Ott
Rosner

Mathematik für berufliche Gymnasien – Analysis, Stochastik
Wahlgebiet: Vektorgeometrie
Abitur 2019

mit Lernvideos

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner
Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule Schwäbisch Hall
Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

* * * * *

15. Auflage 2018

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-**0464-0**

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung dient zur Vorbereitung auf das **Abitur 2019** an beruflichen Gymnasien und ist auf die neue Prüfungsordnung abgestimmt.
Die Aufgaben sind nach den Prüfungsgebieten Analysis mit Anwendungen, Stochastik und Lineare Algebra gegliedert, was dem Schüler/der Schülerin ein gezieltes Üben ermöglicht.
Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.
Dem neuen Abiturmodus wird durch eine Vielzahl von Aufgaben für Teil 1, der ohne Hilfsmittel bearbeitet werden muss, und für die Teile 2 – 4, bei denen Hilfsmittel zugelassen sind, Rechnung getragen.
Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben ist unterschiedlich, um den beruflichen Gymnasien aller Richtungen gerecht zu werden.
Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.
Da die Aufgabensammlung allen Schülern/Schülerinnen bei der **selbstständigen** Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben.
An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Zur Unterstützung des Lernerfolges ist die Hauptprüfung 2016/2017 und die Hauptprüfung 2017/2018 in einigen **Lernvideos** aufgearbeitet. In der Sprache der Abiturienten und Abiturientinnen werden alle Aufgabenteile ausführlich gelöst.

Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der Abiturprüfung in Mathematik 5

I Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung 7

1 Übungsaufgaben 7
1.1 Analysis Übungsaufgaben 7
1.2 Stochastik Übungsaufgaben 13
1.3 Vektorgeometrie Übungsaufgaben 17

Lösungen Übungsaufgaben 21

2 Aufgabensätze Teil 1 ohne Hilfsmittel 39

Lösungen Aufgabensätze Teil 1 ohne Hilfsmittel 51

II Teil der Abiturprüfung mit Hilfsmittel 64

Übungsaufgaben 64
Teil 2 Analysis – Anwendungsorientierte Analysis 64
Teil 3 Stochastik 80
Teil 4 Lineare Algebra: Vektorgeometrie 88

Lösungen Übungsaufgaben 94

III Musteraufgabensätze zur Abiturprüfung 128

Aufgabensatz 1 128
Aufgabensatz 2 137
Aufgabensatz 3 146
Aufgabensatz 4 155
Aufgabensatz 5 164

Lösungen Musteraufgabensätze zur Abiturprüfung 173
Lösungen Aufgabensatz 1 173
Lösungen Aufgabensatz 2 185
Lösungen Aufgabensatz 3 198
Lösungen Aufgabensatz 4 211
Lösungen Aufgabensatz 5 222

IV Hauptprüfungen 233

Hauptprüfung 2016/2017 234
Lösungen Hauptprüfung 2016/2017 243
Hauptprüfung 2017/2018 251
Lösungen Hauptprüfung 2017/2018 260

I Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

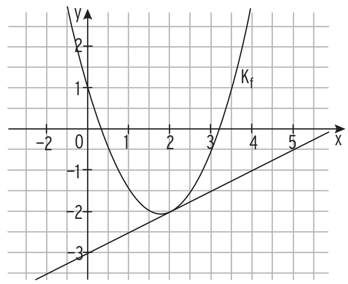
1 Übungsaufgaben

1.1 Analysis Übungsaufgaben

Lösungen Seite 21 - 23

Aufgabe 1

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f.
Ermitteln Sie einen möglichen Funktionsterm.



Aufgabe 2

Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 4$ besitzt einen Wendepunkt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt.

Aufgabe 3

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung. Der Punkt $H(1 \mid 1)$ ist der Hochpunkt des Schaubilds.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabe 4

K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^{x-3} - 2$.
Die Tangente an K an der Stelle $x = 3$ schneidet die Asymptote von K in S.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{2} (x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)\,dx$.
Interpretieren Sie den Integralwert mithilfe geeigneter Flächenstücke.

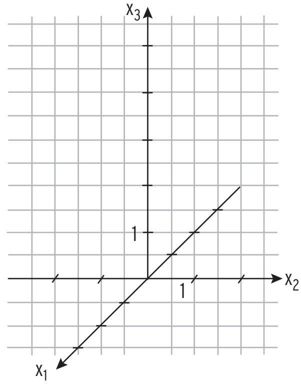
Aufgabe 6

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 2x$.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

Aufgabe 10 Lösungen Seite 37/38

3 Gegeben sind die Punkte A(2 | − 2 | 1) , B(− 2| 2| 1) und C(− 2| − 2| 5).

3.1 Zeichnen Sie die Punkte A, B und C in das nebenstehende Koordinatensystem ein.



3.2 Die Verbindungsvektoren der drei Punkte sind die Vektoren

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CA}$.

Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC ein gleichseitiges Dreieck ist.

Aufgabe 11

Im Raum sind eine Gerade g und ein Punkt A, der nicht auf der Geraden g liegt, gegeben. Beschreiben Sie einen Weg zur Ermittlung der Koordinaten zweier Punkte B und C der Geraden g ,die zusammen mit A ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck bilden.

Aufgabe 12

1 Gegeben ist das eindeutig lösbare Gleichungssystem LGS 1:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 6 \\ 4x_2 - 8x_3 &= -12. \end{aligned}$$

1.1 Berechnen Sie den Lösungsvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ von LGS 1.

1.2 Begründen Sie, warum alle Lösungen des gegebenen Gleichungssystems LGS 1 auch Lösungen des nachfolgenden Gleichungssystems LGS 2 sind.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 6 \\ 12x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= -12. \end{aligned}$$

Aufgabe 13

Gegeben sind die Ebenen E: $3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$ und F: $2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$

Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden von E und F.

Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat diese Gerade?

Lösungen Übungsaufgaben

Lösungen 1.1 Analysis Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Die Abbildung zeigt eine Parabel K_f von f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Ableitung: $f'(x) = 2a \cdot x + b$

Bedingungen ablesen und LGS aufstellen: $f(0) = 1$ $\quad c = 1$

$f(2) = -2 \quad 4a + 2b + c = -2$

$f'(2) = \frac{1}{2} \quad 4a + b = \frac{1}{2}$

Einsetzen von $c = 1$ in $4a + 2b + c = -2$: $\quad 4a + 2b = -3$

$4a + b = \frac{1}{2} \quad | \cdot (-1)$ $\quad +$

Addition ergibt: $\quad b = -3{,}5$

Einsetzen in z. B. $4a + b = \frac{1}{2}$ ergibt $\quad 4a - 3{,}5 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$

Möglicher Funktionsterm $\quad f(x) = x^2 - 3{,}5x + 1$

Aufgabe 2

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 4$; Ableitungen: $f'(x) = -3x^2 + 6x - 1$; $f''(x) = -6x + 6$

Wendepunkt: $f''(x) = 0 \quad -6x + 6 = 0$ für $x = 1$

Mit $f'''(x) = -6 \neq 0$ ist $x = 1$ eine Wendestelle.

Mit $f(1) = -3$ ergibt sich der Wendepunkt $W(1 \mid -3)$.

Ansatz für die Tangente: $\quad y = mx + b$

$f'(1) = 2 = m$; Punktprobe mit W: $\quad -3 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -5$

Gleichung der Tangente: $\quad y = 2x - 5$

Aufgabe 3

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen: $f(0) = 0 \quad d = 0$

$f'(0) = 0 \quad c = 0$

$H(1 \mid 1)$ der Hochpunkt: $f(1) = 1 \quad a + b + c + d = 1$

$f'(1) = 0 \quad 3a + 2b + c = 0$

Aufgabe 3

c und d eingesetzt: $a + b = 1 \quad |\cdot 3$
$3a + 2b = 0 \quad |\cdot (-1)$ +

Additionsverfahren: $b = 3$

Einsetzen in $a + b = 1$ ergibt $a = -2$

Funktionsterm: $f(x) = -2x^3 + 3x^2$

Aufgabe 4

K: $f(x) = e^{x-3} - 2$; Ableitung: $f'(x) = e^{x-3}$

Ansatz für die Tangente: $y = mx + c$

Mit $f(3) = -1$ und $f'(3) = 1 = m$

erhält man mit durch einsetzen: $-1 = 1 \cdot 3 + c \Rightarrow c = -4$

Gleichung der Tangente: $y = x - 4$

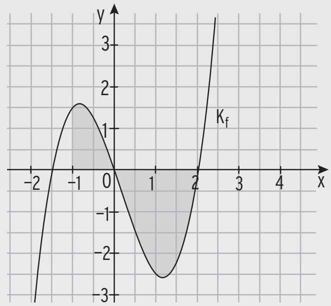
Die Asymptote hat die Gleichung $y = -2$.

Schnittpunkt von Tangente und Asymptote: $-2 = x - 4 \Rightarrow x = 2$

Koordinaten des Schnittpunktes: $S(2 \mid -2)$

Aufgabe 5

$$\int_{-1}^{2} (x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{2}$$
$$= 4 - \frac{4}{3} - 6 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{3}{2}\right)$$
$$= -2 - \frac{4}{3} - \frac{3 + 2 - 18}{12} = -\frac{27}{12}$$
$$= -2{,}25$$



(Flächenbilanz)

Das Flächenstück zwischen K_f und der x-Achse oberhalb der x-Achse ist um 2,25 kleiner als das Flächenstück zwischen K_f und de x-Achse unterhalb der x-Achse.

Aufgabe 6

Schnittstellen von f und g durch

Gleichsetzen: $f(x) = g(x)$ $\quad -x^2 + 3 = 2x$

Nullform: $x^2 + 2x - 3 = 0$

Lösung mit Formel: $x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\quad x_{1|2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$

Schnittstellen = Integrationsgrenzen: $x_1 = -3$; $x_2 = 1$

Integration von − 3 bis 1 über $f(x) - g(x)$: $\int_{-3}^{1} (f(x) - g(x))dx$

Aufgabe 6

$= \int_{-3}^{1} (-x^2 + 3 - 2x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x - x^2\right]_{-3}^{1}$

obere Grenze – untere Grenze $= -\frac{1}{3} + 3 - 1 - (-\frac{1}{3}(-3)^3 + 3(-3) - (-3)^2)$

$= \frac{32}{3}$

Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche beträgt $\frac{32}{3}$.

Aufgabe 7

$f(x) = 4e^{2x} - 2$

Stammfunktion: $F(x) = 2e^{2x} - 2x + c;\ c \in \mathbb{R}$

Bedingung für c: $F(0{,}5) = -1$: $F(0{,}5) = 2e^1 - 1 + c = -1 \Leftrightarrow c = -2e$

Gesuchte Stammfunktion: $F(x) = 2e^{2x} - 2x - 2e$

Aufgabe 8

a) Nullstelle von f

Bedingung: $f(x) = 0$

$2e^{\frac{1}{2}x} - 1 = 0$

$2e^{\frac{1}{2}x} = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}$

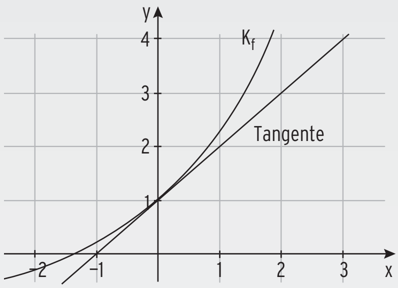
$\frac{1}{2}x = \ln(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow x = 2\ln(\frac{1}{2})$

$x_0 = 2\ln(\frac{1}{2})$ ist Nullstelle von f

b) **Tangente** in $S(0 \mid 1)$

$f'(x) = e^{\frac{1}{2}x}$; $f'(0) = 1$;

Die Tangente ist eine Gerade mit Steigung 1, sie schneidet die x-Achse in – 1 und die y-Achse in 1, die beiden Seiten (Katheten) haben die Länge 1, dieses Dreieck ist gleichschenklig.



Aufgabe 9

$\int_{0}^{90} k(t)dt$: gesamte Heizkosten über 90 Tage seit dem 1. Januar

$\frac{1}{90}\int_{0}^{90} k(t)dt$: durchschnittliche tägliche Heizkosten über 90 Tage seit dem 1. Januar.

Aufgabe 10

Gesamtkosten K mit $K(x) = 0{,}5x^3 - 8x^2 + 45x + 70$ mit $D_K = [0; 13]$

Minimum der variablen Stückkosten

variable Stückkosten $k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = 0{,}5x^2 - 8x + 45$; $k_v'(x) = x - 8$; $k_v''(x) = 1 > 0$

Minimum der variablen Stückkosten: $k_v'(x) = 0$ für $x = 8$

Nachweis: $k_v(8) = 13$ ist das Minimum wegen $k_v''(x) = 1 > 0$

Interpretation: Der minimale Verkaufspreis, bei dem bereits die fixen Kosten als Verlust in Kauf genommen werden, beträgt 13 GE/ME.

Aufgabe 11

Ableitung von f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$ mit der Produktregel

Mit $u(x) = 2x^2 + 5 \Rightarrow u'(x) = 4x$

und $v(x) = e^{-2x} \Rightarrow v'(x) = -2 \cdot e^{-2x}$

folgt durch Einsetzen in $f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$:

$f'(x) = (2x^2 + 5) \cdot (-2e^{-2x}) + e^{-2x} \cdot 4x$

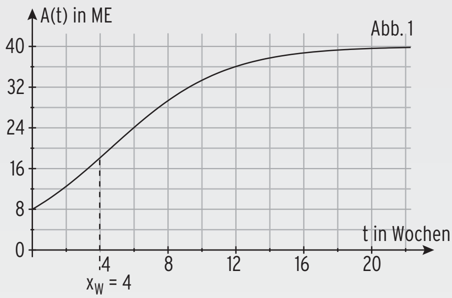
Zusammenfassen durch Ausklammern: $f'(x) = e^{-2x} \cdot \left((2x^2 + 5) \cdot (-2) + 4x\right)$

Erste Ableitung von f: $f'(x) = e^{-2x} \cdot \left(-4x^2 - 10 + 4x\right)$

Aufgabe 12

a) Langfristig wird der Gesamtabsatz 40 ME betragen. Die Absatzkurve hat die Asymptote mit y = 40.

b) Momentane Änderungsrate maximal in der Wendestelle: x = 4



Aufgabe 13

$g(t) = 80 \cdot (1 - e^{-0{,}05t})$; $t \geq 0$

Für $t \to \infty$: $g(t) \to 80$ wegen $e^{-0{,}05t} \to 0$

Langfristig befinden sich 80 mg Wirkstoffmenge im Blut.

$g'(t) = 80 \cdot 0{,}05 \cdot e^{-0{,}05t} > 0$

Die Wirkstoffmenge im Blut nimmt ständig zu.

Bed.: $g'(t) = 1$ $e^{-0{,}05t} = \frac{1}{4}$

$-0{,}05t = \ln(\frac{1}{4}) \Rightarrow t = -20 \cdot \ln(\frac{1}{4})$

Nach $-20\ln(\frac{1}{4})$ (= 20 ln(4)) Minuten beträgt die momentane Änderungsrate $1\ \frac{mg}{min}$.

Hinweis: Ohne Hilfsmittel lässt sich $\ln(\frac{1}{4})$ nicht in eine Dezimalzahl umwandeln.

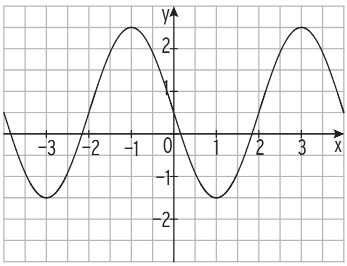
III Musteraufgabensätze zur Abiturprüfung

Aufgabensatz 1 **Lösungen Seite 173 - 184**

Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis **Punkte**

1.1 Gegeben ist das folgende Schaubild einer Funktion: 6



Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) Der Wert der ersten Ableitung an der Stelle $x = 0$ ist negativ.

b) Der Funktionswert an der Stelle $x = -2$ ist positiv.

c) Der Wert der ersten Ableitung an der Stelle $x = -3$ ist null.

d) Der Wert der zweiten Ableitung an der Stelle $x = 3$ ist positiv.

1.2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - 6x;\ x \in \mathbb{R}$. 4
Berechnen Sie, an welchen Stellen das zugehörige Schaubild K eine waagerechte Tangente aufweist.

1.3 Die Funktion g hat die Eigenschaften: $g(3) = 0$ und $\int_0^6 g(x)dx = 0$ 4
Skizzieren Sie ein mögliches Schaubild von g und begründen Sie Ihre Vorgehensweise.

1.4 Das Schaubild einer trigonometrischen Funktion ist symmetrisch zur y-Achse, verläuft durch den Punkt $S(0 \mid 3)$ und hat in $T(3 \mid 0)$ einen Tiefpunkt. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm an. 3

Aufgabensatz 1

Teil 1 ohne Hilfsmittel

2 Stochastik **Punkte**

Bei der Wintersportart Biathlon wird bei jeder Schießeinlage auf fünf Scheiben geschossen. Ein Biathlet tritt bei einem Einzelrennen zu einer Schießeinlage an, bei der er auf jede Scheibe einen Schuss abgibt. Diese Schießeinlage wird modellhaft durch eine Bernoullikette mit der Länge 5 und der Trefferwahrscheinlichkeit p beschrieben.

2.1 Gib für die folgenden Ereignisse A, B und C jeweils einen Term an, der die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses in Abhängigkeit von p beschreibt. 3

A: „Der Biathlet trifft bei genau vier Schüssen."

B: „Der Biathlet trifft nur bei den ersten beiden Schüssen."

C: „Der Biathlet trifft bei höchstens vier Schüssen."

2.2 Erläutere anhand eines Beispiels, dass die modellhafte Beschreibung der Schießeinlage durch eine Bernoullikette unter Umständen der Realität nicht gerecht wird. 2

3 Vektorgeometrie

3.1 Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(1|-1|3)$ und $B(2|-3|0)$. 5

Die Ebene E wird von g orthogonal geschnitten und enthält den Punkt $C(4|3|-8)$.

Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E.

Untersuchen Sie, ob S zwischen A und B liegt.

3.2 Gegeben sind die Ebenen $E: x_1 + x_2 = 4$ und $F: x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$. 3

Stellen Sie die beiden Ebenen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.

$\overline{30}$

Aufgabensatz 1

Teil 2 mit Hilfsmittel

Aufgabe 1

Analysis	Punkte
1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{x-1} - x$; $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild der Funktion f heißt K.	
1.1 Zeichnen Sie das Schaubild K in ein Koordinatensystem ein. Geben Sie die Gleichung der Asymptote von K an und zeichnen Sie diese ebenfalls ein.	5
1.2 Untersuchen Sie K auf Extrempunkte.	4
1.3 Das Schaubild K und die 2. Winkelhalbierende schließen mit der y-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = a$ für $a < 0$ eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von a. Gegen welchen Wert strebt dieser Flächeninhalt für $a \to -\infty$?	4
2.1 Das zur y-Achse symmetrische Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades schneidet die y-Achse im Punkt $S(0\|2)$, es hat an der Stelle $x = 1$ die Steigung -4 und einen Extrempunkt an der Stelle $x = \sqrt{2}$. Bestimmen Sie den zugehörigen Funktionsterm.	4
2.2 Zeigen Sie: Die Wendestelle einer Polynomfunktion 3. Grades liegt bei $x = -2$, wenn die Koeffizienten von x^3 und x^2 das Verhältnis $1 : 6$ haben.	3

Lösungen Musteraufgabensätze zur Abiturprüfung

Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis

1.1

a) Aussage wahr. Bei x = 0 fällt die Kurve.

b) Aussage wahr. Bei x = −2 befindet sich das Schaubild oberhalb der x-Achse.

c) Aussage wahr. Bei x = −3 hat das Schaubild einen Tiefpunkt mit Steigung 0.

d) Aussage falsch. Bei x = 3 ist das Schaubild rechtsgekrümmt, daher hat die zweite Ableitung hier einen negativen Wert.

1.2 $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - 6x;\ x \in \mathbb{R};\ f'(x) = x^4 + x^2 - 6$

Stellen mit waagerechter Tangente

Bedingung: $f'(x) = 0$ $\quad x^4 + x^2 - 6 = 0$

Substitution: $(u = x^2)$ $\quad u^2 + u - 6 = 0$

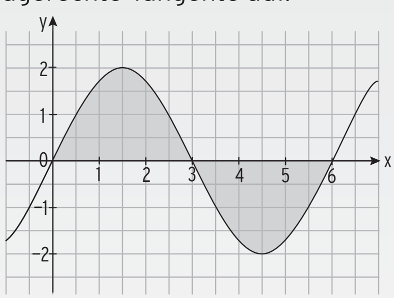
Lösungen in u: $\quad u_{1|2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$

Lösungen der Gleichung in u: $\quad u_1 = 2;\ u_2 = -3$

Lösungen in x: $\quad u_1 = 2 \Rightarrow x_{1|2} = \pm\sqrt{2}$

Bei $x_{1|2} = \pm\sqrt{2}$ weist das Schaubild eine waagerechte Tangente auf.

1.3 $g(3) = 0$: Das Schaubild muss in x=3 einen gemeinsamen Punkt mit der x-Achse aufweisen.



$\int_0^6 g(x)dx = 0$: Die „Flächenbilanz“ muss Null ergeben, d.h. die Inhalte der Flächen zwischen Schaubild und x-Achse müssen ober- und unterhalb der x-Achse gleich groß sein.

Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis

1.4 Aufgrund der Symmetrie zur y-Achse wird eine Kosinusfunktion verwendet:

$f(x) = a \cdot \cos(k \cdot x) + b$

Diese weist den Hochpunkt S(0 | 3) und den Tiefpunkt T (3 | 0) auf.
Man erhält:
Amplitude: $a = \frac{y_H - y_T}{2} = \frac{3 - 0}{2} = \frac{3}{2}$
Mittellinie: $b = \frac{y_H + y_T}{2} = \frac{3 + 0}{2} = \frac{3}{2}$
Zwischen dem Hoch- und Tiefpunkt liegt eine halbe Periodenlänge.

Die Periodenlänge p = 6 führt auf $k = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Möglicher Funktionsterm: $f(x) = \frac{3}{2}\cos(\frac{\pi}{3}x) + \frac{3}{2}$

2 Stochastik

2.1 X: Anzahl der Treffer, X ist $B_{5;\,p}$-verteilt

$P(A) = P(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1 - p)^1 = 5 \cdot p^4 \cdot (1 - p)$ mit $\binom{5}{4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \binom{5}{1} = \frac{5}{1} = 5$

$P(B) = p^2 \cdot (1 - p)^3$ (Reihenfolge ist festgelegt)

$P(C) = P(X \leq 4) = 1 - P(5 \text{ Treffer}) = 1 - p^5$

2.2 Eine Voraussetzung für eine Bernoullikette ist eine konstante Trefferwahrscheinlichkeit des Schützen. Dies ist in der Realität nicht gegeben, da der Biathlet beim ersten Schuss beispielsweise noch einen erhöhten Puls hat und damit möglicherweise eine geringere Trefferwahrscheinlichkeit.
Zudem ist die Trefferwahrscheinlichkeit auch stets vom Wind abhängig, der sich permanent ändert.

Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 1 ohne Hilfsmittel

3 Vektorgeometrie

3.1 Gerade g durch die Punkte $A(1|-1|3)$ und $B(2|-3|0)$:

$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + r\left(\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$

Da die Gerade g orthogonal zu E verläuft, kann der Richtungsvektor von g als Normalenvektor von E verwendet werden: $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$

Die Ebene E wird von g orthogonal geschnitten und enthält den Punkt $C(4|3|-8)$: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\3\\-8\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix} = 0$

Koordinatengleichung von E: $x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 22 = 0$

Alternative:

Ansatz für Koordinatengleichung von E: $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = b$

Einsetzen der Koordinaten von C: $4 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-8) = b \Rightarrow b = 22$

Schnittpunkt S von g und E

Schnitt von E und g durch Einsetzen des allgemeinen Geradenpunktes in E:

$1 + r - 2(-1 - 2r) - 3(3 - 3r) - 22 = 0 \quad \Leftrightarrow 14r = 28 \Leftrightarrow r = 2$

Einsetzen von r = 2 in g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-5\\-3\end{pmatrix}$; also $S(3|-5|-3)$

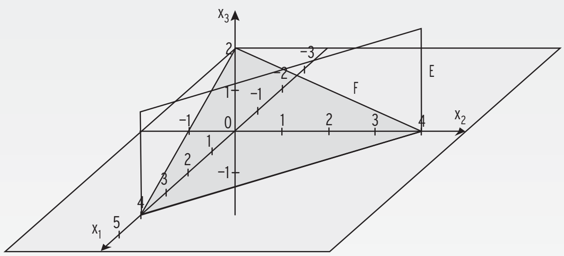
S liegt nicht zwischen A und B, da der zugehörige r-Wert nicht zwischen 0 und 1 liegt.

3.2 $E: x_1 + x_2 = 4$

Spurpunkte $S_1(4|0|0)$, $S_2(0|4|0)$, S_3 ex. nicht.

F: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$.

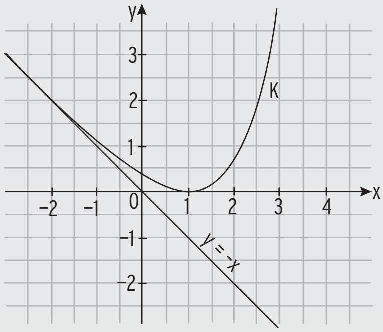
Spurpunkte $S_1(4|0|0)$, $S_2(0|4|0)$, $S_3(0|0|2)$.



Lösungen Aufgabensatz 1

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Analysis



1 K: $f(x) = e^{x-1} - x$; $x \in \mathbb{R}$.

1.1 Schaubild K mit Asymptote:

Gleichung der schiefen Asymptote: $y = -x$

(für $x \to -\infty$)

($e^{x-1} \to 0$ für $x \to -\infty$)

Asymptote: zweite Winkelhalbierende

1.2 Extrempunkte

Ableitungen: $f'(x) = e^{x-1} - 1$; $f''(x) = e^{x-1}$

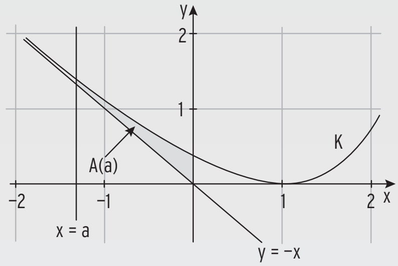
Bedingung: $f'(x) = 0$ $\quad e^{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} = 1$

Logarithmieren: $\quad x - 1 = 0$

Stelle mit waagrechter Tangente: $\quad x = 1$

Mit $f''(1) = e^0 = 1$ und $f(1) = e^0 - 1 = 0$ somit Tiefpunkt: $T(1|0)$

1.3 Inhalt der Fläche in Abhängigkeit von a:



$$A(a) = \int_a^0 (f(x) - (-x))dx = \int_a^0 e^{x-1}dx$$

$$= [e^{x-1}]_a^0 = e^{-1} - e^{a-1}$$

Für $a \to -\infty$ strebt der Flächeninhalt gegen e^{-1} ($e^{a-1} \to 0$)

2.1 Ansatz mit Hilfe der Symmetrieeigenschaft:

$p(x) = ax^4 + bx^2 + c$

Ableitung: $p'(x) = 4ax^3 + 2bx$

Bedingungen und LGS: $S(0|2)$: $p(0) = 2$ $\quad c = 2$

In $x = 1$ die Steigung -4: $p'(1) = -4$ $\quad 4a + 2b = -4$

Extrempunkt an der Stelle $x = \sqrt{2}$: $p'(\sqrt{2}) = 0$ $\quad 8\sqrt{2}a + 2\sqrt{2}b = 0$

2.1 $8\sqrt{2}a + 2\sqrt{2}b = 0$ lässt sich vereinfachen ($|: 2\sqrt{2}$) zu $4a + b = 0$

Das LGS, bestehend aus den Gleichungen $4a + 2b = -4$ und $4a + b = 0$,

hat die Lösung: $a = 1$ und $b = -4$

Man erhält den Funktionsterm $p(x) = x^4 - 4x^2 + 2$

2.2 Polynomfunktion 3. Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Ableitungen: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$; $f'''(x) = 6a \neq 0$

Die Wendestelle bei $x = -2$: $f''(-2) = -12a + 2b = 0$ für $b = 6a$

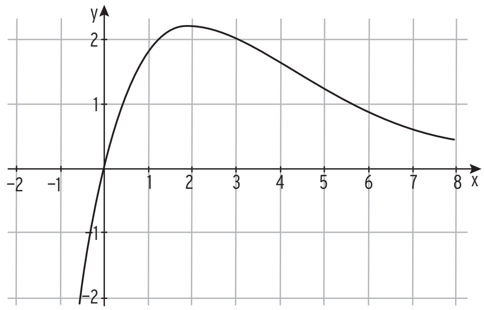
Die Koeffizienten von x^3 und x^2 haben das Verhältnis $a : 6a = 1 : 6$.

Hauptprüfung 2017/2018

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Lösungen Seite 260 - 271**

Analysis **Punkte**

1.1 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds K_f einer Funktion f. 6



Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründen Sie.

(1) Es gilt: $f''(1) < 0$.

(2) Die Steigung von f an der Stelle $x = 0$ ist kleiner als die durchschnittliche Änderungsrate von f im Intervall $[0 ; 3]$.

(3) Das Schaubild jeder Stammfunktion F von f hat an der Stelle $x = 0$ einen Tiefpunkt.

1.2 Berechnen Sie die erste Ableitung g' für die jeweilige Funktion g. 3

(1) $g(x) = (2x + 1)^2$

(2) $g(x) = (x + 1) \cdot e^x$

1.3 Gegeben ist die Funktion h durch $h(x) = \cos(\pi \cdot x) + 1$ mit $x \in \mathbb{R}$.

1.3.1 Skizzieren Sie das Schaubild von h für $0 \leq x \leq 4$. 3

1.3.2 Berechnen Sie: $\int_0^2 h(x)\,dx$ 3

$\overline{15}$

Hauptprüfung 2017/2018

Teil 1 ohne Hilfsmittel

Stochastik **Punkte**

2 In der norwegischen Hauptstadt Oslo ist jeder zehnte PKW ein Elektroauto.

2.1 Auf einem kommunalen Parkplatz in Oslo beträgt die Parkgebühr für PKW fünf norwegische Kronen. Elektroautos parken kostenlos. Pro Tag wird der Parkplatz von 300 PKW genutzt. Bestimmen Sie die Höhe der Einnahmen, die man erwarten kann. 2

2.2 Im Folgenden werden in Oslo zufällig vorbeifahrende PKW betrachtet.

2.2.1 Drei PKW fahren vorbei. 4

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Unter diesen PKW ist genau ein Elektroauto.

B: Unter diesen PKW ist mindestens ein Elektroauto.

2.2.2 Definieren Sie die Zufallsvariable X und formulieren Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnet werden kann: 2

$P(X \leq 2) = 0{,}9^{100} + 100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^{99} + \binom{100}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{98}$

$\overline{8}$

3 Lineare Algebra: Vektorgeometrie **Punkte**

3.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems: 3

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3$$
$$3x_2 - x_3 = 5$$

3.2 Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ spannen ein Parallelogramm auf. 4

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{a}$ zueinander orthogonal sind.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms.

$\overline{7}$

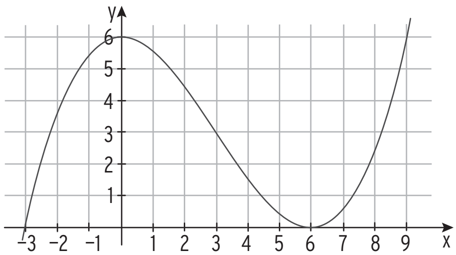
Hauptprüfung 2017/2018

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Analysis **Punkte**

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds K von f.



1.1.1 Bestimmen Sie die reellen Werte von a, b und c, sodass gilt: 3

$f(x) = a \cdot (x - b) \cdot (x - c)^2$; $x \in \mathbb{R}$.

1.1.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von K und zeigen Sie, dass dieser auf der ersten Winkelhalbierenden liegt. 4

1.1.3 Das Schaubild K schließt mit der x-Achse eine Fläche A ein, die von der y-Achse in zwei Flächen unterteilt wird. 4

Bestimmen Sie den prozentualen Anteil des Inhalts der kleineren Fläche am Inhalt von A.

1.1.4 Geben Sie jeweils die Gleichung einer Geraden durch den Punkt (0|6) an, die mit K 6

(1) genau einen Punkt

(2) genau drei Punkte

gemeinsam hat.

Die Gerade mit der Gleichung $y = m \cdot x + 6$ soll mit K genau zwei gemeinsame Punkte haben. Bestimmen Sie die beiden Werte für die Steigung m.

1.2 Die Funktion g ist gegeben durch 3

$$g(x) = \int_1^{x^2+1} \sin(2t)\,dt \text{ mit } x \in \mathbb{R}.$$

Gabi behauptet, dass die erste Ableitung der Funktion g wie folgt lautet:

$g'(x) = \sin(2x^2 + 2) - \sin(2)$. Beurteilen Sie diese Behauptung.

20

Lösungen Hauptprüfung 2017/2018

www.mvurl.de/f6gd

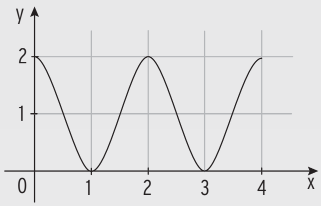
Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis

1.1 (1) Die Aussage ist wahr. Das Schaubild K_f ist in P(1 | f(1)) rechtsgekrümmt denn die Steigung von f nimmt hier ab.
(2) Die Aussage ist falsch. Die Steigung von K_f in x = 0 ist größer als 1 und damit größer als die durchschnittliche Änderungsrate („mittlere Steigung") im Intervall [0; 3], welche ca. $\frac{2}{3}$ beträgt.
(3) Die Aussage ist wahr. Die Funktion f, welche die Ableitung jeder Stammfunktion von F darstellt ($F'(x) = f(x)$), hat in x = 0 eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von − nach +.

1.2 (1) $g'(x) = 2 \cdot (2x + 1) \cdot 2 = 4 \cdot (2x + 1) = 8x + 4$ (Kettenregel)
auch durch Ausmultiplizieren $g(x) = 4 \cdot x^2 + 4x + 1$ und dann ableiten
(2) $g'(x) = 1 \cdot e^x + (x + 1) \cdot e^x = e^x + (x + 1) \cdot e^x = (x + 2) \cdot e^x$ (Produktregel)

1.3.1 Schaubild von h mit
$h(x) = \cos(\pi \cdot x) + 1$ für $0 \leq x \leq 4$.
Periodenlänge: $p = \frac{2\pi}{\pi} = 2$



1.3.2 $\int_0^2 h(x)\,dx = \int_0^2 (\cos(\pi \cdot x) + 1)\,dx$
$= \left[\frac{1}{\pi} \cdot \sin(\pi \cdot x) + x\right]_0^2 = \frac{1}{\pi} \cdot \sin(\pi \cdot 2) + 2 - \frac{1}{\pi} \cdot \sin(0) = \frac{1}{\pi} \cdot 0 + 2 - (\frac{1}{\pi} \cdot 0) = 2$

2 Stochastik

2.1 X: Anzahl der PKW, die kein Elektroauto sind (und somit Parkgebühr bezahlen müssen); X ist binomialverteilt mit n = 300 (300 PKW pro Tag) und p = 0,9 (90 % der Autos sind keine Elektroautos);
$E(X) = 300 \cdot 0{,}9 = 270$ (zu erwartende Anzahl an zahlungspflichtigen Autos)
Erwartete Einnahmen: $5 \cdot 270 = 1350$
Man kann pro Tag Einnahmen in Höhe von 1350 norwegischen Kronen erwarten.

www.mvurl.de/5j4j

2.2.1 X: Anzahl der Elektroautos unter 3 zufällig vorbeifahrenden PKW;
X ist binomialverteilt mit n = 3 und p = 0,1;
$P(A) = P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243$
Hinweis: $\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!/(3-1)!} = \frac{6}{2} = 3$ bzw. es gibt 3 mögliche Anordnungen für ein Elektroauto und zwei Autos, die keine Elektroautos sind.
$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\text{kein Elektroauto}) = 1 - 0{,}9^3 = 1 - 0{,}729 = 0{,}271$

Lösungen Hauptprüfung 2017/2018

Teil 1 ohne Hilfsmittel

2 Stochastik

2.2.2 X: Anzahl der Elektroautos unter 100 zufällig vorbeifahrenden PKW.

Ereignis: Unter 100 zufällig vorbeifahrenden PKW befinden sich höchstens zwei Elektroautos. Hinweis: $\binom{100}{0} = 1$; $\binom{100}{1} = 100$

Teil 1 ohne Hilfsmittel

3 Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3.1 LGS in Matrixform: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Es liegt eine „Nullzeile" vor. Das LGS hat also unendlich viele Lösungen.

Bestimmung des Lösungsvektors:

Setzen von $x_2 = t$ $(t \in \mathbb{R})$;

Einsetzen in 2. Zeile: $3x_2 - x_3 = 5$: $\Leftrightarrow$ $x_3 = 3t - 5$

www.mvurl.de/bjua

Einsetzen in 1. Zeile $x_1 + x_2 - x_3 = 4$: $x_1 + t + 3t - 5 = 4 \Leftrightarrow x_1 = -4t + 9$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t + 9 \\ t \\ 3t - 5 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

Hinweis: Setzen von $x_3 = t$ $(t \in \mathbb{R})$ führt zu $x_2 = \frac{t + 5}{3}$ und $x_1 = \frac{-4t + 7}{3}$

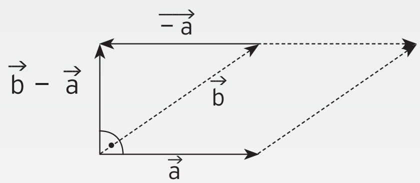
Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4t + 7}{3} \\ \frac{t + 5}{3} \\ t \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

3.2 $\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Zwei Vektoren sind orthogonal zueinander, wenn das Skalarprodukt den Wert 0 hat: $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 0$

Somit sind die Vektoren $(\vec{b} - \vec{a})$ und $\vec{a}$ orthogonal zueinander.

An der Skizze ist erkennbar, dass die Länge des Vektors $(\vec{b} - \vec{a})$ der Höhe des Parallelogramms entspricht.



$A = |\vec{a}| \cdot |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 10$

Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist damit 10.

Lösungen Hauptprüfung 2017/2018

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Analysis

www.mvurl.de/qbc8

1.1.1 $f(x) = a \cdot (x - b) \cdot (x - c)^2$ ist der Nullstellenansatz des Funktionsterms.

Am Schaubild ist zu erkennen, dass f bei $x = -3$ eine einfache Nullstelle besitzt. Somit muss b den Wert -3 haben.

In $x = 6$ hat f eine doppelte Nullstelle, somit hat c den Wert 6.

Der Wert $a = \frac{1}{18}$ kann aus $f(x) = \frac{1}{18}x^3 - \ldots$ übernommen werden.

(Zusatz: Man erhält insgesamt den Term $f(x) = \frac{1}{18} \cdot (x + 3) \cdot (x - 6)^2$)

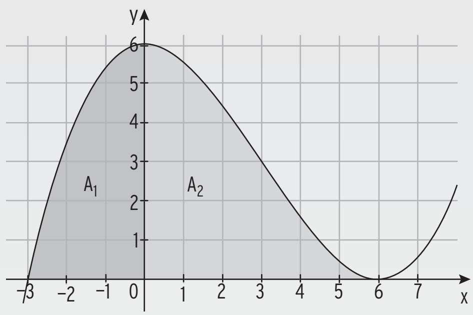
1.1.2 Ableitungen: $f'(x) = \frac{1}{6}x^2 - x$; $f''(x) = \frac{1}{3}x - 1$; $f'''(x) = \frac{1}{3}$

Bedingung für Wendepunkt: $f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$

Wegen $f'''(3) = \frac{1}{3} \neq 0$ und $f(3) = 3$ hat K in $W(3 \mid 3)$ einen Wendepunkt.

Die erste Winkelhalbierende hat die Gleichung $y = x$. Alle Punkte, bei welchen sich die x- und die y-Koordinate entsprechen, liegen auf der ersten Winkelhalbierenden. Somit liegt auch $W(3 \mid 3)$ darauf.

Alternativ Punktprobe: Einsetzen der Koordinaten von $W(3 \mid 3)$ in $y = x$ ergibt $3 = 3$ und damit eine wahre Aussage.



1.1.3 Die Fläche A, welche K mit der x-Achse einschließt, wird durch die y-Achse in die beiden Teilflächen A_1 und A_2 unterteilt.

Berechnung der Flächeninhalte:

$$A_1 = \int_{-3}^{0} \left(\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6\right) dx = \left[\frac{1}{72}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 6x\right]_{-3}^{0}$$

$$= \frac{1}{72} \cdot 0^4 - \frac{1}{6} \cdot 0^3 + 6 \cdot 0 - \left(\frac{1}{72} \cdot (-3)^4 - \frac{1}{6} \cdot (-3)^3 + 6 \cdot (-3)\right) = \frac{99}{8} \approx 12{,}38$$

$$A_2 = \int_{0}^{6} \left(\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6\right) dx = \left[\frac{1}{72}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 6x\right]_{0}^{6}$$

$$= \frac{1}{72} \cdot 6^4 - \frac{1}{6} \cdot 6^3 + 6 \cdot 6 = 18$$

Lösungen Hauptprüfung 2017/2018

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1** **Fortsetzung**
Analysis

1.1.3 Der Inhalt der Fläche A beträgt somit: $A = A_1 + A_2 = \frac{99}{8} + 18 = \frac{243}{8}$

(Hinweis: Berechnung von A auch durch $\int_{-3}^{6} (\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6)\,dx = \frac{243}{8}$)

Prozentualer Anteil des Inhalts der kleineren Fläche am Inhalt von A:

$\frac{A_1}{A} = \frac{\frac{99}{8}}{\frac{243}{8}} = \frac{11}{27} = 0{,}4074...$ oder auch $\frac{12{,}38}{30{,}38} = 0{,}4075$

Dieser beträgt also ca. 40,7 %.

1.1.4 Zu möglichen Geradengleichungen, welche mit K einen bzw. drei Punkte gemeinsam haben sollen, gelangt man beispielsweise durch eigene Skizzen am Schaubild, welches auf dem Aufgabenblatt abgedruckt ist.

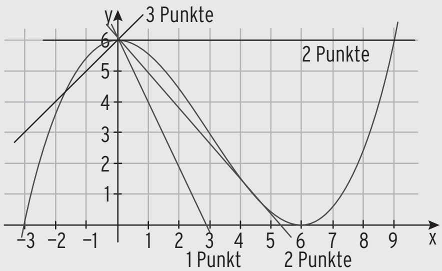
(1) Genau einen gemeinsamen Punkt:

z.B. $y = -3x + 6$ oder $x = 0$

(2) Genau 3 gemeinsame Punkte:

z.B. $y = 2x + 6$

In beiden Fällen sind weitere Lösungen möglich.



Bestimmung der beiden möglichen Werte für m, sodass die Gerade mit der Gleichung $y = m \cdot x + 6$ mit K genau zwei gemeinsame Punkte besitzt:

Bedingung: $\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6 = mx + 6 \quad | - mx - 6$

$\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - mx = 0$

Ausklammern von x: $x \cdot (\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{2}x - m) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x = 0 \lor \frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{2}x - m = 0$

Die Gerade und K haben in $x = 0$ also in jedem Fall einen gemeinsamen Punkt. Die Gleichung $\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{2}x - m = 0$ soll also auf genau eine weitere Lösung, welche ungleich 0 ist, führen.

Anwenden der Lösungsformel ergibt: $\frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{9}m}}{\frac{1}{9}}$

Für $\frac{1}{4} + \frac{2}{9}m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{8}$ erhält man genau eine weitere Lösung ungleich 0. Somit stellt $m = -\frac{9}{8}$ einen der beiden gesuchten Werte dar.

Hinweis: Klammert man $\frac{1}{18}x$ aus: $\frac{1}{18}x \cdot (x^2 - 9x - 18m) = 0$ erhält man die

Diskriminante $D = 81 + 72m$