

Bohner | **Arbeitsheft**
Ott | **Mathematik für berufliche Gymnasien**
Rosner | **Jahrgangsstufen 1 und 2**
Deusch | **Analysis und Stochastik**



Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis **Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †**

Verfasser:

Kurt Bohner

Lehrauftrag Mathematik am BS Wangen

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner

Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall

Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

Ronald Deusch

Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Umschlag: © frhuynk - Fotolia.com, kleines Bild oben: © Picture-Factory - Fotolia.com,
kleines Bild unten: © Africa Studio - Fotolia.com

* * * * *

2. Auflage 2017

© 2015 by Merkur Verlag Rinteln

Gesamtherstellung:

Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de

lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

Lösungen zu: ISBN 978-3-8120-1339-0

I Analysis

1 Differenzialrechnung

1.1 Differenzialquotient und Ableitung

1. Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate auf $[a; b]$.

$f(x) = (x + 1)^2; [0; 2]$	$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{9 - 1}{2} = 4$
$f(x) = 6x - 2x^3; [1; 3]$	
$f(x) = 3e^{\frac{1}{2}x}; [-1; 2]$	
$f(x) = 2\sin(2x); [0; \frac{\pi}{4}]$	
$f(x) = 9; [-5; 3]$	
$f(x) = x^4 - x^2; [-2; 0]$	

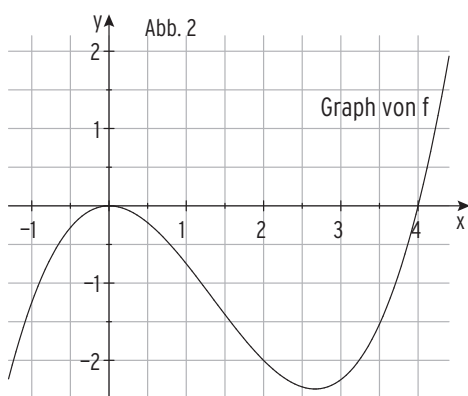
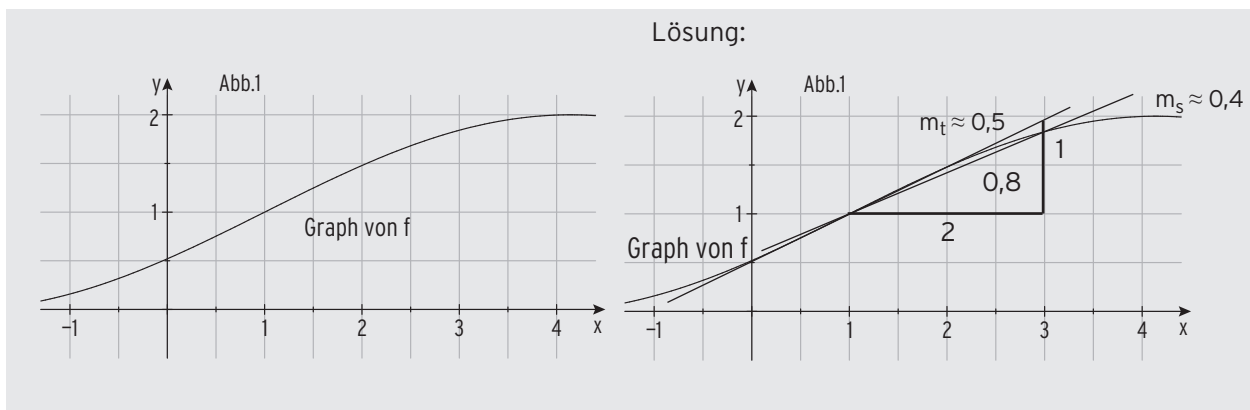
2. Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate in x_0 .

$f(x) = x^2 + 2; x_0 = 2$	$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 + 2 - 6}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4$ $h + 4 \rightarrow 4$ für $h \rightarrow 0$ $m_t = f'(2) = 4$
$f(x) = 6x^2 - 2; x_0 = 1$	
$f(x) = x^2 - x; x_0 = 0$	

3. Für eine Funktion f gilt folgende Bedingung. Welche Aussagen lassen sich daraus für das Schaubild K von f treffen?

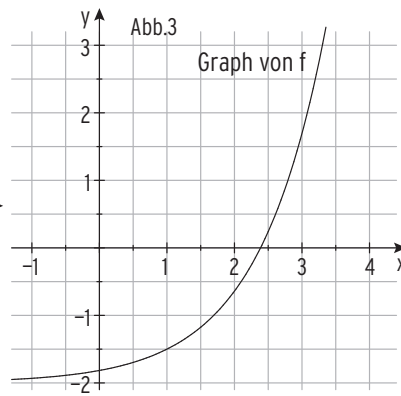
$f'(2) = -3$	K hat in $x = 2$ die Steigung -3 .
$f'(4) = 0$	
$f'(x) > 0; x \in \mathbb{R}$	
$f(-1) = 0$	
$f(4) < 0$	
$f'(-2) = -1$	
$f(3) = 4 \wedge f'(3) = 0$ und	
$f'(x) = 1$	

4. Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate von f auf $[1; 3]$ und die momentane Änderungsrate in $x_0 = 1$ mithilfe der Abbildung.



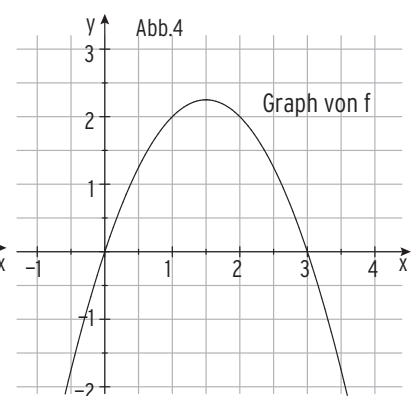
$m_s =$

$m_t =$



$m_s =$

$m_t =$

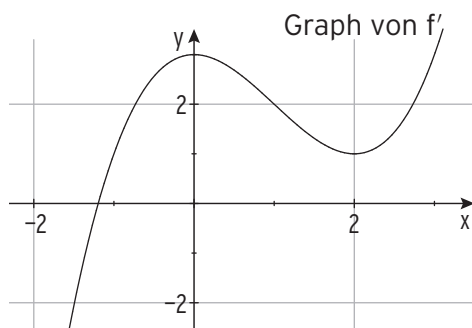


$m_s =$

$m_t =$

5. Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion einer Funktion f . Beantworten Sie folgende Fragen über das Schaubild K von f .

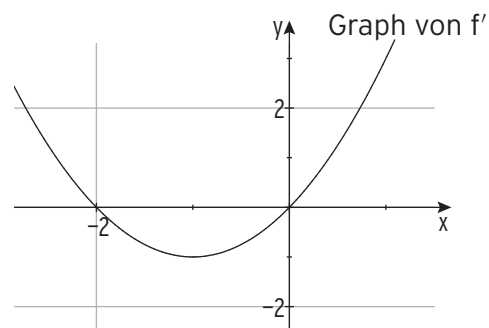
- a) An welchen Stellen hat K eine waagrechte Tangente?
- b) An welchen Stellen hat K die Steigung 2?



Lösung:

a)

b)



Lösung:

a)

b)

I Analysis

.....

6. Bilden Sie die erste Ableitung.

$f(x) = 2\cos(x) + 1$	$f'(x) = -2\sin(x)$
$f(x) = -3\sin(x) - x$	$f'(x) =$
$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^4 + 3$	$f'(x) =$
$f(x) = \frac{1}{32}x^3 + x^2 + x - 4$	$f'(x) =$
$f(x) = 5e^x + 2x - 1$	$f'(x) =$
$f(x) = ae^x + b$	$f'(x) =$
$f(x) = \frac{3}{x}$	$f'(x) =$
$f(x) = -4\sqrt{x}$	$f'(x) =$

7. Bilden Sie die erste Ableitung mithilfe der Kettenregel.

$f(x) = 2\sin(3x)$	$f'(x) = 3 \cdot 2\cos(3x) = 6\cos(3x)$
$f(x) = \frac{5}{2}e^{4x} + 5x$	$f'(x) =$
$f(x) = 0,25e^{x-1} + 2$	$f'(x) =$
$f(x) = (2x - 4)^3$	$f'(x) =$
$f(x) = -1,2e^{2-3x} + x^3$	$f'(x) =$
$f(x) = 2ae^{bx+c}$	$f'(x) =$
$f(x) = -\pi \cos(0,5x)$	$f'(x) =$
$f(x) = x - \sin(0,3\pi x)$	$f'(x) =$
$f(x) = \frac{9}{5}e^{x^2+1} + 2$	$f'(x) =$
$f(x) = 4\sin(3+2x) + 1$	$f'(x) =$
$f(x) = \pi - 2\cos(2(x+1))$	$f'(x) =$
$f(x) = 4 \cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$	$f'(x) =$

8. Bestimmen Sie die 1. Ableitung mithilfe der Produktregel.

$f(x) = (x - 8)e^x$	$f(x) = (2 - 6x)e^x$	$f(x) = x \cdot \sin(x)$
$u(x) = x - 8 \Rightarrow u'(x) = 1$ $v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$ $f'(x) = 1 \cdot e^x + (x - 8)e^x$ $f'(x) = e^x \cdot (1 + x - 8)$ $f'(x) = (x - 7)e^x$		

9. Bestimmen Sie die 1. Ableitung.

$f(x) = 4xe^{-3x}$	$f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{2}x}$	$f(x) = \sin(2x) \cdot e^{-x}$

10. Kreuzen Sie die richtige Ableitung an.

$f(x) = (x - 3)e^x$	<input type="checkbox"/> $f'(x) = (x - 2)e^x$	<input type="checkbox"/> $f'(x) = (x - 2)e^{2x}$
$f(x) = 4x - e^{2x}$	<input type="checkbox"/> $f'(x) = 4 - 2e^x$	<input type="checkbox"/> $f'(x) = 4 - 2e^{2x}$
$f(x) = -3\sin(2x - 1)$	<input type="checkbox"/> $f'(x) = 6\cos(2x - 1)$	<input type="checkbox"/> $f'(x) = -6\cos(2x - 1)$
$f(x) = \frac{1}{7}x^4 + \frac{3}{7}x^3 + 2$	<input type="checkbox"/> $f'(x) = \frac{4}{7}x^3 + \frac{9}{7}x^2 + 2$	<input type="checkbox"/> $f'(x) = \frac{1}{7}(4x^3 + 9x^2)$

11. Bilden Sie die erste und die zweite Ableitung.

$f(x) = 2\cos(4x) + 2x$	$f'(x) = -8\sin(4x) + 2$	$f''(x) = -32\cos(4x)$
$f(x) = 3x - e^{2x} - 1$	$f'(x) =$	$f''(x) =$
$f(x) = \frac{1}{4}x^5 + x^4 + 3x^2$	$f'(x) =$	$f''(x) =$
$f(x) = \frac{1}{16}(x^4 + x^2 - 8)$	$f'(x) =$	$f''(x) =$
$f(x) = 5(e^{3x} - \sin(\pi x))$	$f'(x) =$	$f''(x) =$

I Analysis

.....

12. Entscheiden Sie, ob hier richtig oder falsch abgeleitet wurde. Beschreiben Sie gegebenenfalls kurz, worin der Fehler besteht.

Funktionsterme	richtig falsch	richtig wäre ...	Was wurde nicht be- achtet?
$f(x) = 2x^4 + 2x^2$ $f'(x) = 8x^4 + 4x^2$	<input type="checkbox"/> (r) <input checked="" type="checkbox"/> (f)	$f'(x) = 8x^3 + 4x$	Potenzregel: $(x^4)' = 4x^3$
$f(x) = 3x^6 - 3x^4 + x$ $f'(x) = 18x^5 - 12x^3$	<input type="checkbox"/> (r) <input type="checkbox"/> (f)	$f'(x) =$	
$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ $f'(x) = e^{2x}$	<input type="checkbox"/> (r) <input type="checkbox"/> (f)	$f'(x) =$	
$f(x) = \sin(2x) + 1$ $f'(x) = \cos(2x)$	<input type="checkbox"/> (r) <input type="checkbox"/> (f)	$f'(x) =$	
$f(x) = e^{2x} \cdot x^2$ $f'(x) = e^{2x} \cdot 2x$	<input type="checkbox"/> (r) <input type="checkbox"/> (f)	$f'(x) =$	
$f(x) = \cos(\pi x + 1)$ $f'(x) = \sin(\pi x)$	<input type="checkbox"/> (r) <input type="checkbox"/> (f)	$f'(x) =$	
$f(x) = \frac{1}{x^2}$ $f'(x) = \frac{1}{2x}$	<input type="checkbox"/> (r) <input type="checkbox"/> (f)	$f'(x) =$	
$f(x) = 2x(x^3 + 4x^2)$ $f'(x) = 2(3x^2 + 8x)$	<input type="checkbox"/> (r) <input type="checkbox"/> (f)	$f'(x) =$	

13. Sind die Aussagen wahr (w) oder falsch (f)?

Der Funktionswert von f mit $f(x) = x^2 + 1$; $x \in \mathbb{R}$, entspricht an jeder Stelle x der Steigung des Graphen der Ableitungsfunktion.	<input type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)
Der y -Wert $f'(x)$ entspricht an jeder Stelle x der Steigung des Graphen der Funktion f .	<input type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)
Die Ableitungsfunktion einer linearen Funktion ist eine konstante Funktion.	<input type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)
Es gibt keine zwei Funktionen, welche beide die gleiche Ableitungsfunktion haben.	<input type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)
Bei der Funktion f mit $f(x) = e^x$; $x \in \mathbb{R}$, entspricht der y -Wert an jeder Stelle der Steigung des zugehörigen Schaubildes.	<input type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)

1.2 Tangente und Normale

1. Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f an der Stelle $x = u$.

$f(x) = 3x - 2x^2$ $u = -2$	$f(-2) = 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-2)^2 = -14$ $f'(x) = 3 - 4x$; $f'(-2) = 3 - 4(-2) = 11$; also $m_t = 11$ Tangentengleichung: $y = 11x + b$ Punktprobe mit $B(-2 -14)$: $-14 = 11 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = 8$ Tangentengleichung: $y = 11x + 8$
$f(x) = x - 2e^{0,25x}$ $u = 4$	
$f(x) = \frac{1}{2}\sin(3x) + 1$ $u = \frac{\pi}{6}$	

2. Berechnen Sie die Gleichung der Normale an das Schaubild von f an der Stelle $x = u$.

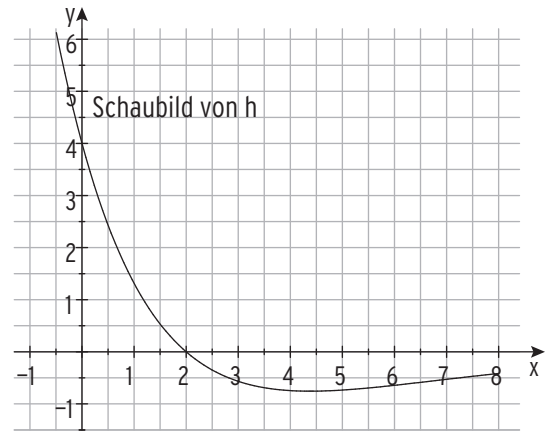
$f(x) = x^3 - x^2$ $u = -1$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block; margin-top: 10px;"> $m_n = -\frac{1}{m_t}$ </div>	$f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 = -2$ $f'(x) = 3x^2 - 2x$; $f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 2(-1) = 5 \Rightarrow m_n = -\frac{1}{5}$ Normalengleichung: $y = -\frac{1}{5}x + b$ Punktprobe mit $B(-1 -2)$: $-2 = -\frac{1}{5} \cdot (-1) + b \Rightarrow b = -\frac{11}{5}$ Normalengleichung: $y = -\frac{1}{5}x - \frac{11}{5}$
$f(x) = 3 - 2e^{-x}$ $u = 0$	
$f(x) = 2\cos(2x) + 2$ $u = \frac{\pi}{4}$	

I Analysis

.....

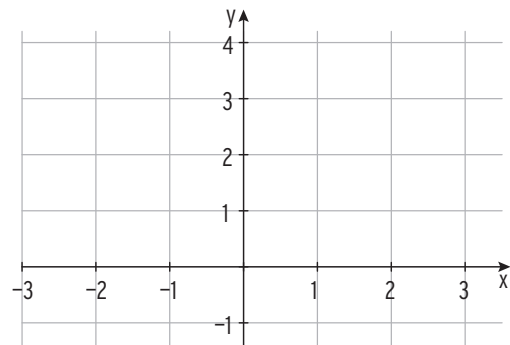
3. Gezeichnet ist das Schaubild einer Funktion h mit der Definitionsmenge $D = [-1; 8]$. Prüfen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

$h'(1) < 0$	<input type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)
Das Schaubild von h' geht durch den Punkt $Q(2 0)$.	<input type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)
$h'(7) = -0,5$	<input type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)
Es gibt ein $x \in D$ für das gilt: $h'(x) = 0$.	<input type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)
Die Gleichung $h'(x) = 1$ hat eine Lösung.	<input type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)

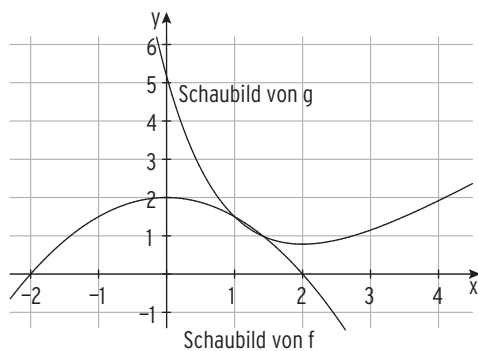


4. Berührt das Schaubild K von f mit $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1; x \in \mathbb{R}$, die x -Achse? Begründen Sie durch Rechnung. Skizzieren Sie das Schaubild von f .

Lösung:



5. Berühren sich das Schaubild von f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2; x \in \mathbb{R}$, und das Schaubild von g mit $g(x) = e^{2-x} + x - e + 0,5; x \in \mathbb{R}$, in $x_0 = 1$? Begründen Sie rechnerisch.



Lösung:
