Bohner
Ott
Rosner
Deusch

# Arbeitsheft

## Mathematik für berufliche Gymnasien

## Lineare Algebra

### Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen


Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Verfasser:

**Roland Ott**
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

**Kurt Bohner**
Lehrauftrag Mathematik am BS Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

**Ronald Deusch**
Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

**Stefan Rosner**
Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall
Studium der Mathematik an der Universität Mannheim



Umschlag: © frhuynh – Fotolia.com
kleines Bild oben: © Picture-Factory
kleines Bild unten: Africa Studio – Fotolia.com

* * * * * * * * * * *

1. Auflage 2016

Gesamtherstellung:
Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de
ISBN 978-3-8120-**1639-1**

# I Lineare Gleichungssysteme

## Umformung und Lösung eines linearen Gleichungssystems

1. Lösen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem für $x_1$, $x_2$, $x_3$.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 13 \\ 4 & 3 & 2 & -9 \\ -3 & -4 & -3 & 6 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 13 \\ 4 & 3 & 2 & -9 \\ -3 & -4 & -3 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot 3 \\ \\ \cdot 2 \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -8 & -35 \\ 0 & -5 & 9 & 51 \end{array}\right) \cdot 5$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -8 & -35 \\ 0 & 0 & -31 & -124 \end{array}\right)$

$-31x_3 = -124 \Rightarrow x_3 = 4$

Einsetzen in $x_2 - 8x_3 = -35$ ergibt:

$x_2 - 32 = -35 \Rightarrow x_2 = -3$

Einsetzen in $2x_1 + x_2 + 5x_3 = 13$ ergibt: $2x_1 - 3 + 5 \cdot 4 = 13 \Rightarrow x_1 = -2$

Lösung: $(-2; -3; 4)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 5 \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 & -5 \end{array}\right)$

2. Das lineare Gleichungssystem für $x_1$, $x_2$, $x_3$ ist mehrdeutig lösbar. Bestimmen Sie die Lösung.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & -15 \end{array}\right) \cdot 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wählen Sie: $x_3 = r$

Einsetzen in $-x_2 - x_3 = 5$ ergibt:

$-x_2 - r = 5 \Rightarrow x_2 = -r - 5$

Einsetzen in $x_1 + x_2 + x_3 = -2$ ergibt:

$x_1 + (-r - 5) + r = -2 \Rightarrow x_1 = 3$

Lösung: $(3; -r - 5; r)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 13 \\ 4 & -5 & 0 & -9 \\ -3 & 4 & -2 & -2 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -5 \\ -1 & -2 & -4 & -8 \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -6 & 24 \end{array}\right)$

3. Das lineare Gleichungssystem wird mit dem Gaußverfahren gelöst. Ergänzen Sie die fehlenden Zahlen.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & \phantom{0} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \phantom{0} \\ 0 & 0 & \phantom{0} & -9 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & -5 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & \phantom{0} & -3 & 7 \\ 0 & -8 & \phantom{0} & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 14 & -3 & 7 \\ 0 & \phantom{0} & 0 & \phantom{0} \end{array}\right)$

4. Das lineare Gleichungssystem für $x_1, x_2, x_3$ hat genau eine Lösung. Bestimmen Sie die Lösung.

| | | |
|---|---|---|
| a) $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$ | $3x_3 = -3$; $x_3 = -1$<br>$2x_2 = 3$; $x_2 = 1{,}5$<br>Eingesetzt in $x_1 + 2x_3 = 1$<br>ergibt: $x_1 + 2 \cdot (-1) = 1 \Rightarrow x_1 = 3$ | Lösung: $(3; 1{,}5; -1)$<br>oder:<br>$x_1 = 3$; $x_2 = 1{,}5$; $x_3 = -1$ |
| b) $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$ | | |

5. Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

| | | |
|---|---|---|
| a) $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ | Wählen Sie: $x_3 = r$<br>Eingesetzt in $x_2 - x_3 = 2$: $x_2 = 2 + r$<br>Eingesetzt in $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$<br>$x_1 - 2\,(2 + r) + r = 0$: $x_1 = 4 + r$ | Lösung: $(4 + r; 2 + r; r)$<br>oder:<br>$x_1 = 4 + r$; $x_2 = 2 + r$;<br>$x_3 = r$ |
| b) $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ | | |
| c) $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ | | |

6. Ist die dargestellte Umformung beim Gauß-Verfahren korrekt? Beschreiben Sie ansonsten den Fehler.

| Umformung | Umformung ist | | Fehlerbeschreibung |
|---|---|---|---|
| $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \;\; \| -1$ | ☐ | richtig | |
| $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right)$ | ☐ | falsch | |
| $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \| \cdot 0$ | ☐ | richtig | |
| $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ | ☐ | falsch | |
| $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$ | ☐ | richtig | |
| $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$ | ☐ | falsch | |

7. Ergänzen Sie die Werte in der erweiterten Koeffizientenmatrix so, dass das LGS

a) eindeutig lösbar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right)$$

Lösung:

b) mehrdeutig lösbar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & \square & \square & \square \end{array}\right)$$

Lösung:

c) unlösbar ist.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & \square & \square & \square \end{array}\right)$$

8. Gegeben ist die allgemeine Lösung eines linearen Gleichungssystems.
Ist der gegebene Vektor eine Lösung?

| allgemeine Lösung | Lösungsvektor? | | Lösungsvektor? | |
|---|---|---|---|---|
| $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2r-1 \\ r-1 \\ r \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$ | $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ | ☐ ist Lösung<br>☐ ist keine Lösung | $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ | ☐ ist Lösung<br>☐ ist keine Lösung |
| $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2r \\ 4r \\ -r \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ | ☐ ist Lösung<br>☐ ist keine Lösung | $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ | ☐ ist Lösung<br>☐ ist keine Lösung |
| $\vec{x} = \begin{pmatrix} r \\ r+1 \\ 3 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$ | $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ | ☐ ist Lösung<br>☐ ist keine Lösung | $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ | ☐ ist Lösung<br>☐ ist keine Lösung |

9. Dargestellt ist ein LGS in Matrixform. Ordnen Sie dieses bezüglich der Lösbarkeit ein. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) Anzahl Unbekannte = Anzahl Gleichungen

| LGS in Matrixform | Lösbarkeit | Begründung |
|---|---|---|
| $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ | ☐ eindeutig lösbar<br>☐ mehrdeutig lösbar<br>☐ unlösbar | |
| $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$ | ☐ eindeutig lösbar<br>☐ mehrdeutig lösbar<br>☐ unlösbar | |
| $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 2{,}5 \end{array}\right)$ | ☐ eindeutig lösbar<br>☐ mehrdeutig lösbar<br>☐ unlösbar | |
| $\left(\begin{array}{ccc\|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$ | ☐ eindeutig lösbar<br>☐ mehrdeutig lösbar<br>☐ unlösbar | |
| $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ | ☐ eindeutig lösbar<br>☐ mehrdeutig lösbar<br>☐ unlösbar | |
| $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$ | ☐ eindeutig lösbar<br>☐ mehrdeutig lösbar<br>☐ unlösbar | |

b) Anzahl Unbekannte < Anzahl Gleichungen

| | | |
|---|---|---|
| $\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{array}\right)$ | ☐ eindeutig lösbar<br>☐ mehrdeutig lösbar<br>☐ unlösbar | |
| $\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$ | ☐ eindeutig lösbar<br>☐ mehrdeutig lösbar<br>☐ unlösbar | |

c) Anzahl Unbekannte > Anzahl Gleichungen

| | | |
|---|---|---|
| $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$ | ☐ eindeutig lösbar<br>☐ mehrdeutig lösbar<br>☐ unlösbar | |
| $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right)$ | ☐ eindeutig lösbar<br>☐ mehrdeutig lösbar<br>☐ unlösbar | |

# II Rechenoperationen mit Matrizen

## 1 Rechnen mit Matrizen

1. Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Berechnen Sie.

a) $2A - B = 2\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 14 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 14 & 5 \end{pmatrix}$

b) $-(A - C) =$

c) $3(C + B) =$

d) $C - 3A - 2B =$

2. Berechnen Sie.

a) $-\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$

b) $6\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} =$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$

d) $4 \cdot (2 \quad -2 \quad 3) - 3 \cdot (1 \quad -5 \quad 0) =$

e) $-\begin{pmatrix} 100 \\ 30 \\ 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 45 \\ 120 \\ 20 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 110 \\ 30 \\ 120 \end{pmatrix} =$

f) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

g) $12\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}7 \\ 1{,}2 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 1{,}2 \\ 2{,}6 \end{pmatrix} =$