukt anwenden.

Zerlegung in Linearfaktoren — $\mathbf{x^2 + px + q} = (x - x_1)(x - x_2) = 0$

(Faktorisieren)

mit Hilfe der **Binomischen Formeln:**

$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$

$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$

$(x - a)(x + a) = x^2 - a^2$

oder

mithilfe des **Satzes von Vieta:** $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$

5. Entscheiden Sie, ob die Abbildung das Schaubild einer Funktion zeigt.

Abb.1

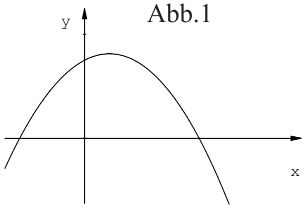


Abb.2

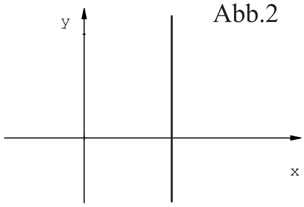
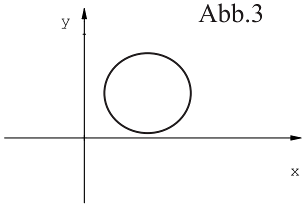


Abb.3



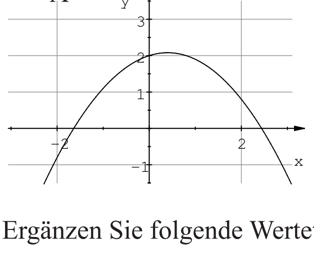
6. Die Funktion wird beschrieben durch den Funktionsterm f(x).

   Ergänzen Sie die folgende Tabelle:

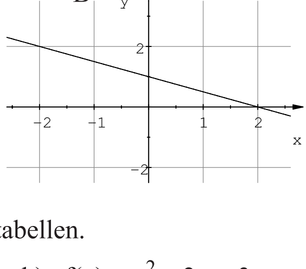
x	$f(x) = \frac{1}{4}x$	$f(x) = 3 - 4x$	$f(x) = 0{,}25x^2$	$f(x) = x^2 - 3x$	$f(x) = \frac{2}{x}$
3					
– 4					
$-\frac{2}{3}$					
0,6					
a					
a + 1					
– u					

7. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = ax^2 + b$; $a \neq 0$, $x, b \in \mathbf{R}$.
   Geben Sie für jedes der abgebildeten Schaubilder, das nicht zu einer Funktion f gehören kann, ein ausschließendes Argument an. Bestimmen Sie gegebenenfalls a und b.

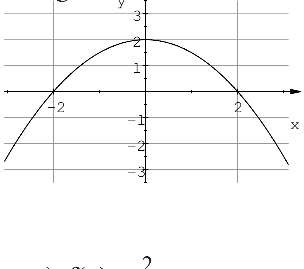
A



B



C



8. Ergänzen Sie folgende Wertetabellen.

a) $f(x) = 3x - 5$

x	–2		$\frac{1}{2}$	
f(x)		– 5		1

b) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

x	– 2		0	
f(x)		3		6

c) $f(x) = \frac{2}{x^2}$

x	0,5		1,5	
f(x)		2		0,5

Schnittpunkte von Parabel und x-Achse

Die Parabel K ist das Schaubild von f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$; $x \in \mathbf{R}$.

a) Wo schneidet K die x-Achse? Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes.

b) Verschieben Sie K so, dass die verschobene Parabel die x-Achse berührt.

Lösung

a) **Bedingung für die Schnittstellen mit der x-Achse:** $f(x) = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 0 \mid \cdot 2$

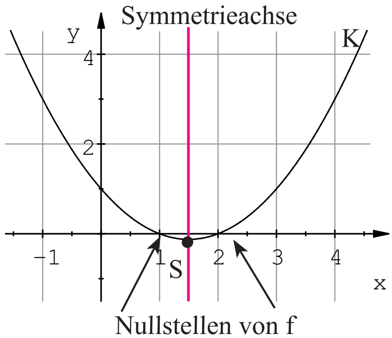
$x^2 - 3x + 2 = 0$

z. B. mithilfe der Formel ergeben sich die **Nullstellen von f:** $x_1 = 1$; $x_2 = 2$

Die Parabel K schneidet die x-Achse in $N_1(1 \mid 0)$ und $N_2(2 \mid 0)$.

Die Parabel K ist **symmetrisch zu einer Parallelen zur y-Achse** durch den Scheitel.

Die **x-Koordinate** des Scheitels liegt in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen.



Für die **x-Koordinate** des Scheitels gilt:

$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$, x_1 und x_2 sind die Nullstellen.

Einsetzen ergibt $x_S = 1{,}5$

Einsetzen in f(x) ergibt $y_S = f(1{,}5) = -0{,}125$

Scheitelpunkt $S(1{,}5 \mid -0{,}125)$

b) Verschiebt man K um 0,125 nach oben, so liegt der Scheitel auf der x-Achse.

Die verschobene Parabel hat einen gemeinsamen Punkt mit der x-Achse, sie **berührt** die x-Achse.

Neuer Funktionsterm: $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 + 0{,}125 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{8}$

Kontrolle durch die Berechnung der Nullstellen von h: $h(x) = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{8} = 0 \mid \cdot 8$

$4x^2 - 12x + 9 = 0$

z. B. mithilfe der abc-Formel $x_{1|2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 16 \cdot 9}}{8} = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{8} \Leftrightarrow x_{1|2} = \frac{3}{2}$

Die Gleichung hat **eine Lösung** wegen D = 0. f hat **eine doppelte Nullstelle.**

Gegenseitige Lage von zwei Kurven

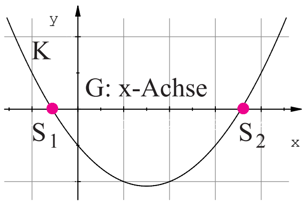
Bedingung für die x-Koordinaten der Schnittpunkte (Schnittstellen): $f(x) = g(x)$

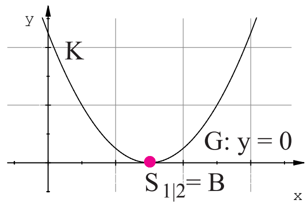
Quadratische Gleichung in Nullform: $f(x) - g(x) = 0$

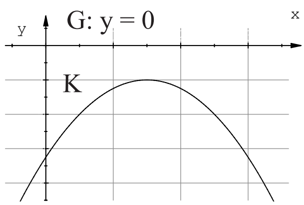
Die Anzahl der Lösungen (eine Lösung entspricht einer Schnittstelle)

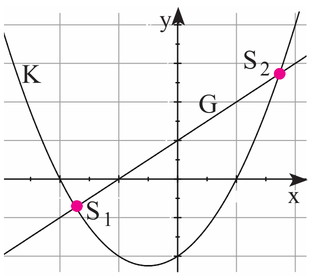
hängt von der **Diskriminante** ab: $\mathbf{D = b^2 - 4ac}$

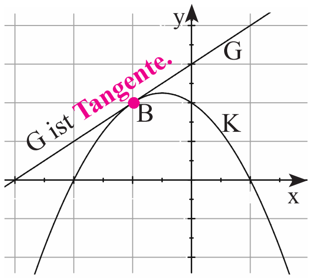
D > 0	**D = 0**	**D < 0**
zwei einfache Schnittstellen K und G **schneiden** sich in zwei **verschiedenen** Punkten.	**eine (doppelte) Schnittstelle (Berührstelle)** K und G **berühren** sich.	**keine Schnittstelle** K und G haben **keinen gemeinsamen Punkt.**

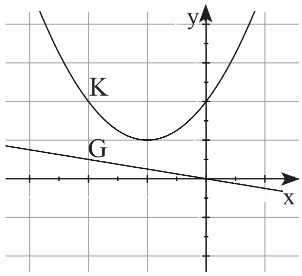


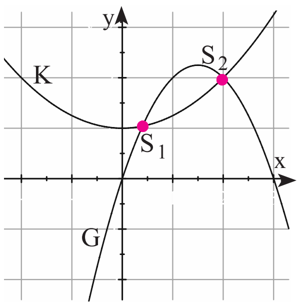


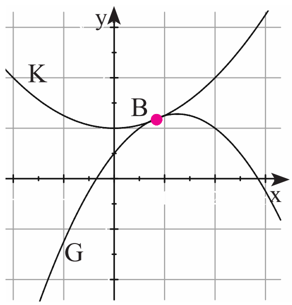


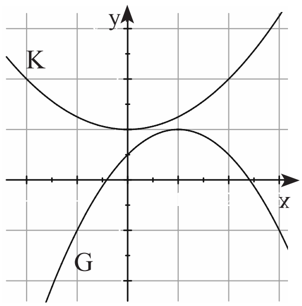








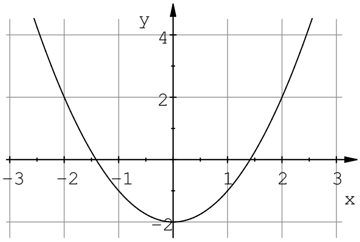




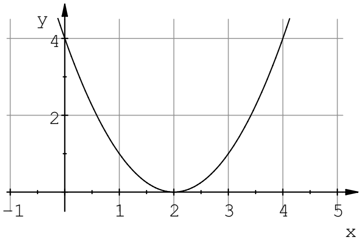
9. Die Abbildung zeigt eine Parabel in Normalparabelform.

   Bestimmen Sie einen geeigneten Funktionsterm.

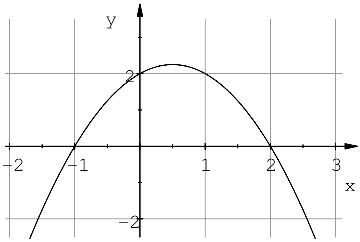
a)



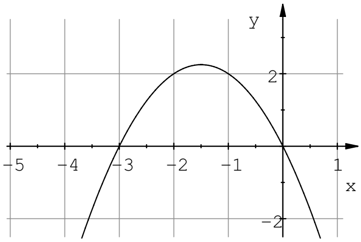
b)



c)



d)

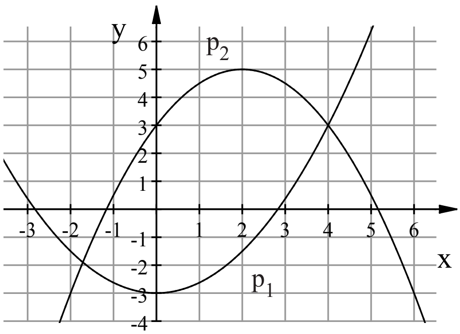


10. a) Ordnen Sie den beiden dargestellten Parabeln jeweils eine der folgenden Gleichungen zu.

    $y = \frac{3}{8}x^2 - 3$

    $y = -2x^2 + 3$

    $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$



    b) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von p_1 und p_2.

    c) Geben Sie die Scheitel S_1 und S_2 der Parabeln an.

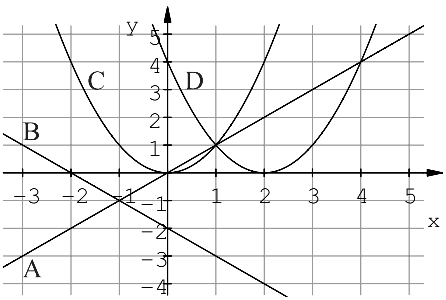
    d) Berechnen Sie den Abstand der beiden Scheitelpunkte.

11. Ordnen Sie jeder Kurve die zugehörige Gleichung zu. Begründen Sie Ihre Antwort.

    $y = x^2 - 2$; $y = x^2$; $y = (x-2)^2$;

    $y = (x+2)^2$; $y = x$; $y = x - 2$;

    $y = -2x - 2$; $y = -x - 2$



5 Modellieren und Problemlösen

Modellieren: Reale Probleme werden mithilfe der Mathematik beschrieben, ausgewertet und interpretiert.

Beispiele

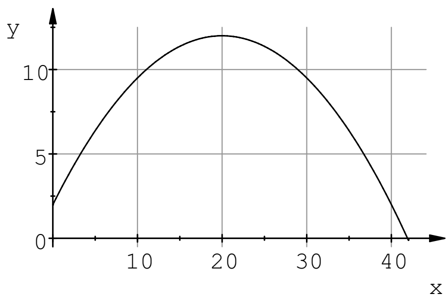
1) Die Flugbahn eines Balls nach dem Abwurf lässt sich beschreiben durch die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{40}x^2 + x + 2$; x und f(x) in Meter.
   a) Wie weit kann der Ball horizontal gemessen höchstens fliegen?
   b) Für welchen x-Wert erreicht der Ball den höchsten Punkt der Flugbahn? Wie hoch ist er dann?

Lösung

Die Flugbahn wird beschrieben durch eine nach unten geöffnete Parabel.

Der Standort des Werfers liegt im Ursprung.

Der Werfer ist etwa 2 m groß.



a) Die **positive Nullstelle** von f entspricht der Aufprallstelle des Balls und damit der Flugweite.

Bedingung: $f(x) = 0$ $\qquad -\frac{1}{40}x^2 + x + 2 = 0 \quad | \cdot (-40)$

$$x^2 - 40x - 80 = 0$$

Lösung mit der Formel ergibt: $\qquad x_1 \approx -1{,}9;\ x_2 \approx 41{,}9$

Der Ball fliegt etwa 41,9 m weit.

b) Der **höchste Punkt** der Flugbahn wird erreicht **im Scheitelpunkt.**

Für die x-Koordinate des Scheitels gilt: $\qquad x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$

Einsetzen der Nullstellen ergibt: $\qquad x_S = \frac{-1{,}9 + 41{,}9}{2} = 20$

Der y-Wert des Scheitels ist die **größte Höhe.**

Einsetzen von x = 20 ergibt: $\qquad f(2) = -\frac{1}{40}(20)^2 + 20 + 2 = 12$

Der Ball erreicht eine maximale Höhe von 12 Meter.

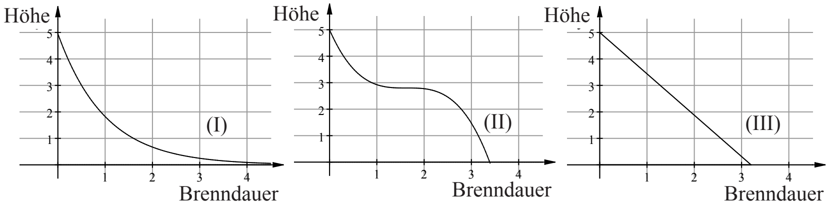
7. Bei einem Versuch wurden eine Stumpenkerze, eine Kegelkerze und eine Kugelkerze abgebrannt. Während des Versuches wurde zu verschiedenen Zeitpunkten die Höhe der Kerzen gemessen.


Stumpenkerze


Kegelkerze


Kugelkerze

Für den Verlauf der Kerzenhöhe in Abhängigkeit von der Zeit ergaben sich folgende Schaubilder:



Ordnen Sie jeder Kerze das zugehörige Schaubild zu und begründen Sie Ihre Wahl (Aus einer Prüfungsaufgabe.)

8. Ein Designer entwirft eine Glasschale. Ihr Querschnitt wird begrenzt von zwei Parabeln P_1 und P_2 und der x-Achse. P_1 ist der Graf der Funktion f_1 mit $f_1(x) = 0{,}08x^2 + 1$.
P_2 ist der Graf der Funktion f_2 mit $f_2(x) = 0{,}10x^2 - 1$.
Die Abbildung zeigt die untere Randkurve. Eine Längeneinheit entspricht 1 cm.
   a) Zeichnen Sie die zweite Parabel in die Abbildung ein und kennzeichnen Sie den Querschnitt.
   b) Wie groß ist die Standfläche dieser Glasschale?