Ott
Rosner

Mathematik für berufliche Gymnasien – Analysis, Stochastik Wahlgebiet: Prozesse und Matrizen

Abitur 2021

Baden-Württemberg

mit Lernvideos

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Stefan Rosner
Lehrauftrag Mathematik an der Kaufmännischen Schule Schwäbisch Hall
Studium der Mathematik an der Universität Mannheim

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen.

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

* * * * *

Umschlag Hintergrundbild: © Beatrice Chatot – Fotolia.com
Kreis links: © Africa Studio – Fotolia.com, Kreis rechts: © Picture-Factory – Fotolia.com

17. Auflage 2020
© 2004 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0450-17
ISBN 978-3-8120-1015-3

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung dient zur Vorbereitung auf das **Abitur 2021** an beruflichen Gymnasien und ist auf die aktuelle Prüfungsordnung abgestimmt.

Für die Abiturprüfung 2021 gelten aufgrund der Pandemie besondere Vorgaben die den Ablauf und die prüfungsrelevanten Stoffgebiete betreffen.
Weitere Erläuterungen finden Sie auf den Seiten 5 und 6 und in einem ausführlichen Video.

Die Aufgaben sind nach den Prüfungsgebieten Analysis mit Anwendungen, Stochastik und Lineare Algebra gegliedert, was den Schülerinnen und Schülern ein gezieltes Üben ermöglicht.
Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.
Dem neuen Abiturmodus wird durch eine Vielzahl von Aufgaben für Teil 1, der ohne Hilfsmittel bearbeitet werden muss, und für die Teile 2 – 4, bei denen Hilfsmittel zugelassen sind, Rechnung getragen.
Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben ist unterschiedlich, um den beruflichen Gymnasien aller Richtungen gerecht zu werden.
Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.
Da die Aufgabensammlung allen Schülerinnen und Schülern bei der **selbstständigen** Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche und schülergerechte Lösungen angegeben.
An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Zur Unterstützung des Lernerfolges sind **alle Hauptprüfungen ab 2016/2017** in einigen **Lernvideos** aufgearbeitet.
In der Sprache der Abiturientinnen und Abiturienten werden alle Aufgabenteile ausführlich gelöst.

Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der Abiturprüfung 2021 in Mathematik

www.mvurl.de/k71w

Zu Beginn: SchülerIn erhält alle Aufgabenteile (1 bis 4), jedoch keine Hilfsmittel

Phase 1: Bearbeitung des hilfsmittelfreien Teils

Teil	Thema	Auswahl	Zeitrichtwert	Punkte
1	Analysis (50%) Stochastik (25%) Wahlgebiet: Vektorgeometrie/Matrizen (25%)	keine	80 min	30

Nach endgültiger Abgabe von Teil 1 erhält SchülerIn die Hilfsmittel

- SchülerIn erhält **eine Aufgabe** aus der Stochastik und **eine** aus dem Wahlgebiet. Die Lehrkraft wählt diese aus jeweils zwei Aufgaben aus.

Phase 2: Bearbeitung der Teile mit Hilfsmitteln (Taschenrechner + Merkhilfe)

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Thema</th><th>Auswahl</th><th>Zeitrichtwert</th><th>Punkte</th></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>Analysis (ca. 67%)</td><td>keine</td><td rowspan="2">80 min</td><td rowspan="2">30</td></tr>
<tr><td>Anwendungsorientierte Analysis (ca. 33%)</td><td>SchülerIn wählt eine aus drei Aufgaben</td></tr>
<tr><td>3

4</td><td>Entweder Stochastik oder

Vektorgeometrie/Matrizen</td><td>SchülerIn wählt eine aus zwei vorgelegten Aufgaben</td><td>40 min</td><td>15</td></tr>
</table>

Hinweise

- Die Prüfung dauert insgesamt maximal 240 Minuten.
  Die maximal erreichbare Punktzahl beträgt 75 Punkte.
- SchülerIn erhält **zwei Aufgaben entweder** aus der Stochastik oder aus dem Wahlgebiet (Vektorgeometrie oder Prozesse/Matrizen) vorgelegt. Die Auswahl (Stochastik oder Wahlgebiet) trifft die Lehrkraft

Aufgabenerstellung für die Abiturprüfung 2021 am Beruflichen Gymnasium

Prüfungsrelevante Stoffgebiete:

Schwerpunktmäßig beziehen sich die Aufgaben jeweils auf eine der entsprechenden Lehrplaneinheiten des Bildungsplans, in allen Aufgaben können aber auch Inhalte aus den anderen vier genannten LPE vorkommen:

Teil 1: Analysis
Stochastik
Lineare Algebra: Vektorgeometrie bzw. mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

Teil 2: Analysis
Anwendungsorientierte Analysis

Teil 3: Stochastik

Teil 4: Lineare Algebra: Vektorgeometrie bzw. mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

Prüfungsmodalitäten: Siehe Seite 5

Hinweise zu Teil 1:

Der Lehrkraft werden jeweils zwei Aufgaben aus der Stochastik und aus dem Wahlgebiet (entweder Vektorgeometrie oder Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen) vorgelegt. Die Lehrkraft wählt jeweils eine Aufgabe aus der Stochastik und eine Aufgabe aus dem Wahlgebiet aus.

Hinweise zu Teil 3 bzw. Teil 4:

Der Lehrkraft werden zwei Aufgaben aus der Stochastik und zwei Aufgaben aus dem Wahlgebiet (entweder Vektorgeometrie oder Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen) vorgelegt. Die Lehrkraft wählt entweder beide Aufgaben aus der Stochastik oder beide Aufgaben aus dem Wahlgebiet aus. Den Schülerinnen und Schüler werden diese zwei Aufgaben vorgelegt, davon wählen sie eine Aufgabe aus.
Für das Sachgebiet Analysis ist keine veränderte Auswahl vorgesehen.

Allgemeiner Hinweis:

Die Schülerinnen und Schüler erhalten alle Aufgabenteile zu Beginn der Prüfung. Dabei ist Teil 1 in einer Mappe und die Teile 2, und entweder Teil 3 oder Teil 4 in einer zweiten Mappe den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung zu stellen. Die zugelassenen Hilfsmittel für die Aufgabenteile 2, 3 und 4 werden genau dann ausgegeben, wenn Teil 1 in Form der Schülerlösung und des Aufgabenteils unwiderruflich abgegeben wurden.

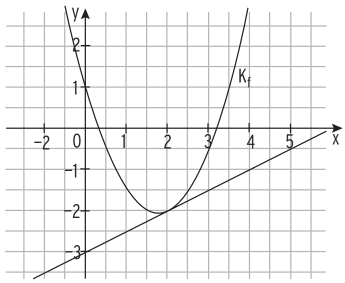
I Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

1 Übungsaufgaben

1.1 Analysis Übungsaufgaben Lösungen Seite 22 - 24

Aufgabe 1

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f.
Ermitteln Sie einen möglichen Funktionsterm.



Aufgabe 2

Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 4$ besitzt einen Wendepunkt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt.

Aufgabe 3

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung. Der Punkt $H(1 \mid 1)$ ist der Hochpunkt des Schaubilds.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabe 4

K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^{x-3} - 2$.
Die Tangente an K an der Stelle $x = 3$ schneidet die Asymptote von K in S.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{2} (x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)dx$.
Interpretieren Sie den Integralwert mithilfe geeigneter Flächenstücke.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 2x$.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

Lösungen – Hilfsmittelfreier Teil der Abiturprüfung

Lösungen 1.1 Analysis Übungsaufgaben

Aufgabe 1 Aufgaben Seite 7

Die Abbildung zeigt eine Parabel K_f von f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Ableitung: $f'(x) = 2a \cdot x + b$

Bedingungen ablesen und LGS aufstellen: $f(0) = 1$ $\quad c = 1$

$f(2) = -2 \quad 4a + 2b + c = -2$

$f'(2) = \frac{1}{2} \quad 4a + b = \frac{1}{2}$

Einsetzen von $c = 1$ in $4a + 2b + c = -2$: $\quad 4a + 2b = -3$

$4a + b = \frac{1}{2} \quad | \cdot (-1)$ +

Addition ergibt: $\quad b = -3{,}5$

Einsetzen in z. B. $4a + b = \frac{1}{2}$ ergibt $\quad 4a - 3{,}5 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$

Möglicher Funktionsterm $\quad f(x) = x^2 - 3{,}5x + 1$

Aufgabe 2

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 4$; Ableitungen: $f'(x) = -3x^2 + 6x - 1$; $f''(x) = -6x + 6$

Wendepunkt: $f''(x) = 0 \quad -6x + 6 = 0$ für $x = 1$

Mit $f'''(x) = -6 \neq 0$ ist $x = 1$ eine Wendestelle.

Mit $f(1) = -3$ ergibt sich der Wendepunkt $W(1 \mid -3)$.

Ansatz für die Tangente: $\quad y = mx + b$

$f'(1) = 2 = m$; Punktprobe mit W: $\quad -3 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -5$

Gleichung der Tangente: $\quad y = 2x - 5$

Aufgabe 3

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen: $f(0) = 0 \quad d = 0$

$f'(0) = 0 \quad c = 0$

$H(1 \mid 1)$ der Hochpunkt: $f(1) = 1 \quad a + b + c + d = 1$

$f'(1) = 0 \quad 3a + 2b + c = 0$

c und d eingesetzt: $\quad a + b = 1 \quad | \cdot 3$

$3a + 2b = 0 \quad | \cdot (-1)$ +

Additionsverfahren: $\quad b = 3$

Einsetzen in $a + b = 1$ ergibt $\quad a = -2$

Funktionsterm: $\quad f(x) = -2x^3 + 3x^2$

Aufgabe 3 Aufgaben Seite 7

Alternative: Ansatz wegen Berühren in x = 0: $f(x) = ax^2(x - b) = ax^3 - abx^2$

H(1 | 1) der Hochpunkt: $f(1) = 1$ $a(1 - b) = 1$

$f'(x) = 3ax^2 - 2abx$ $f'(1) = 0$ $3a - 2ab = 0 \Rightarrow a(3 - 2b) = 0$

Wegen $a \neq 0$ folgt $(3 - 2b) = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$

Eingesetzt in $a(1 - b) = 1$ ergibt $a \cdot (-\frac{1}{2}) = 1 \Rightarrow a = -2$

Funktionsterm: $f(x) = -2x^2(x - \frac{3}{2})$ $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ (nicht verlangt)

Aufgabe 4

K: $f(x) = e^{x-3} - 2$; Ableitung: $f'(x) = e^{x-3}$

Ansatz für die Tangente: $y = mx + c$

Mit $f(3) = -1$ und $f'(3) = 1 = m$

erhält man mit durch einsetzen: $-1 = 1 \cdot 3 + c \Rightarrow c = -4$

Gleichung der Tangente: $y = x - 4$

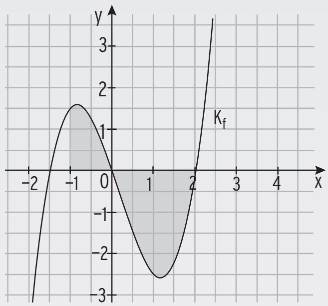
Die Asymptote hat die Gleichung $y = -2$.

Schnittpunkt von Tangente und Asymptote: $-2 = x - 4 \Rightarrow x = 2$

Koordinaten des Schnittpunktes: S(2 |− 2)

Aufgabe 5

$$\int_{-1}^{2} (x^3 - 0{,}5x^2 - 3x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{2}$$
$$= 4 - \frac{4}{3} - 6 - (\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{3}{2})$$
$$= -2 - \frac{4}{3} - \frac{3 + 2 - 18}{12} = -\frac{27}{12}$$
$$= -2{,}25$$



(Flächenbilanz)

Das Flächenstück zwischen K_f und der x-Achse oberhalb der x-Achse ist um 2,25 kleiner als das Flächenstück zwischen K_f und de x-Achse unterhalb der x-Achse.

Aufgabe 6

Schnittstellen von f und g durch Gleichsetzen: $f(x) = g(x)$ $-x^2 + 3 = 2x$

Nullform: $x^2 + 2x - 3 = 0$

Lösung mit Formel: $x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_{1|2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$

Schnittstellen = Integrationsgrenzen: $x_1 = -3$; $x_2 = 1$

Integration von − 3 bis 1 über f(x) − g(x): $\int_{-3}^{1} (f(x) - g(x))dx$

MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT
BADEN-WÜRTTEMBERG

ABITURPRÜFUNG AM BERUFLICHEN GYMNASIUM IM SCHULJAHR 2020/2021

MUSTER 1 FÜR DIE ABITURPRÜFUNG AM BERUFLICHEN GYMNASIUM AB DEM SCHULJAHR 2020/2021

Hauptprüfung	**AUFGABEN FÜR DAS FACH**
	Mathematik (AG, BTG, EG, SGG, TG, WG)

Arbeitszeit	240 Minuten
Hilfsmittel	**Teil 1:** Keine Hilfsmittel zugelassen. **Teil 2, Teil 3 und Teil 4:** Merkhilfe sowie eingeführter wissenschaftlicher Taschenrechner sind zugelassen. Die zugelassenen Hilfsmittel für die nachstehenden Aufgaben bekommt der Schüler genau dann, wenn er den ersten Teil unwiderruflich abgegeben hat.
Stoffgebiet	**Teil 1:** Analysis, Stochastik und Vektorgeometrie bzw. Matrizen (4 Aufgaben) S. 2 - 5 **Teil 2:** Analysis (1 Aufgabe) S. 6 - 7 Anwendungsorientierte Analysis (3 Aufgaben) S. 8 - 10 **Teil 3:** Stochastik (2 Aufgaben) S. 11 - 12 **Teil 4:** Lineare Algebra: Vektorgeometrie (2 Aufgaben) S. 13 - 14 Lineare Algebra: Matrizen (2 Aufgaben) S. 15 - 16
Bemerkungen	In Teil 1 wählt die Fachlehrkraft das unterrichtete Wahlgebiet aus. Es sind alle 3 vorgelegten Aufgaben zu bearbeiten. (Pflichtteile: Analysis und Stochastik) In Teil 2 ist die Aufgabe 1 zu bearbeiten. Aus den Aufgaben 2, 3 und 4 wählt die Schülerin/der Schüler **eine** Aufgabe aus und bearbeitet sie. Teil 3/Teil 4: Die Fachlehrkraft wählt zwei Aufgaben aus Teil 3 oder Teil 4 (je nach unterrichtetem Wahlgebiet) aus. Die Schülerin/der Schüler wählt eine Aufgabe aus und bearbeitet sie. Sie sind verpflichtet, jeden Aufgabensatz umgehend auf seine Vollständigkeit zu überprüfen und fehlende Seiten der Aufsicht führenden Lehrkraft anzuzeigen. Jede Aufgabe ist mit einem neuen Blatt zu beginnen. Bei Verstößen gegen die angemessene Darstellungsform kann ein Punkteabzug erfolgen.

III Musteraufgabensätze zur Abiturprüfung

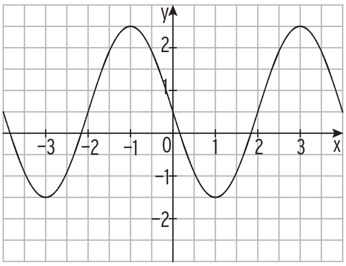
Aufgabensatz 1 **Lösungen Seite 154 - 165**

Lösungen Seite 154 - 165

Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis **Punkte**

1.1 Gegeben ist das folgende Schaubild einer Funktion: 6



Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) Der Wert der ersten Ableitung an der Stelle $x = 0$ ist negativ.

b) Der Funktionswert an der Stelle $x = -2$ ist positiv.

c) Der Wert der ersten Ableitung an der Stelle $x = -3$ ist null.

d) Der Wert der zweiten Ableitung an der Stelle $x = 3$ ist positiv.

1.2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - 6x;\ x \in \mathbb{R}$. 4
Berechnen Sie, an welchen Stellen das zugehörige Schaubild K eine waagerechte Tangente aufweist.

1.3 Die Funktion g hat die Eigenschaften: $g(3) = 0$ und $\int_0^6 g(x)dx = 0$ 4
Skizzieren Sie ein mögliches Schaubild von g und begründen Sie Ihre Vorgehensweise.

1.4 Das Schaubild einer trigonometrischen Funktion ist symmetrisch zur y-Achse, verläuft durch den Punkt $S(0 \mid 3)$ und hat in $T(3 \mid 0)$ einen Tiefpunkt. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm an. 3

Aufgabensatz 3

Lösungen Seite 179 - 191

Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis

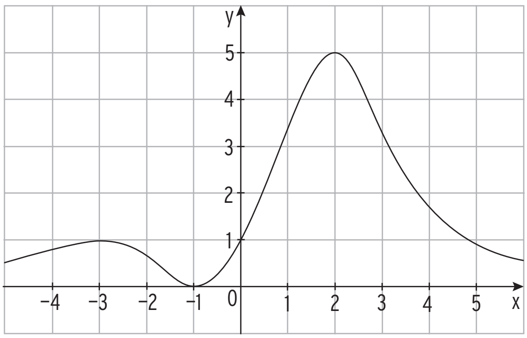
Punkte

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$; $x \in \mathbb{R}$. 3
Geben Sie die Periode von f an.
Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung $\sin(\frac{1}{2}x) = -1$.

1.2 Das Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades ist symmetrisch zur y-Achse, schneidet diese bei $y = -1$ und hat im Punkt $H(3 \mid 0)$ eine waagerechte Tangente. 6
Bestimmen Sie den Funktionsterm.

1.3 Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung $-x^2 + 2 = e^x$? 3
Begründen Sie.

1.4 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds der Funktion h. 8



Begründen Sie, warum die folgenden Aussagen wahr sind:

- Das Schaubild von h besitzt eine Wendetangente, deren Steigung größer als eins ist.
- $h'(1) \cdot h'(3) < 0$
- $\int_1^3 h(x)dx < 10$
- Jede Stammfunktion von h ist im Intervall [0; 4] streng monoton steigend.

Aufgabensatz 3

Teil 1 ohne Hilfsmittel

Stochastik **Punkte**

2 Neun Spielkarten (vier Asse, drei Könige und zwei Damen) liegen verdeckt auf dem Tisch.

2.1 Peter dreht zwei zufällig gewählte Karten um und lässt sie aufgedeckt liegen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse: 2
A: Es liegt kein Ass aufgedeckt auf dem Tisch.
B: Eine Dame und ein Ass liegen aufgedeckt auf dem Tisch.

2.2 Die neun Spielkarten werden gemischt und erneut verdeckt ausgelegt. 3
Laura dreht nun so lange Karten um und lässt sie aufgedeckt auf dem Tisch liegen, bis ein Ass erscheint.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der aufgedeckten Spielkarten an.
Welche Werte kann X annehmen?
Berechnen Sie $P(X \leq 2)$

Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse

3.1 Berechnen Sie die Inverse zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. 2

3.2 Die Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} c & 0{,}5 \\ d & 0{,}5 \end{pmatrix}$ 3
beschreibt einen stochastischen Austauschprozess.
Welche Werte für c und d sind möglich?
Für welchen Wert von c ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ ein Stabilitätsvektor?

30

Aufgabensatz 3

Teil 2 mit Hilfsmittel Aufgabe 1

Analysis Punkte

1 Die Funktion f hat die Gleichung $f(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{13}{4}x;\ x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K.

1.1 Zeigen Sie, dass K keine Extrempunkte besitzt. Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K. 5

1.2 Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Abbildungen das Schaubild K zeigt. 2

Abbildung 1

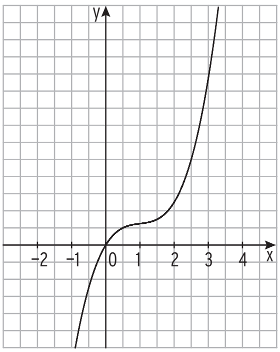


Abbildung 2

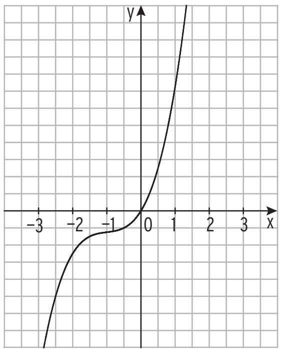
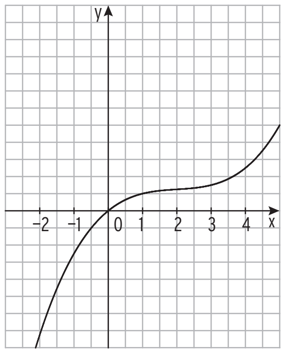


Abbildung 3



1.3 Die Tangente an K im Ursprung begrenzt mit K eine Fläche. 7
Zeichnen Sie diese Tangente in die entsprechende Abbildung aus 1.2 ein.
Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche mit Hilfe einer Stammfunktion.

1.4 Zeigen Sie, dass die erste Winkelhalbierende eine Tangente an das Schaubild darstellt. 3

1.5 Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = a \cdot \sin(\frac{\pi}{2}x) + b;\ x \in \mathbb{R}$. 3
Bestimmen Sie a und b so, dass die Tangente an das Schaubild von g in $P(2 \mid 2)$ parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = -x$ verläuft.

Aufgabensatz 3

Teil 2 mit Hilfsmittel — Aufgabe 2

Anwendungsorientierte Analysis — **Punkte**

Bei den Olympischen Sommerspielen 2008 in Peking legte der Jamaikaner Usain Bolt die 100 Meter (m) in der damaligen Weltrekordzeit von fabelhaften 9,69 Sekunden (s) zurück. Dabei begann Bolt bereits nach 80 m zu jubeln und verringerte somit vorzeitig seine Geschwindigkeit.

Analysiert man seinen Lauf auf jeweils 10 m langen Abschnitten, ergeben sich die folgenden Daten.

d	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
t	0	1,85	2,87	3,78	4,65	5,50	6,32	7,14	7,96	8,79	9,69
∇	5,41	9,80	10,99	11,49	11,76	12,19	12,19	12,19	12,05	11,11	-

Dabei sind:
- d die zurückgelegte Distanz in m
- t die Zeit in s
- ∇ die Durchschnittsgeschwindigkeit im jeweiligen 10-m-Intervall in $\frac{m}{s}$

Zum Beispiel ist 5,41 $\frac{m}{s}$ die Durchschnittsgeschwindigkeit ∇ auf den ersten 10 Metern.

2.1 Wie lange benötigte Bolt für die letzten 50 Meter des Laufs? 5
Kann ein Mensch mit einer höheren Geschwindigkeit als 40 km/h rennen? Welche Zeit hätte Bolt erreicht, wenn er in diesem Lauf die maximale Durchschnittsgeschwindigkeit aus der Tabelle bis zum Ende des Laufs beibehalten hätte?

2.2 Die Funktion v mit 2
$v(t) = 0{,}0382t^3 - 0{,}8158t^2 + 5{,}4828t + 0{,}4546;\ t \in [0;\ 9{,}69]$
modelliert die Momentangeschwindigkeit v in $\frac{m}{s}$ in Abhängigkeit von der Laufzeit t in s.
Zeigen Sie, dass Bolt nach diesem Modell zwischen t = 5,4 s und t = 5,5 s die maximale Geschwindigkeit erreicht.

2.3 Formulieren Sie für Bolts Lauf eine passende Frage, deren Antwort die Lösung der Gleichung $\int_3^{3+z} v(t)\,dt = 50$ für $z > 0$ ist. 3

Aufgabensatz 3

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 3**

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

In einem Bootsverleih kann man sich Boote verschiedenen Typs ausleihen. Die entsprechenden Preise sind in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet.

Bootstyp	Preis je Stunde
Motorboot	35 €
Elektroboot	25 €
Tretboot	10 €

3.1 An einem heißen Sommertag sind alle verfügbaren 48 Boote gleichzeitig ausgeliehen. Die Einnahmen nach einer Stunde betragen 980 €. 5

Die Anzahl der Tretboote ist doppelt so groß wie die Anzahl der Motorboote.

Wie viele Motor-, Elektro- und Tretboote besitzt der Bootsverleih jeweils?

3.2 Für die letzte Stunde des Tages fragt sich Lena, wie viele Motorboote mindestens unterwegs sind. Dazu stellt sie das nachfolgende LGS auf: 5

$x + y + z = 25$

$35x + 25y + 10z = 525$

und formt dieses auf die untere Dreiecksform um: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1{,}5 & -10 \\ 0 & 1 & 2{,}5 & 35 \end{array}\right)$

Welche Informationen hat Lena? Beantworten Sie Lenas Frage.

Aufgabensatz 3

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 4** **Seite 1/2**

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

Ein Kondensator ist ein Bauteil, das elektrische Ladung speichert.
Der Ladevorgang eines Kondensators wird im Labor untersucht.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt der Aufladevorgang. Die Stärke des elektrischen Stroms, der beim Aufladen fließt, wird gemessen.

Die Messwerte sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

t in Sekunden (s)	1,0	2,4	4,8	7,2	9,6
I in Milliampere (mA)	9,0	6,0	3,0	1,5	0,75

Der Zusammenhang zwischen der Zeit t und der Stromstärke I soll durch eine Exponentialfunktion f mit $f(t) = a \cdot e^{kt}$ beschrieben werden.

4.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm. 2

4.2 Wann ist die momentane Änderungsrate der Stromstärke ebenso groß wie ihre durchschnittliche Änderungsrate im Zeitraum von 1,0 s bis 2,4 s? 2

Aufgabensatz 3

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 4** **Seite 2/2**

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

4.3 Die Stromstärke I ist die momentane Änderungsrate der Ladung Q.
Die Ladung wird in Milliamperesekunden (mAs) gemessen

4.3.1 Bestimmen Sie die Ladung, die in den ersten 18 Sekunden auf dem Kondensator gespeichert wird. 4

4.3.2 Nach welcher Zeit trägt der Kondensator 60 % dieser Ladung? Geben Sie einen zugehörigen Rechenansatz an. 2

Teil 3 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Stochastik **Punkte**

Zwei Seiten eines idealen Würfels sind mit S, zwei Seiten sind mit A und zwei Seiten sind mit M beschriftet.
Bei einem Schulfest der „Schule am Meer“ (SAM) stehen drei derart beschriftete Würfel zur Verfügung. Bei einem Versuch werden diese Würfel gleichzeitig geworfen.

1.1 Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse: 5

E_1: Alle drei Würfel zeigen den gleichen Buchstaben.

E_2: Mindestens ein Würfel zeigt den Buchstaben S.

Zeigen Sie, dass mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{9}$ mit den gewürfelten Buchstaben das Wort SAM gebildet werden kann.

1.2 Formulieren Sie für den oben beschriebenen Versuch ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit $\frac{7}{27}$ ist. 2

1.3 Wie viele Versuche mindestens braucht man, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens einmal das Wort SAM bilden zu können? 3

1.4 Wer nach einem Versuch das Wort SAM bilden kann, erhält einen Preis. Ein Spiel besteht aus drei Versuchen. Pro Spiel kann man also maximal drei Preise erhalten. 5
Wie viele Preise erhält man durchschnittlich pro Spiel?
Geben Sie eine begründete Empfehlung, wie viele Preise die Schule bereithalten sollte, wenn insgesamt maximal 900 Spiele auf dem Schulfest gemacht werden.

15

Aufgabensatz 3

Teil 3 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Stochastik **Punkte**

In der „Fußball-Bundesliga“ steigt die Anzahl der Besucher pro Spiel ständig. Dabei ist das Publikum mittlerweile zu 25 % weiblich.

2.1 Bei einem Bundesliga-Spiel wird das Geschlecht von 50 zufällig ausgewählten Zuschauern erfasst. 4
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
A: genau 17 Zuschauer weiblich sind.
B: mindestens 11 und höchstens 18 Zuschauer weiblich sind.
C: nur die letzten 8 befragten Zuschauer weiblich sind.

2.2 Beschreiben Sie im vorliegenden Sachzusammenhang ein Ereignis E, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term 4
$P = 1 - \sum_{k=0}^{300} \binom{1000}{k} \cdot 0{,}25^k \cdot 0{,}75^{1000-k}$ berechnet werden kann.

2.3 Bei einem Bundesliga-Spiel strömen 20 000 Zuschauer ins Stadion, hierbei wird wiederum angenommen, dass 25 % der Zuschauer weiblich sind. An weibliche Zuschauer soll ein Flyer verteilt werden, der auf ein spezielles Getränkeangebot hinweist. 3
In welchem Intervall liegt die Anzahl der benötigten Flyer mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,4 %?
Der Geschäftsführer des Unternehmens, welches die Flyer druckt, empfiehlt, die Wahrscheinlichkeit auf 99,7 % zu erhöhen.
Weshalb schlägt der Geschäftsführer dies wohl vor?

2.4 Bei einem Bundesliga-Spiel wird vermutet, dass der Anteil weiblicher Zuschauer sogar auf über 25 % gestiegen ist. Von 134 erfassten Zuschauern waren 36 Frauen. 4
Bestimmen Sie ein 95 % Vertrauensintervall für Anteil der weiblichen Zuschauer.

15

Aufgabensatz 3

Teil 4 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

Punkte

1 Die Firma „Gutsleback" stellt verschiedene Plätzchen her, die sie in zwei verschiedenen Verpackungen anbietet. Die Plätzchen werden hauptsächlich aus Butter, Zucker, Mehl und Nüssen hergestellt. Die quantitativen Zusammenhänge sind durch die folgenden Tabellen gegeben.

Menge der Zutaten (g) pro Plätzchen

	Butterplätzchen	Nussplätzchen
Butter	2,5	1,5
Zucker	1,6	1
Mehl	2,5	2,5
Nüsse	0	2,5

Anzahl der Plätzchen pro Packung

	Packung I	Packung II
Butterplätzchen	5	7
Nussplätzchen	7	9

1.1 Stellen Sie den zweistufigen Prozess in einem Verflechtungsdiagramm dar. 3

1.2 Die Firma soll einem Kunden 100 Packungen I und 150 Packungen II liefern. Wie viel Gramm an Zucker und Mehl sind hierfür notwendig? 4

1.3 Es wird festgestellt, dass noch 372 g Zucker und 682,5 g Mehl vorhanden sind. Welche Menge der anderen Zutaten muss beschafft werden, wenn alle Zutaten vollständig zu Plätzchen verarbeitet werden sollen? 4

1.4 Die Firma möchte eine neue Packung auf den Markt bringen. In dieser Packung sollen doppelt so viele Nuss- wie Butterplätzchen enthalten sein. Der Gewichtsverlust beim Backen ist vernachlässigbar. Das Gewicht des Packungsinhaltes soll 200 g nicht überschreiten. 4

Wie viele Plätzchen von jeder Sorte sind maximal in der neuen Packung?

15

Aufgabensatz 3

Teil 4 mit Hilfsmittel

Aufgabe 2
Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

Punkte

2 Ein Reisebüro pflegt eine Datei mit Adressen von langjährigen Stammkunden. Dabei wird unterschieden zwischen den Kunden, die im abgelaufenen Jahr genau einen Urlaub bei dem Reisebüro gebucht haben (Kundengruppe E), Kunden, die im abgelaufenen Jahr mehr als einen Urlaub bei dem Reisebüro gebucht haben (Kundengruppe M), und Kunden, die im abgelaufenen Jahr keinen Urlaub bei dem Reisebüro gebucht haben (Kundengruppe K).
Das folgende jährliche Wechselverhalten der Kunden ist zu beobachten:
10 % der Kunden aus Gruppe E werden zu Kunden der Gruppe M
15 % der Kunden aus Gruppe E werden zu Kunden der Gruppe K
20 % der Kunden aus Gruppe M werden zu Kunden der Gruppe E
20 % der Kunden aus Gruppe M werden zu Kunden der Gruppe K
57 % der Kunden aus Gruppe K werden zu Kunden der Gruppe E
28 % der Kunden aus Gruppe K werden zu Kunden der Gruppe M

2.1 Geben Sie eine stochastische Übergangsmatrix A an, die dieses Verhalten beschreibt. 3

2.2 Vervollständgen Sie $A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}668 & \cdots & 0{,}569 \\ 0{,}177 & 0{,}436 & \cdots \\ 0{,}155 & \cdots & 0{,}164 \end{pmatrix}$ und interpretieren Sie den Eintrag in der dritten Zeile und ersten Spalte sowie den Eintrag in der zweiten Zeile und zweiten Spalte. 5

Aufgrund einer Änderung des Buchungsverhaltens gilt nun die folgende Übergangsmatrix

$$A^* = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & q \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}95 - q \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq q \leq 0{,}95\,.$$

Im Jahr 2016 gehören 3100 Kunden zur Gruppe E, 1300 Kunden zur Gruppe M und 600 Kunden zur Gruppe K.

2.3 Zeigen Sie, dass diese Verteilung für q = 0,6 stabil ist. 2

2.4 Ermitteln Sie den Wert von q für den Fall, dass sich im Jahr 2017 herausstellt, dass 1342 Kunden in diesem Jahr mehr als einen Urlaub gebucht haben. Geben Sie die Verteilung für 2017 an. 5

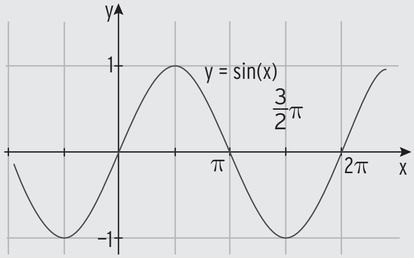
$\overline{15}$

Lösungen Aufgabensatz 3

Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabe Seite 145

Analysis



1.1 $f(x) = \sin(\frac{1}{2} \cdot x)$; $x \in \mathbb{R}$.

Periode von f: $p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

Lösung der Gleichung $\sin(\frac{1}{2}x) = -1$: $\frac{1}{2}x = \frac{3}{2}\pi$

$x = 3\pi$

Mithilfe der Sinuskurve ($y = \sin(x)$).

1.2 Die Funktion hat in $x = 3$ eine doppelte Nullstelle. Aufgrund der Symmetrie zur y-Achse muss in $x = -3$ ebenfalls eine doppelte Nullstelle vorliegen.

Nullstellenansatz: $f(x) = a(x-3)^2(x+3)^2$

Punktprobe mit S(0 | – 1): $-1 = a(-3)^2 \cdot 3^2 \quad \Rightarrow a = -\frac{1}{81}$

Man erhält den Funktionsterm: $f(x) = -\frac{1}{81} \cdot (x-3)^2(x+3)^2$

Alternativer Lösungsweg:

Aufgrund der Symmetrie zur y-Achse kann der Ansatz $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ verwendet werden ($f'(x) = 4ax^3 + 2cx$).

Aus den Bedingungen $f(0) = -1$; $f(3) = 0$; $f'(3) = 0$

erhält man ein LGS: $e = -1 \wedge$ $\quad 108a + 6c = 0 \quad | \cdot (-3) \quad$ (e = 1 eingesetzt)

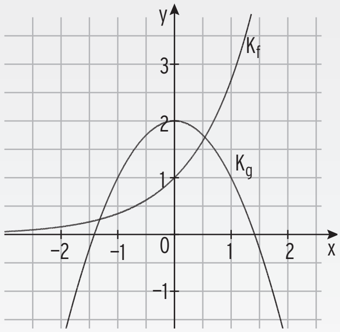
$81a + 9c = 1 \quad | \cdot 2$

Addition ergibt: $-162a = 2 \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{81}$

Einsetzen in $81a + 9c = 1$ ergibt $c = \frac{2}{9}$

Funktionsterm: $f(x) = -\frac{1}{81}x^4 + \frac{2}{9}x^2 - 1$

1.3 Die Gleichung $-x^2 + 2 = e^x$ hat zwei Lösungen.



Die Lösung kann z. B. graphisch über die Schnittstellen der Graphen der beiden Funktionen f mit $f(x) = -x^2 + 2$ und g mit $g(x) = e^x$ bestimmt werden.

Aus der Skizze ist erkennbar, dass es zwei Schnittpunkte gibt, d.h.

die Gleichung hat zwei Lösungen.

Lösungen Aufgabensatz 3

Teil 1 ohne Hilfsmittel

Analysis

Aufgabe Seite 145

1.4 • Die Aussage ist wahr. Zeichnet man in das Schaubild von h ungefähr an der Stelle $x = 0{,}8$ die Wendetangente ein, besitzt diese eine Steigung, die deutlich mehr als 1 beträgt.

• Die Aussage ist wahr. Es gelten $h'(1) > 0$ (positive Steigung) und $h'(3) < 0$ (negative Steigung). Das Produkt ist also negativ.

• Die Aussage ist wahr. Die Fläche zwischen den Geraden mit $x = 1$ und $x = 3$, dem Schaubild von h und der x-Achse hat einen kleineren Inhalt als 10, was durch Abzählen der Kästchen ermittelt werden kann.

• Die Aussage ist wahr. Das Schaubild von h verläuft in diesem Bereich oberhalb der x-Achse. Der Inhalt der Fläche zwischen K_h und der x-Achse nimmt mit wachsendem b zu; $\int_0^b h(x)dx$ ist wachsend für $0 \leq b \leq 4$.

Somit ist jede Stammfunktion von h hier streng monoton steigend.

Stochastik

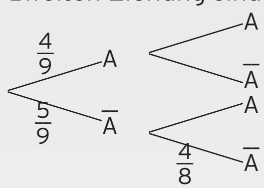
Aufgabe Seite 146

Es handelt sich um eine Ziehung ohne Zurücklegen

2.1 Es wird nur zwischen Assen und „Nicht-Assen“ unterschieden. Bei der ersten Ziehung sind 5 von 9 Karten „Nicht-Asse“, bei der zweiten Ziehung sind 4 von 8 Karten „Nicht-Asse“).

(Hinweis: Erstellen Sie ein Baumdiagramm.)

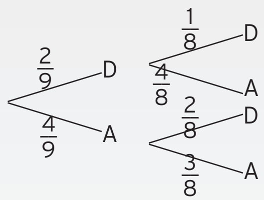
$P(A) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$



Das Ereignis B enthält die beiden Ergebnisse „erst Dame (D) dann Ass (A)“ und „erst Ass dann Dame“.

(Hinweis: Erstellen Sie ein Baumdiagramm.)

$P(B) = P(DA) + P(AD) = \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{9}$



Lösungen Aufgabensatz 3

Teil 1 ohne Hilfsmittel

Stochastik Aufgabe Seite 146

2.2 Falls gleich beim ersten Mal ein Ass aufgedeckt wird, gilt X = 1.

Da spätestens die sechste Karte ein Ass sein muss (wenn davor die drei Könige und die zwei Damen aufgedeckt werden) kann X maximal den Wert 6 annehmen.

X kann also die Werte von 1, 2, 3, 4, 5, 6 annehmen.

$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{13}{18}$

Lineare Algebra: Matrizen und Prozesse Aufgabe Seite 146

3.1 Inverse zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 8 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 4 & -8 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Inverse $A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -8 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.2 Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} c & 0{,}5 \\ d & 0{,}5 \end{pmatrix}$

Stochastischer Austauschprozess mit Spaltensumme 1.

Werte für c und d sind möglich zwischen 0 und 1; $c, d \in [0; 1]$ mit $c + d = 1$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ ist ein Stabilitätsvektor, wenn $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$\begin{pmatrix} c & 0{,}5 \\ d & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$

ergibt

$0{,}6c + 0{,}2 = 0{,}6 \quad \Rightarrow c = \frac{2}{3}$

$0{,}6d + 0{,}2 = 0{,}4 \quad \Rightarrow d = \frac{1}{3}$

Abiturprüfungen am beruflichen Gymnasium
Hauptprüfung 2019/2020

Teil 1 ohne Hilfsmittel Aufgabe 1 **Lösungen Seite 261 - 272**

Analysis **Punkte**

1.1 Geben Sie die Nullstellen des Polynoms p mit $p(x) = x^3 - 100x;\ x \in \mathbb{R}$ an. 4
Erstellen Sie ohne weitere Rechnung eine Skizze des Schaubilds von p.

1.2 Die folgende Tabelle enthält Funktionswerte und Werte der ersten beiden Ableitungen einer Polynomfunktion h vom Grad 4. Das Schaubild von h ist K.

x	− 1,5	− 1	− 0,5	0	0,5	1	1,5
h(x)	2,375	− 2	− 1,625	− 1	− 1,625	− 2	2,375
h′(x)	− 18	− 2	2	0	− 2	2	18
h″(x)	48	18	0	− 6	0	18	48

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidungen ohne Funktionsterme zu berechnen.

(1) $P(-1 \mid 2)$ liegt auf K.

(2) K besitzt zwei Wendepunkte.

(3) K besitzt drei Punkte mit waagrechter Tangente.

1.3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \sin\left(2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right);\ x \in \mathbb{R}$.

1.3.1 Geben Sie zwei benachbarte Wendepunkte des Schaubilds von f an. 3

1.3.2 Ermitteln Sie einen Wert für $b > 10$, für den gilt: $\int_1^b f(x)\,dx = 0$. 2

15

Teil 1 ohne Hilfsmittel Aufgabe 2

Stochastik **Punkte**

2 Ein Glücksrad besteht aus drei Sektoren unterschiedlicher Größe.
Der rote Sektor nimmt die Hälfte des Glücksrads ein, der weiße Sektor ein Drittel und der grüne Sektor den Rest.
Dreht man das Glücksrad, so zeigt beim Stillstand ein Pfeil auf genau einen der drei Sektoren.

2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses: 2
A: Bei viermaligem Drehen zeigt der Pfeil genau einmal auf den weißen Sektor.

2.2 Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis B mit der 2
Wahrscheinlichkeit $P(B) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2$ an.

2.3 Bei einem Spiel wird das Glücksrad einmal gedreht. Der Einsatz beträgt 3
2 Euro.Zeigt der Pfeil auf den roten Sektor, so erhält man keine Auszahlung.
Zeigt der Pfeil auf den weißen Sektor, so beträgt die Auszahlung 2 Euro.
Zeigt der Pfeil auf den grünen Sektor erhält man den Hauptgewinn.
Bestimmen Sie, wie hoch beim Hauptgewinn die Auszahlung sein muss, damit es sich um ein faires Spiel handelt.

7

Teil 1 ohne Hilfsmittel Aufgabe 3

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 Betrachtet werden die Matrizen A, B, C und D. 2
A hat 3 Zeilen und 7 Spalten, d.h. das Format von A ist 3×7.
B hat das Format 7×2 und $D = A \cdot B \cdot C$ hat das Format 3×4.
Geben Sie das Format der Matrix C an.

3.2 Betrachtet wird eine Matrix Q und ihre Inverse $R = Q^{-1}$. 2
Vereinfachen Sie den Term
$(R \cdot Q \cdot (4 \cdot Q) - 2 \cdot Q \cdot R \cdot Q) \cdot R$ so weit wie möglich.

3.3 Gegeben sind die Matrizen 4

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & c \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a\,(a-1) & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $Z = \begin{pmatrix} 9 & b^2 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$

Es gilt: $Z = X \cdot Y$. Bestimmen Sie alle möglichen Werte für a, b und c.
Geben Sie die Anzahl der Lösungen der Form (a; b; c) an.

8

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Analysis **Punkte**

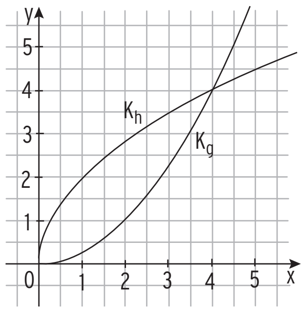
1.1 Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = 10 \cdot x \cdot e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K_f.
Die erste Ableitung f′ von f ist $f'(x) = 10 \cdot (1 - x) \cdot e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$ und die zweite Ableitung f″ von f ist $f''(x) = 10 \cdot (x - 2) \cdot e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$.

1.1.1 Weisen Sie nach, dass $\left(1 \mid \frac{10}{e}\right)$ der Hochpunkt von K_f ist. 4
Geben Sie die Gleichung der Asymptote von K_f an.

1.1.2 Zeichnen Sie K_f für $0 \leq x \leq 6$. 3

1.1.3 Zeigen Sie, dass F mit $F(x) = -10 \cdot (x + 1) \cdot e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist. 5
Bestimmen Sie den Wert von a in der Gleichung : $\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{a \cdot e - 30}{e^2}$.

1.2 Für $x \geq 0$ sind die Funktionen g mit $g(x) = \frac{1}{4}x^2$ und h mit $h(x) = 2\sqrt{x}$ gegeben. Die Abbildung zeigt die Schaubilder K_g von g und K_h von h.



1.2.1 Prüfen Sie die folgende Aussage: 4
"Die Gerade durch die beiden Punkte P(1 | h(1)) und Q(2 | g(2)) ist sowohl die Normale von K_h in P als auch die Normale von K_g in Q."

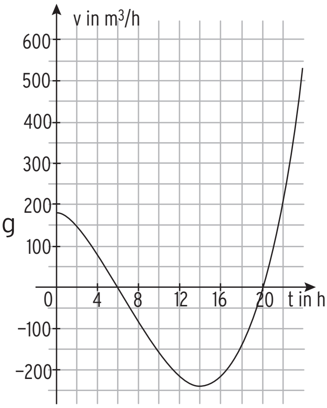
1.2.2 Die y-Achse, K_h und die Parallele zur x-Achse mit der Gleichung y = c , mit c > 0, begrenzen eine Fläche. Durch Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper. 4
Bestimmen Sie den Wert von c, sodass dessen Volumen 32π beträgt.

20

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Anwendungsorientierte Analysis **Punkte**

2 Der Wasserzufluss bzw. der Wasserabfluss eines Staubeckens wird über 24 Stunden hinweg beobachtet und durch die Funktion v mit $v(t) = \frac{1}{4}(t^2 - 36)(t - 20);\quad 0 \leq t \leq 24,$ modelliert.
Hierbei gibt t die Zeit seit Beginn der Beobachtung (t = 0) in Stunden an. v(t) wird in Kubikmeter pro Stunde $\left(\frac{m^3}{h}\right)$ gemessen.
Bei Wasserzufluss ist v(t) positiv und bei Wasserabfluss ist v(t) negativ.
Die Abbildung zeigt das Schaubild von v.



2.1 Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage: 3
"Es gibt einen Zeitpunkt, an dem 280 $\frac{m^3}{h}$ abfließen."
Geben Sie den maximalen Wasserzufluss und den dazugehörigen Zeitpunkt an.

2.2 Berechnen Sie den Wert des Wasserzuflusses zu Beginn der Beobachtung und wie viele Minuten vergehen, bis v diesen Wert erneut erreicht. 4

2.3 20 Stunden nach Beobachtungsbeginn befinden sich noch 1000 m^3 Wasser im Becken. 3
Erläutern Sie, wie man die Wassermenge im Staubecken zum Zeitpunkt t = 0 ermitteln kann und geben Sie diese Wassermenge näherungsweise an.

10

Lösungen Hauptprüfung 2019/2020

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 1**

www.mvurl.de/esho

Analysis

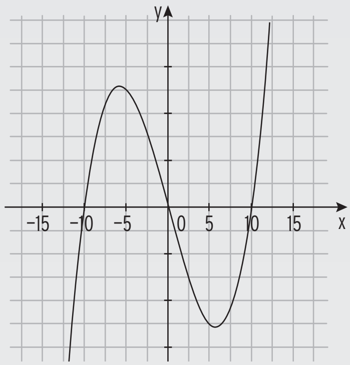
1.1 Nullstellen von p: $p(x) = 0$ $x^3 - 100x = 0$

Ausklammern: $x \cdot (x^2 - 100) = 0$

Nullprodukt: $x = 0 \;\vee\; x^2 - 100 = 0$

Lösungen: $x_1 = 0;\; x_{2|3} = \pm 10$

Skizze des Schaubilds von p:



1.2 (1) Die Aussage ist falsch. P liegt nicht auf K, da laut Wertetabelle $h(-1) = -2 \neq 2$.

(2) Das Aussage ist wahr. Es gelten $h''(-0{,}5)$ und $h''(0{,}5) = 0$. h ist vom Grad 4, somit ist h'' vom Grad 2 und kann keine weiteren Nullstellen mehr aufweisen. $x = -0{,}5$ und $x = 0{,}5$ sind einfache Nullstellen.

(3) Das Aussage ist wahr. Es gilt $h'(0) = 0$. Zudem weist h' zwei weitere Vorzeichenwechsel und damit zwei weitere Stellen mit waagerechter Tangente auf: $h'(-1) < 0 \wedge h'(-0{,}5) > 0$; $h'(0{,}5) < 0 \wedge h'(1) > 0$. h' ist vom Grad 3 und kann keine weiteren Nullstellen mehr aufweisen.

1.3.1 $W_1\left(-\frac{\pi}{12} \,\middle|\, 0\right)$ (Verschiebung von $y = 3\sin(2x)$ um $\frac{\pi}{12}$ in Richtung der negativen x-Achse, also nach links);

$W_2\left(\frac{5\pi}{12} \,\middle|\, 0\right)$ (Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$; Addition einer halben Periodenlänge: $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{12}$)

Lösungen Hauptprüfung 2019/2020

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Analysis

1.3.2 Die Funktion f hat die Periode π und oszilliert um die x-Achse. Das Integral über eine Periode hinweg ergibt den Wert 0, da die Flächen zwischen dem Schaubild von f und der x-Achse ober- und unterhalb der x-Achse zwischen benachbarten Nullstellen, gleich groß sind und "verrechnet" werden.
Somit ist die Integralbedingung bei $b = 1 + \pi$; $b = 1 + 2\pi$; $b = 1 + 3\pi$; ... erfüllt.
Wegen $b > 10$ stellt $b = 1 + 3\pi \approx 10{,}4$ eine mögliche Lösung dar.

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 2**

Stochastik

www.mvurl.de/2cuy

$P(r) = \frac{1}{2}$; $P(w) = \frac{1}{3}$; $P(g) = \frac{1}{6}$

2.1 Bei 4 möglichen Reihenfolgen, der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ für weiß und $\frac{2}{3}$ für Nicht-weiß erhält man: $P(A) = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{27} = \frac{32}{81}$

2.2 Mögliches Ereignis B: Bei viermaligem Drehen zeigt der Pfeil genau zweimal auf den grünen Sektor und dies geschieht unmittelbar hintereinander.
$B = \{\overline{g}\,\overline{g}\,g\,g;\ \overline{g}\,g\,g\,\overline{g};\ g\,g\,\overline{g}\,\overline{g}\}$

2.3 X: Auszahlungsbetrag in Euro
Bei einem fairen Spiel muss die zu erwartende Auszahlung dem Einsatz entsprechen. a sei die Auszahlung beim Hauptgewinn.

$$E(X) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + a \cdot \frac{1}{6} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{3} = \frac{8}{6}$$

$$a = 8$$

Damit muss die Auszahlung für den Hauptgewinn 8 Euro betragen.

Lösungen Hauptprüfung 2019/2020

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 3**

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 Die Gleichung $D = A \cdot B \cdot C$ mit den entsprechenden Matrizenformaten:

$D_{(3;\,4)} = A_{(3;\,7)} \cdot B_{(7;\,2)} \cdot C_{(x;\,y)}$

x gibt hierbei die Zeilenanzahl, y die Spaltenanzahl der Matrix C an.

Da die Spaltenanzahl der Matrix B mit der Zeilenanzahl der Matrix C übereinstimmen muss, gilt $x = 2$.

Die Spaltenanzahl der Matrix D muss der Spaltenanzahl der Matrix C entsprechen. Somit gilt $y = 4$.

Ingesamt hat C also das Format 2×4.

www.mvurl.de/uoou

3.2 $(R \cdot Q \cdot (4 \cdot Q) - 2 \cdot Q \cdot R \cdot Q) \cdot R$

$= (Q^{-1} \cdot Q \cdot (4 \cdot Q) - 2 \cdot Q \cdot Q^{-1} \cdot Q) \cdot Q^{-1}$ (Einsetzen von Q^{-1} für R)

$= (E \cdot (4 \cdot Q) - 2 \cdot E \cdot Q) \cdot Q^{-1}$ (mit $Q \cdot Q^{-1} = Q^{-1} \cdot Q = E$)

$= (4 \cdot Q - 2 \cdot Q) \cdot Q^{-1}$

$= 2 \cdot Q \cdot Q^{-1} = 2 \cdot E$ E ist die Einheitsmatrix

3.3 $X \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a\,(a-1) & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 9 + 2a \cdot (a-1) + 3c & 10 + c \end{pmatrix}$

Wegen $Z = X \cdot Y$ gilt: $\begin{pmatrix} 9 & b^2 \\ 12 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 9 + 2a \cdot (a-1) + 3c & 10 + c \end{pmatrix}$

Aus $4 = b^2$ erhält man $b_{1|2} = \pm 2$.

Aus $11 = 10 + c$ erhält man $c = 1$.

Mit $c = 1$ erhält man aus $12 = 9 + 2a \cdot (a-1) + 3 \cdot 1 \;\Leftrightarrow\; 0 = 2a \cdot (a-1)$

und dem Satz vom Nullprodukt: $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$.

Man erhält die Lösungen: (0; − 2 ; 1); (1; − 2 ; 1); (0; 2 ; 1) und (1; 2 ; 1) und somit 4 Lösungen.

Lösungen Hauptprüfung 2019/2020

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Analysis

1.1 Es gilt: $f'(1) = 10 \cdot (1-1) \cdot e^{-1} = 0$; $f''(1) = 10 \cdot (1-2) \cdot e^{-1} = -10 \cdot e^{-1} < 0$;

x = 1 ist Maximalstelle

Mit $f(1) = 10 \cdot 1 \cdot e^{-1} = \frac{10}{e}$ folgt, dass $\left(1 \,\middle|\, \frac{10}{e}\right)$ der Hochpunkt von K_f ist.

Gleichung der Asymptote: $y = 0$ $\quad (e^{-x} \to 0$ für $x \to \infty)$

1.1.2 Zeichnung von K_f für $0 \leq x \leq 6$

www.mvurl.de/5i87

1.1.3 F ist eine Stammfunktion von f, wenn gilt $F'(x) = f(x)$

Ableiten von F mit Produkt- und Kettenregel ergibt f:

$F'(x) = -10 \cdot 1 \cdot e^{-x} - 10 \cdot (x+1) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = (-10 + 10 \cdot (x+1)) \cdot e^{-x}$

$\quad = 10x \cdot e^{-x} = f(x)$

$\int_1^2 f(x)\,dx = F(2) - F(1) = -10 \cdot (2+1) \cdot e^{-2} - \left(-10 \cdot (1+1) \cdot e^{-1}\right)$

$\quad = -30e^{-2} + 20e^{-1}$

Bedingung für a: $-30e^{-2} + 20e^{-1} = \frac{a \cdot e - 30}{e^2} \Leftrightarrow \frac{-30}{e^2} + \frac{20}{e} = \frac{a \cdot e - 30}{e^2}$

Multiplikation mit e^2: $-30 + 20e = ae - 30 \Leftrightarrow 20e = ae \Leftrightarrow 20 = a$

1.2.1 Steigung der Geraden durch P und Q: $m = \frac{h(1) - g(2)}{1-2} = \frac{2-1}{-1} = -1$;

Steigung von K_g in Q: $g'(x) = \frac{1}{2}x$; $g'(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$;

Steigung von K_h in P: $h'(x) = 2 \cdot 0{,}5 \cdot x^{-0{,}5} = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $h'(1) = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$;

Es gilt: $m \cdot g'(2) = -1$ und $m \cdot h'(1) = -1$ (Steigungen sind neg. Kehrwerte voneinander). Somit schneidet die Gerade durch P und Q die beiden Kurven senkrecht und ist damit Normale von K_h in P und Normale von K_g in Q.

Lösungen Hauptprüfung 2019/2020

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 1**

Analysis

1.2.1 Alternative Lösung:

Berechnung der Normalengleichung an K_g in Q ergibt n: $y = -x + 3$;

Punktprobe mit P(1 | 2) ist erfüllt, somit schneidet n die Kurve K_h in P.

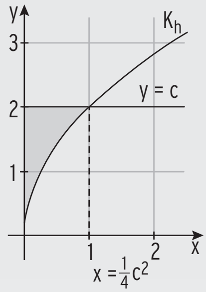
Es gilt: $m_n \cdot h'(1) = -1$ damit schneidet n die Kurve K_h in P senkrecht und stellt auch die Normale an K_g in Q dar.

1.2.2 Berechnung der rechten Grenze durch Schnitt von y = c mit K_h:

Bedingung (mit $c > 0$): $h(x) = c \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = c$

Quadrieren: $4x = c^2$

Man erhält: $x = \frac{1}{4}c^2$



Volumen des Rotationskörpers:

$$V = \pi \cdot \int_0^{\frac{1}{4}c^2} (c^2 - (h(x))^2)dx = \pi \cdot \int_0^{\frac{1}{4}c^2} (c^2 - (2\sqrt{x})^2)dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^{\frac{1}{4}c^2} (c^2x - 4x)\,dx = \pi \cdot \left[c^{2x} - 2x^2\right]_0^{\frac{1}{4}c^2}$$

$$= \pi \cdot \left(c^2 \cdot \frac{1}{4}c^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{4}c^2\right)^2\right) = \pi \cdot \left(\frac{1}{4}c^4 - \frac{1}{8}c^4\right) = \pi \cdot \frac{1}{8}c^4$$

Das Volumen soll laut Aufgabenstellung 32π entsprechen:

$$\pi \cdot \frac{1}{8}c^4 = 32\pi \Leftrightarrow \frac{1}{8}c^4 = 32 \Leftrightarrow c^4 = 256 \Leftrightarrow c = 4 \text{ (da } c > 0)$$

Für c = 4 beträgt das Volumen des Rotationskörpers 32π.