Patyna

Mathematik

für das Berufliche Gymnasium in Niedersachsen

Kerncurriculum und Bildungsstandards

Analysis – Qualifikationsphase – Schwerpunkt Wirtschaft

Arbeitsheft Mathematik

Das Arbeitsheft (inkl. Lösungen) unterstützt die Schülerinnen und Schüler dabei, die Mathematik selbstständig zu lernen und zu verstehen:

- Eigenständiges Aneignen von Fachvokabeln sowie von wirtschaftlichen und mathematischen Zusammenhängen
- Anwenden von unterschiedlichen Arbeitsmethoden
- Lösen von Übungsaufgaben, um Routine beim Bearbeiten von mathematischen Problemstellungen zu bekommen
- Schrittweises Bearbeiten von kleinen Lernsituationen, um das systematische Lösen von handlungsorientierten Aufgaben zu erlernen

ISBN 978-3-8120-**2686-4**

Weitere Infos finden Sie unter www.merkur-verlag.de
Suche: 2686

Patyna

Mathematik

für das Berufliche Gymnasium in Niedersachsen

Kerncurriculum und Bildungsstandards

Analysis – Qualifikationsphase –

Schwerpunkt Wirtschaft

Merkur

Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasserin:

Marion Patyna

Die in diesem Buch zitierten Internetseiten wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.
Stand: April 2018

Umschlag: Hintergrund: ECE, Ernst-August-Galerie, Hannover,
Kreis rechts oben: Candy Box – Fotolia.com, Kreis Mitte: Colourbox.de,
Kreis links: Syda Productions – Colourbox.de, Grafik: Colourbox.de

* * * * *

1. Auflage 2018

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-**0686-6**

Vorwort

Das vorliegende Buch ist der zweite Band von drei Büchern der Reihe „Mathematik für das BG in Niedersachsen – Kerncurriculum und Bildungsstandards“ und damit ein Arbeitsbuch für den Mathematikunterricht mit dem Schwerpunkt Wirtschaft am Beruflichen Gymnasium in Niedersachsen. Die Basis dieses Buches ist das neue *Kerncurriculum (KC)* von 2018, das wiederum auf den *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife* aus dem Jahr 2012 basiert.

Die Autorin berücksichtigt bei der Erstellung dieser Bücher die **inhaltsbezogenen** und die **prozessbezogenen** Kompetenzen, die die Schülerinnen und Schüler gemäß KC während der drei Jahre am Beruflichen Gymnasium erwerben sollen. Der in der BbS VO bzw. EB BbS VO verankerten **Handlungsorientierung** wird durchgängig Rechnung getragen. Jedes Hauptkapitel beginnt mit **berufsbezogenen Lernsituationen gemäß SchuCu-BBS**, die die Schülerinnen und Schüler **eigenverantwortlich** und **selbstorganisiert** mit Hilfe der Informationstexte und der Beispielaufgaben aus den nachfolgenden Abschnitten bearbeiten und sich so die notwendigen Kompetenzen aneignen können. Jede Lernsituation umfasst nicht nur die **problemorientierte Aufgabenstellung**, die zumeist auf unterschiedliche Weisen gelöst werden kann, sondern auch Hinweise auf die benötigten und die zu erzielenden Kompetenzen. Ergänzt wird dies durch Hinweise zur unterrichtlichen Umsetzung der Lernsituation, dabei werden die vorgeschlagenen Sozialformen in **grün** hervorgehoben und die Handlungsprodukte in **blau**. Die Abfolge der Lernsituationen ist so konzipiert, das die Schülerinnen und Schüler immer selbständiger agieren können und müssen. Das mathematische und wirtschaftliche Fachvokabular wird durchgängig in **rot** hervorgehoben. Auf diese Weise erhalten die Schülerinnen und Schüler einen Überblick über die zu lernenden Vokabeln. Außerdem sind alle roten Begriffe im Sachwortverzeichnis aufgeführt.

Um die in den Lernsituationen benötigten Fähigkeiten und Fertigkeiten im Nachgang zu trainieren und zu festigen, enthält das Buch eine Vielzahl verschiedener Übungsaufgaben, die je nach Aufgabentyp händisch und/oder mit dem passenden **Technologieeinsatz** (GTR/CAS) gelöst werden können und durchgängig mithilfe von **Operatoren** formuliert werden. Auch innermathematische Problemstellungen werden thematisiert. Auf diese Weise wird zielgerichtet der Kompetenzaufbau erreicht und die Schülerinnen und Schüler, die am **Zentralabitur Mathematik** teilnehmen werden, können die Aufgaben des Hilfsmittel freien Teils und des Wahlteils adäquat und sachgerecht bearbeiten. Am Ende eines jeden Kapitels befinden sich passende Originalaufgaben aus dem Zentralabitur, damit die Schülerinnen und Schüler sich an die dort verwendeten Aufgabenformate gewöhnen können.

Die Reihenfolge der einzelnen Kapitel kann als Basis für den Aufbau des **schulinternen Curriculums** und der **Jahresplanung** dienen, muss sie aber nicht. Die Autorin hat darauf geachtet, dass die Lehrkräfte ihren Unterricht mit Hilfe dieser Bücher individuell aufbauen können, weil die mathematischen inhaltsbezogenen Kompetenzen gemäß **Spiralcurriculum** in die Berufsbezüge integriert werden.

Die Verfasserin, Herbst 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Symbole / Zeichen: Bedeutung und Verwendung

Symbol / Zeichen	Bedeutung / Erklärung
$=$	gleich, z. B. $\frac{1}{2} = 0{,}5$
$\neq$	ungleich, z. B. $2 \neq 5$
$\approx$	etwa gleich, ungefähr gleich (Rundungen sind erfolgt), z. B. $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$
$\triangleq$	entspricht
$\wedge$	und
$\vee$	oder
$\lvert \ldots \rvert$	Betrag von
	Relationszeichen
$>$	größer, z. B. $5 > 2$
$\geq$	größer gleich
$<$	kleiner, z. B. $2 < 5$
$\leq$	kleiner gleich
	Pfeile
$\Rightarrow$	daraus folgt
$\Leftrightarrow$	äquivalent zu
$\rightarrow$	strebt gegen
	Mengen
$\{\ldots\}$	Mengenklammer
$\{a \mid \ldots\}$	Menge aller Zahlen a, für die gilt …
$\varnothing = \{\ \}$	leere Menge
$\in$	Element von
$\notin$	nicht Element von
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen einschließlich null $\{\ldots, -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$
$\mathbb{Z}^*$	Menge der ganzen Zahlen ohne null $\{\ldots, -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$
$\mathbb{Z}_{\geq 0} = \mathbb{Z}_+$	Menge der ganzen Zahlen, die größer oder gleich null sind $\{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$
$\mathbb{Z}_{\leq 0} = \mathbb{Z}_-$	Menge der ganzen Zahlen, die kleiner oder gleich null sind $\{\ldots, -4; -3; -2; -1; 0\}$
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen einschließlich null $\left\{\frac{u}{v} \,\middle|\, u, v \in \mathbb{Z} \wedge v \neq 0\right\}$
$\mathbb{Q}^*$	Menge der rationalen Zahlen ohne null $\left\{\frac{u}{v} \,\middle|\, u, v \in \mathbb{Z}_{\neq 0}\right\}$
$\mathbb{Q}_{\geq 0} = \mathbb{Q}_+$	Menge der rationalen Zahlen, die größer oder gleich null sind $\left\{\frac{u}{v} \,\middle|\, u, v \in \mathbb{Z} \wedge v \neq 0 \wedge \frac{u}{v} \geq 0\right\}$

Symbol / Zeichen	Bedeutung / Erklärung
$\mathbb{Q}_{\leq 0} = \mathbb{Q}_-$	Menge der rationalen Zahlen, die kleiner oder gleich null sind $\left\{\frac{u}{v} \,\middle|\, u, v \in \mathbb{Z} \wedge v \neq 0 \wedge \frac{u}{v} \leq 0\right\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen , d. h. rationale Zahlen ($\mathbb{Q}$) und zusätzlich unendliche, nicht periodische Dezimalzahlen wie z. B. π, e, $\sqrt{2}$
Intervalle	
$[a; b]$	geschlossenes Intervall
$[a; b) = [a; b[$	halboffenes Intervall, rechte Grenze ist offen
$a; b] =]a; b]$	halboffenes Intervall, linke Grenze ist offen
$(a; b) =]a; b[$	offenes Intervall
Funktionen	
$f\colon\ f(x) = \ldots$ f mit $f(x) = \ldots$	Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x)$
$f'\colon\ f'(x) = \ldots$ f' mit $f'(x) = \ldots$	Ableitungsfunktion f' mit der Funktionsgleichung $f'(x)$
Definitions- und Wertebereich	
$D_{\text{math}}(f)$	mathematischer Definitionsbereich der Funktion f
$D_{\text{ök}}(f)$	ökonomischer Definitionsbereich der Funktion f
$W_{\text{math}}(f)$	mathematischer Wertebereich der Funktion f
$W_{\text{ök}}(f)$	ökonomischer Wertebereich der Funktion f
Differentialrechnung	
$\Delta x = x_2 - x_1$	Delta x, Differenz zweier x-Werte
$\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$	Delta $f(x)$, Differenz zweier Funktionswerte
$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x_1}$	Differenzenquotient, Sekantensteigung
∞	unendlich
lim	Grenzwert
$\lim\limits_{x \to \infty}$	Grenzwert: x strebt gegen unendlich
df	Differential von f
$\frac{df}{dx} = f'(x)$	Differentialquotient / Ableitung
Integralrechnung	
$\int f(x)\, dx = F(x) + C$	unbestimmtes Integral von $f(x)$
$\int_a^b f(x)\, dx =$ $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$	Integral von $f(x)$ im Intervall $[a; b]$ $a, b \in \mathbb{R}$

2 Operatorenliste gemäß KC

Operator	Beschreibung der erwarteten Leistung	Anmerkungen
Begründen	Je nach Kontext ▪ Einen Sachverhalt auf Gesetzmäßigkeiten bzw. Zusammenhänge zurückführen ▪ Die Angemessenheit einer Verfahrensweise bzw. die Eignung der Werkzeuge darlegen Hierzu gehört eine inhaltliche Betrachtung.	Auch bei der Verwendung mathematischer Syntax ist eine geschlossene Antwort erforderlich, die auch Textanteile enthält. Die Angabe einer Formel o. ä. genügt hier nicht. Aufgrund der verschiedenen Ausprägungen des Operators „Begründen“ ergeben sich Überschneidungen mit „Beweisen“ und „Zeigen“, wobei dort formale bzw. rechnerische Aspekte eine höhere Bedeutung haben.
Berechnen	Ergebnisse von einem ausformulierten mathematischen Ansatz ausgehend durch explizite oder näherungsweise Berechnung gewinnen	
Beschreiben	Verfahren, Sachverhalte oder Zusammenhänge strukturiert und fachsprachlich richtig mit eigenen Worten wiedergeben	Vgl. Erläutern
Bestimmen/ Ermitteln	Einen möglichen Lösungsweg darstellen und das Ergebnis formulieren	Alle Werkzeugebenen sind zulässig. Einschränkungen s. o.
Beurteilen	Zu einem Sachverhalt ein selbstständiges Urteil unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formulieren und begründen	Vgl. Entscheiden
Beweisen/ Widerlegen	Einen Nachweis im mathematischen Sinne unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischen Schlüssen und Äquivalenzumformungen durchführen, ggf. unter Verwendung von Gegenbeispielen	
Entscheiden	Bei verschiedenen Möglichkeiten sich begründet und eindeutig festlegen	Vgl. Beurteilen Bei diesem Operator steht die eindeutige, begründete Festlegung aufgrund eines Vergleiches im Vordergrund.
Erläutern	Verfahren, Sachverhalte oder Zusammenhänge strukturiert und fachsprachlich richtig mit eigenen Worten wiedergeben und durch zusätzliche Informationen oder Darstellungsformen verständlich machen	Vgl. Beschreiben Im Unterschied zur Beschreibung erfordert eine Erläuterung die Darstellung inhaltlicher Bezüge.
Herleiten	Aus bekannten Sachverhalten oder Aussagen heraus nach gültigen Schlussregeln mit Berechnungen oder logischen Begründungen die Entstehung eines neuen Sachverhaltes darlegen	In einer mehrstufigen Argumentationskette können Zwischenschritte mit digitalen Mathematikwerkzeugen durchgeführt werden. Einschränkungen s. o.

Operator	Beschreibung der erwarteten Leistung	Anmerkungen
Interpretieren	Mathematische Objekte ▪ als Ergebnisse einer mathematischen Überlegung rückübersetzen auf das ursprüngliche Problem, ▪ umdeuten in eine andere mathematische Sichtweise	
Klassifizieren	Eine Menge von Objekten nach vorgegebenen oder selbstständig zu wählenden Kriterien in Klassen einteilen	Eine Begründung der vorgegebenen bzw. selbstgewählten Kriterien wird gesondert gefordert.
Nennen/ Angeben	Sachverhalte, Begriffe, Daten ohne Erläuterungen aufzählen	
Skizzieren	Objekte oder Funktionen auf das Wesentliche reduziert grafisch übersichtlich darstellen	Skizzieren wird immer im Kontext mit grafischen Darstellungen verwendet.
Untersuchen	Eigenschaften von oder Beziehungen zwischen Objekten herausfinden und darlegen	Je nach Sachverhalt kann zum Beispiel ein Strukturieren, Ordnen oder Klassifizieren notwendig sein.
Vergleichen	Sachverhalte, Objekte oder Verfahren gegenüberstellen, ggf. Vergleichskriterien festlegen, Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede feststellen	Eine Bewertung wird gesondert gefordert.
Zeichnen/ Grafisch darstellen	Eine grafische Darstellung anfertigen, die auf der Basis der genauen Wiedergabe wesentlicher Punkte hinreichend exakt ist bzw. Sachverhalte angemessen wiedergibt	
Zeigen/ Nachweisen	Eine Aussage, einen Sachverhalt nach gültigen Schlussregeln, mit Berechnungen oder logischen Begründungen bestätigen	In einer mehrstufigen Argumentationskette können Zwischenschritte mit digitalen Mathematikwerkzeugen durchgeführt werden. Einschränkungen s. o.

Quelle: Niedersächsisches Kultusministerium (2017). Kerncurriculum für das Gymnasium – gymnasiale Oberstufe, die Gesamtschule – gymnasiale Oberstufe, das Berufliche Gymnasium, das Abendgymnasium, das Kolleg. Mathematik. Hannover. S. 74f.

3 Kostentheorie

Die Kostentheorie ist ein Teilgebiet der Wirtschaftstheorie sowie der Betriebs- und Volkswirtschaftslehre. Im Rahmen der Betriebswirtschaftslehre wird die Kostentheorie im Mathematikunterricht thematisiert und die **funktionalen Zusammenhänge** der Kosten einer Produktion analysiert. Die Analyse der Kosten bzw. der Stückkosten dient u. a. der Preisfestsetzung für ein Produkt. Auch die zugehörigen funktionalen Zusammenhänge der Erlöse/Stückerlöse und der daraus resultierenden Gewinne/Stückgewinne werden untersucht und geben zusätzliche Informationen für die Festlegung des Preises.

3.1 Lernsituationen

Benötigte Kompetenzen für die Lernsituation 1
Kenntnisse aus der Sek. I und der Einführungsphase

Inhaltsbezogene Kompetenzen der Lernsituation 1
Ganzrationale und gebrochenrationale Funktionen; Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen; Schnittpunkte zweier Funktionen; graphische Darstellung von Funktionen; Differentialrechnung; Definitionslücken; Asymptote; Betriebsminimum und -optimum; kurz- und langfristige Preisuntergrenze.

Prozessbezogene Kompetenzen der Lernsituation 1
Mathematisch argumentieren; Probleme mathematisch lösen; mathematisch modellieren; mit symbolischen, formalen und technischen Elementen umgehen; kommunizieren.

Methode
Kaskade
Einzelarbeit → Partnerarbeit → 4er-Gruppenarbeit → 8er-Gruppenarbeit→ Präsentation vor dem Plenum

Zeit
3 Doppelstunden

Lernsituation 1

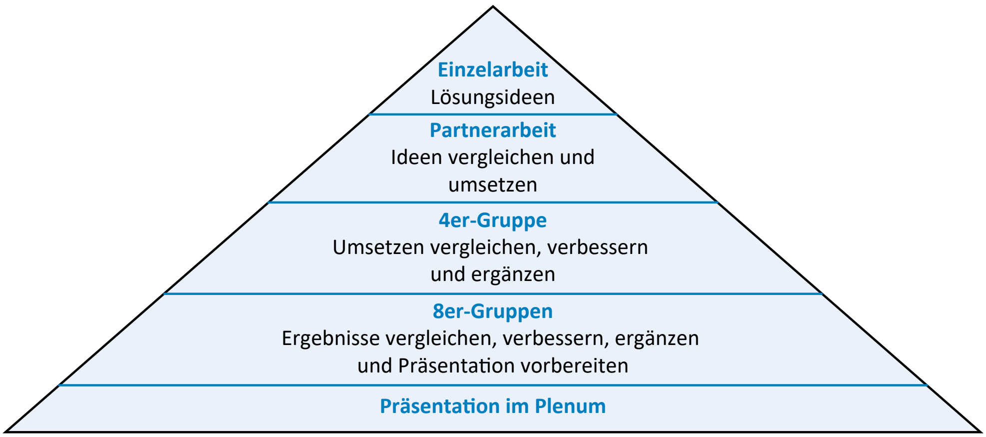
Das Unternehmen *Camping-Mobil* hat sich eine neuartige Idee patentieren lassen. Es ist Monopolist für Campingvorzelte mit integrierten Solarzellen für die Warmwasserversorgung.
Um den Preis für das Standardmodell festzulegen führt die Controlling-Abteilung von *Camping-Mobil* unterschiedliche Analysen auf Basis der folgenden Angaben durch:

x entspricht der Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME), $K'(x)$ ist in Geldeinheiten pro Mengeneinheiten (GE/ME) angegeben und $E(x)$ in GE. Die Grenzkostenfunktion K' mit $K'(x) = 1{,}5x^2 - 10x + 50$ ist von der Produktions-Abteilung ermittelt worden. Die Fixkosten belaufen sich auf 575 GE.
Für die Modellierung der fiktiven quadratischen Erlösfunktion E wurde eine Online-Umfrage unter Campingurlaubern und Herstellern von Wohnmobilen durchgeführt.

x in ME	1	3	5
$E(x)$ in GE	385	945	1.225

Die Controlling-Abteilung benötigt folgende Angaben:
- Betriebsminimum und -optimum;
- kurz- und langfristige Preisuntergrenze;
- die Produktionsmenge, an der die minimalen Grenzkosten erzielt werden;
- das fiktive Erlösmaximum;
- die fiktive gewinnmaximale Menge und den zugehörigen Cournot'schen Preis.

Führen Sie die Analysen der Controlling-Abteilung rechnerisch und grafisch durch und geben Sie für die Geschäftsführung eine **Handlungsempfehlung** bzgl. der Preisfestsetzung ab.



Benötigte Kompetenzen für die Lernsituation 2
Kenntnisse aus der Sek. I und der Einführungsphase

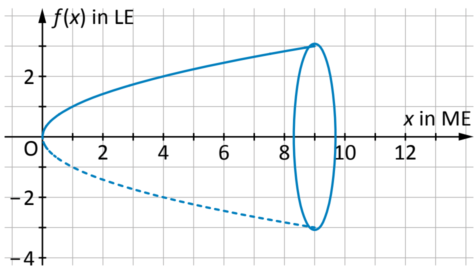
Inhaltsbezogene Kompetenzen der Lernsituation 2
Ganzrationale Funktionen, Wurzelfunktion; graphische Darstellung von Rotationskörpern; Differentialrechnung; Rotationsvolumen; Betriebsminimum und -optimum; kurz- und langfristige Preisuntergrenze

Prozessbezogene Kompetenzen der Lernsituation 2
Mathematisch argumentieren; Probleme mathematisch lösen; mathematisch modellieren; mit symbolischen, formalen und technischen Elementen umgehen; kommunizieren.

Methode
ICH-DU-WIR

Zeit
2 Doppelstunden

Lernsituation 2

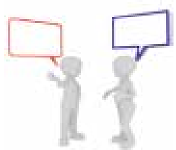


Das Unternehmen *Camping-Mobil* wird zur nächsten Saison Frischwassertanks für Wohnmobile in einer neuen Form herstellen, um sie besser im Wohnmobil verankern zu können. Da es zahlreiche Hersteller für solche Wassertanks gibt, analysiert das Unternehmen im Vorwege die Kostensituation. Die Gesamtkosten K_b werden durch die **Funktionenschar**[1] $K_b(x) = 0{,}5x^3 - bx^2 + 25x + 50$ modelliert und hängen von dem Füll-Volumen des Wassertanks in Volumeneinheiten (VE) ab. Die Form des Tanks lässt sich mithilfe der Rotation des Graphen von f mit $f(x) = \sqrt{x}$ um die Abszissenachse im Intervall $[0; b]$ modellieren. $b \in [3; 6]$ entspricht dabei der Länge des Tanks, dieser Wert wird außerdem ohne Einheit für die Modellierung der Gesamtkostenfunktion K_b verwendet. Der Funktionswert $f(x)$ entspricht dem Radius der Standfläche; beides wird in Längeneinheiten (LE) angegeben.
Untersuchen Sie als Mitarbeiter der Controlling-Abteilung, wie hoch der Preis für einen 50-VE-Tank mindestens sein muss, damit die variablen und fixen Stückkosten gedeckt sind.

1 Eine Funktionenschar ist eine Vielzahl verschiedener Graphen, deren Funktionsterme sich in mindestens einem Parameter unterscheiden; hier ist es der Parameter *b*.

Der Marktpreis für 5-VE-Tanks liegt zurzeit bei 20 GE/ME.
Bestimmen Sie die gewinnmaximale Produktionsmenge.
Dokumentieren Sie Ihre Untersuchungsergebnisse schriftlich in einer **Tischvorlage** und ergänzen Sie Ihre Ausführungen durch Rechnungen und Zeichnungen als Grundlage für die Entscheidung der Geschäftsführung.

Vorgehensweise

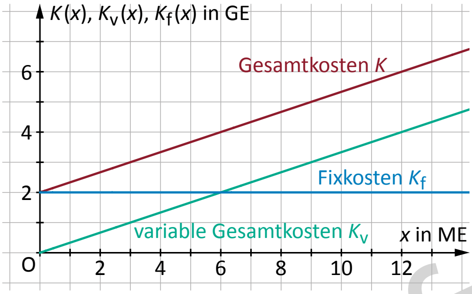
ICH **(Einzelarbeit)**		Ich informiere mich über das Thema Rotationskörper.
DU **(Partnerarbeit)**		Mein Nachbar und ich erarbeiten eine Lösungsidee für die Lernsituation.
WIR **(Gruppenarbeit)**		In einer 4er-Gruppe erstellen wir die Tischvorlage.

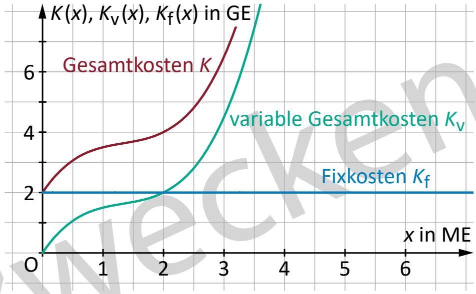
3.2 Wirtschaftliche Zusammenhänge

Die **Gesamtkosten**[1] K für eine Produktion setzen sich aus **Fixkosten** und **variablen Gesamtkosten** zusammen. Der Graph der Gesamtkostenfunktion kann linear oder s-förmig/ertragsgesetzlich verlaufen; er zeigt die Gesamtkosten für eine Produktion in Abhängigkeit von der produzierten Ausbringungsmenge x.

$K(x) = K_v(x) + K_f(x) = mx + b$ mit $m, b > 0$ oder

$K(x) = K_v(x) + K_f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a, c, d > 0$ und $c < 0$.





Aus der s-förmigen/ertragsgesetzlichen Gesamtkostenfunktion K können verschiedene weitere Kostenfunktionen hergeleitet werden. Durch die Umrechnung der Gesamtkosten auf je eine Produktionseinheit entstehen die **Stückkostenfunktionen**, die zu der Klasse der **gebrochenrationalen Funktionen** gehören:

Stückkostenfunktion

Die Stückkosten werden oft auch als Durchschnitts- oder Einheitskosten bezeichnet und umfassen die Kosten, die sich auf eine Produktionseinheit beziehen.

$k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{K_v(x) + K_f(x)}{x} = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x}$

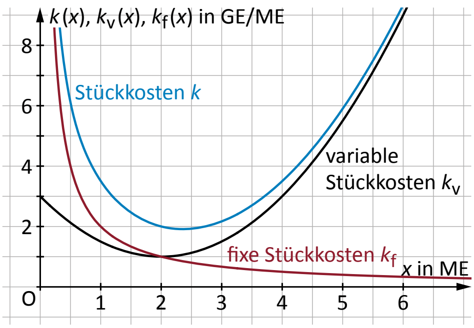
Die Stückkostenfunktion ist eine **unecht gebrochenrationale Funktion**, die einen **Pol** bei $x = 0$ aufweist. Daraus ergibt sich der ökonomische Definitionsbereich $D_{ök} = \mathbb{R}_{>0}$ bzw. $D_{ök} = (0; x_{Kap}]$.

Funktion der variablen Stückkosten

Die variablen Stückkosten sind die auf eine Produktionseinheit entfallenden variablen Gesamtkosten.

$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = \frac{ax^3 + bx^2 + cx}{x} = ax^2 + bx + c$

Die Funktion der variablen Stückkosten ist eine unecht gebrochenrationale Funktion mit einer **schließbaren Lücke** bei $x = 0$ mit $k_v(0) = c \Rightarrow P_{SL}(0|c)$



Daraus ergibt sich der ökonomische Definitionsbereich $D_{ök} = \mathbb{R}_{>0}$ bzw. $D_{ök} = (0; x_{Kap}]$.

1 Nachzulesen im Buch für die Einführungsphase, S. 53 – 55 oder in der Formelsammlung.

Funktion der fixen Stückkosten

Die fixen Stückkosten umfassen die anteiligen Fixkosten pro Produktionseinheit.

$k_f(x) = \frac{K_f(x)}{x} = \frac{d}{x}$

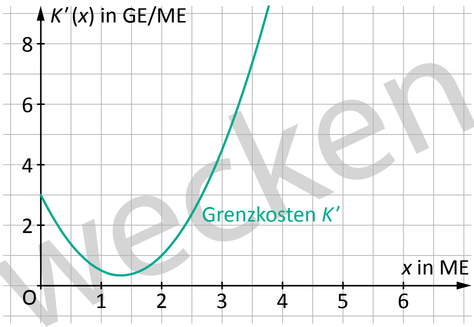
Die Funktion der fixen Stückkosten ist eine **echt gebrochenrationale Funktion** mit einem **Pol** bei $x = 0$. Die **Asymptote** liegt auf der Abszissenachse, d. h., dass der Fixkostenanteil der Stückkosten gegen null strebt; er wird unendlich gering, aber nie genau null. Der ökonomische Definitionsbereich liegt bei $D_{ök} = \mathbb{R}_{>0}$ bzw. $D_{ök} = (0; x_{Kap}]$.

Grenzkostenfunktion

Die **Grenzkosten**[1] K' entsprechen den Kosten, die zusätzlich anfallen, wenn eine sehr kleine Einheit zusätzlich produziert wird. Bei einer s-förmigen/ertragsgesetzlichen Gesamtkostenfunktion ergibt sich folgende Funktionsgleichung für die Grenzkostenfunktion:

$K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$

Die Grenzkostenfunktion ist eine ganzrationale Funktion 2. Grades.



Die **Festlegung des Preises** kann mithilfe verschiedener Analysen erfolgen: Das **Betriebsoptimum (BO)** entspricht der Produktionsmenge, bei der das Verhältnis zwischen Gesamtkosten und Produktionsmenge am besten ist, d. h., das BO entspricht der Tiefstelle der Stückkostenfunktion. Der zugehörige Funktionswert $k(x_{BO})$ gibt die **langfristige Preisuntergrenze (lPu)** an. Sollte der Marktpreis der lPu entsprechen, dann werden die Gesamtkosten gedeckt, das Unternehmen erzielt keinen Gewinn und realisiert keinen Verlust. Das Betriebsoptimum ist demnach mit der Gewinnschwelle gleichzusetzen.

Es gibt zwei Berechnungsmöglichkeiten für das BO und die lPu:

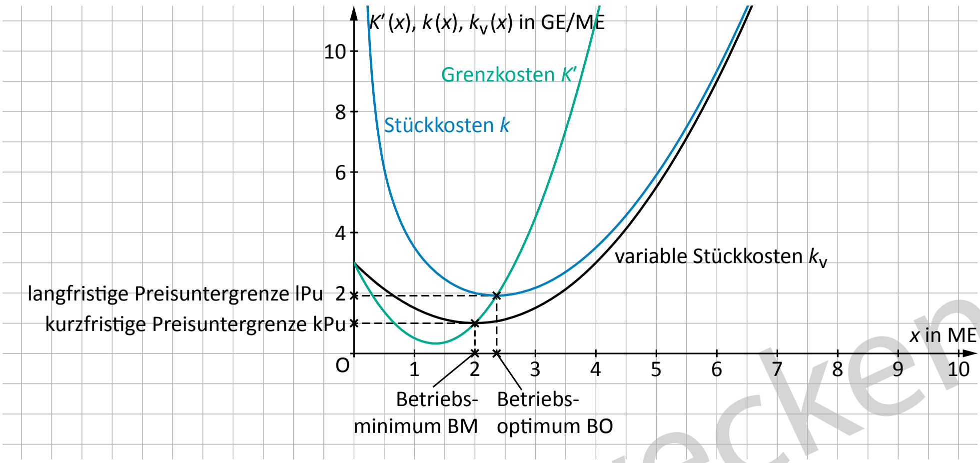
$K'(x) = k(x) \Rightarrow S(x_{BO} | \text{lPu})$ oder

$k'(x) = 0 \Rightarrow x_{BO}$ und $k(x_{BO}) = \text{lPu}$

Das **Betriebsminimum (BM)** entspricht der Produktionsmenge, bei der die variablen Stückkosten minimal sind. Der zugehörige Funktionswert $k_v(x_{BM})$ entspricht der **kurzfristigen Preisuntergrenze (kPu)**. Sinkt der Marktpreis unter die kPu, sollte die Produktion eingestellt werden, weil nicht einmal die variablen Stückkosten gedeckt werden. Das BM ist demnach mit der Produktionsschwelle gleichzusetzen. Entspricht der Marktpreis der kPu, so realisiert das Unternehmen Verluste in Höhe der Fixkosten.

1 Nachzulesen im Buch für die Einführungsphase, S. 157 oder in der Formelsammlung.

Es gibt zwei Berechnungsmöglichkeiten für das BM und die kPu:
$K'(x) = k_v(x) \Rightarrow S(x_{BM} | \text{kPu})$ oder $k_v'(x) = 0 \Rightarrow x_{BM}$ und $k_v(x_{BO}) = \text{kPu}$



Preisfestlegung im Polypol

Der Polypolist wird als Mengenanpasser die Menge herstellen, die zum maximalen Gewinn führt. Das Gewinnmaximum wird über die notwendige Bedingung $G'(x) = 0$ ermittelt.

$G(x) = E(x) - K(x)$

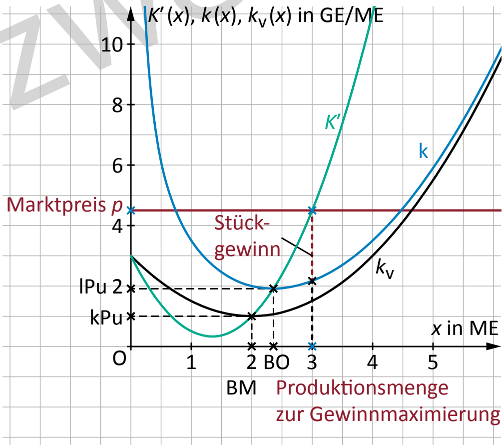
$\Rightarrow \; G'(x) = E'(x) - K'(x) = 0$

$\Rightarrow \; E'(x) = K'(x)$

Der Erlös ergibt sich im Polypol aus

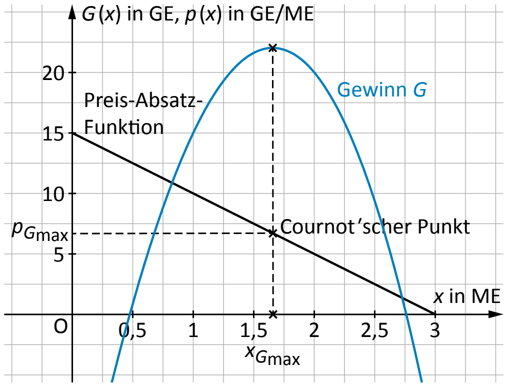
$E(x) = p \cdot x \Rightarrow E'(x) = p$

Daraus folgt für die Berechnung der gewinnmaximalen Menge



$E'(x) = K'(x) \Rightarrow p = K'(x)$, d. h., der Polypolist ermittelt den Schnittpunkt der Preisgeraden p mit seiner Grenzkostenfunktion, um die gewinnmaximale Menge zu bestimmen. Die Grenzkostenfunktion entspricht der **individuellen Angebotsfunktion** des Polypolisten.

Preisfestlegung im Monopol



Im Monopol erfolgt die Preisfestlegung über die gewinnmaximale Menge und den **Cournot'schen Preis**[1]. Die gewinnmaximale Menge wird mithilfe der hinreichenden Bedingungen für Hochpunkte ermittelt:

$G(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

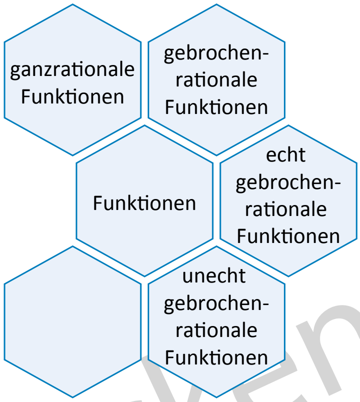
$\Rightarrow$ $G'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ und

$G''(x) = 6ax + 2b < 0$.

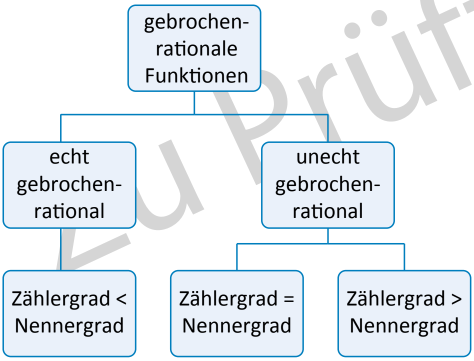
Die so bestimmte gewinnmaximale Menge $x_{G_{max}}$ wird in die Preis-Absatz-Funktion $p(x) = mx + b$ eingesetzt $p(x_{G_{max}}) = m\,x_{G_{max}} + b$ und so der Cournot'sche Preis berechnet. Stellt der Monopolist die gewinnmaximale Menge her und verkauft sie vollständig am Markt zum Cournot´schen Preis, so erzielt er den maximalen Gewinn.

1 Nachzulesen im Buch für die Einführungsphase, S. 54-55 oder in der Formelsammlung.

3.3 Ganzrationale und gebrochenrationale Funktionen



Bei der Untersuchung der Kosten-, Erlös- und Gewinnsituation eines Unternehmens sind nicht mehr nur **ganzrationale Funktionen**[1], sondern auch **gebrochenrationale Funktionen**[2] $f\colon f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ von Bedeutung. Es handelt sich bei den Stückkosten-, Stückerlös- und Stückgewinnfunktionen um gebrochenrationale Funktionen, deren Nennerfunktion $N(x) = x$ entspricht $f(x) = \frac{Z(x)}{x}$, wobei die Zählerfunktion gemäß ihrer wirtschaftlichen Bedeutung eine ganzrationale Funktion ersten bis dritten Grades sein kann und so echt gebrochenrationale oder unecht gebrochenrationale Funktionen entstehen. Die Funktionsklasse der gebrochenrationalen Funktionen wird anhand des Grades der ganzrationalen Zähler- bzw. Nennerfunktion untergliedert.



Beispiel 1

Das Unternehmen *Werkzeug GmbH* stellt zukünftig auch *Steckschlüssel für Linkshänder* her und gilt für dieses Produkt als Monopolist. Aufgrund der Produktionsanpassung können die Gesamtkosten für diese Produktion durch die Funktion K mit $K(x) = 0{,}04x^3 - 1{,}5x^2 + 22x + 50$ modelliert werden, dabei wird x in Mengeneinheiten (ME) und $K(x)$ in Geldeinheiten (GE) angegeben. Die Controlling-Abteilung möchte vor der Preisfestsetzung einige Analysen durchführen:

1 Nachzulesen im Buch für die Einführungsphase, Kapitel 4 ab S. 48 oder in der Formelsammlung.
2 Klassifikation nachzulesen im Buch für die Einführungsphase, S. 80 oder in der Formelsammlung.