

4 Lineare Funktionen

Lernsituation

Auf dem jährlichen Weihnachtsmarkt verkauft die Klasse 8c selbstgemachte Weihnachtskränze. Im Jahr 2014 wurden für 10 Weihnachtskränze ein Gewinn von 25€, beim Verkauf von 30 Weihnachtskränzen ein Gewinn von 150€ erzielt. Im Jahr 2013 erzielte die Klasse beim Verkauf von 50 Weihnachtskränzen einen Gewinn von 260€.



Handlungsauftrag

Untersuche die Gewinnsituation für das Jahr 2014, indem du

- die Gewinnfunktion der Form $y = mx + t$ ermittelst und die Gewinngerade in einem Koordinatensystem darstellst.
- die Achsenschnittpunkte der Gewinngeraden bestimmst.

Welche Bedeutung haben deine Ergebnisse von m und t für den Gewinn?

Welche Bedeutung haben die Achsenschnittpunkte?

Wie viele Weihnachtskränze müssen hergestellt und verkauft werden, wenn die Klasse mindestens 250€ für ein Altersheim spenden möchte?

Gab es von 2013 auf 2014 bei 50 verkauften Weihnachtskränzen eine Gewinnsteigerung?

Wenn ja, wie groß war diese in %?

Bearbeite diese Anforderungssituation nach Abschluss des Kapitels „Lineare Funktionen“, in dem du die rechts aufgeführten Qualifikationen und Kompetenzen erworben hast.

Kompetenzen

- ☞ Achsenschnittpunkte berechnen
- ☞ Bedeutung der Steigung erfassen
- ☞ Sachaufgaben mithilfe von Funktionen bearbeiten
- ☞ Realitätsbezogene Zusammenhänge mit linearen Funktionen beschreiben, darstellen und deuten

4.2 Gleichungen

👍 Beispiel

Für das Schulfest plant die Klasse 8a den Verkauf von Pommes Frites und Spezi. Der Gewinn lässt sich beschreiben durch den Term: $G = 1,25 \cdot x + 0,50 \cdot y - 50$.

Die Klasse möchte einen Gewinn von 400€ erzielen.

- a) Sie hat 260 Portionen Pommes eingekauft. Wie viele Flaschen Spezi müssen sie verkaufen, um ihr Ziel zu erreichen?
- b) Wie hängt die Anzahl der Flaschen Spezi von der Anzahl der Portionen Pommes ab?



Lösung

- a) Einsetzen von $G = 400$ und $x = 260$

in den Gewinnterm ergibt:

$$400 = 1,25 \cdot 260 + 0,50 \cdot y - 50$$

Man erhält die **Gleichung**

$$400 = 1,25 \cdot 260 + 0,50 \cdot y - 50$$

Zusammenfassen:

$$400 = 325 + 0,50 \cdot y - 50$$

Sortieren:

$$125 = 0,50 \cdot y \quad \text{für } y = 250$$

Die Klasse muss 250 Flaschen Spezi verkaufen.

- b) Einsetzen von $G = 400$ in den Gewinnterm

ergibt:

$$400 = 1,25 \cdot x + 0,50 \cdot y - 50$$

Zusammenfassen:

$$450 = 1,25 \cdot x + 0,50 \cdot y$$

Auflösen nach y :

$$450 - 1,25 \cdot x = 0,50 \cdot y \quad | \cdot 2$$

$$900 - 2,5 \cdot x = y$$

$y = 900 - 2,5x$ beschreibt den Zusammenhang von x und y .

👍 Beispiel

Gegeben ist die Gleichung $x + 4y = 4$.

- a) Welches x liefert den y -Wert 12?
- b) Löse die Gleichung nach y auf.

Lösung

- a) Einsetzen von $y = 12$ in $x + 4y = 4$:

$$x + 4 \cdot 12 = 4$$

$$x + 48 = 4 \quad | -48$$

$$x = -44$$

Für den x -Wert $x = -44$ erhält man den y -Wert 12.

- b) Auflösen der Gleichung nach y :

$$x + 4y = 4 \quad | -x$$

$$4y = 4 - x \quad | :4$$

y in Abhängigkeit von x :

$$y = 1 - \frac{1}{4}x$$

Für einen x -Wert erhält man den y -Wert

$$y = 1 - \frac{1}{4}x.$$


Aufgaben


1 Löse die Gleichung nach y auf.

a) $2x = y - 4$

c) $3(x - y) = 5$

e) $5x - y = 3x + 4y$

b) $4x - 3y = 6$

d) $2y - \frac{1}{2}(x + 1) = 0$

f) $\frac{5}{2}(x - 1) + \frac{3}{2}(y - 1) = 1$

2 Gegeben ist die Gleichung $2x - 2y = 2,4$.

a) Welches x liefert den y -Wert -2 ?

b) Löse die Gleichung nach y auf.

Bearbeite a) und b) für die Gleichungen $x - 6y = -24$ bzw. $5x - 3y - 2 = 0$

3

a) Bestimme für den Umfang u des Rechtecks einen Term. Forme diesen Term nach der Breite um.

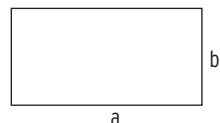
Der Umfang beträgt nun 110 cm.

b) Welche Länge und Breite kann das Rechteck haben?

Gib drei Möglichkeiten an.

c) Eine Seite ist 8 cm länger als die andere. Wie lang sind die Seiten?

Wie hängt die eine Seite von der anderen Seite ab?



4 Der Umfang einer geometrischen Figur lässt sich beschreiben durch den Term $u = a + 2b$.

a) Beschreibe die geometrische Figur. Was ergibt sich für $a = b$?

b) Wie lang ist die Seite b , wenn die Seite a 4,5 cm lang ist und der Umfang 14 cm ist?

$$1\% = \frac{1}{100}$$

$$1\text{‰} = \frac{1}{1000}$$

5 Alkohol und Autofahren passen nicht zusammen. Die Wenigsten wissen, dass Alkohol im Körper langsam abgebaut wird. Der durchschnittliche Abbauwert beträgt lediglich 0,15 Promille (‰) stündlich.

Nach einer Feier um Mitternacht hat ein Mann einen Alkoholspiegel von 1,5 ‰. Beantworte folgende Fragen mithilfe eines Terms.

a) Bereits bei 0,3 ‰ muss ein Fahrer mit einer Geldstrafe und Führerscheinentzug rechnen. Wann darf der Mann nach Hause fahren?

b) Wann ist er wieder restlos nüchtern?



6 Finde eine Geschichte zum Term $T(x) = 9,90 + 0,06x$; $x \geq 0$.

Welche Fragen lassen sich beantworten mit

a) Termwert für $x = 450$?

b) x -Wert für $T(x) = 23,7$?


Überprüfe dein Wissen

Das hast du in diesem Kapitel (Lineare Funktionen) gelernt.

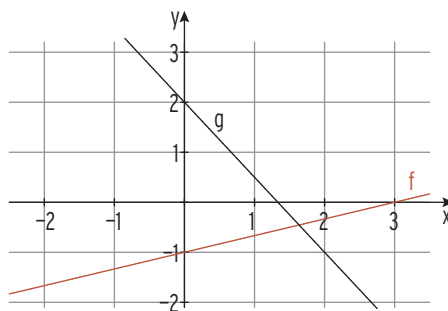
- 1** Vereinfache den Term. Berechne den Termwert für $x = -1$.

$$5(x - 1) + 4 - \frac{3}{2}(3x - 2) - 3$$

- 2** Gegeben ist die Gerade g mit $y = \frac{3}{8}x + 1$.

- a) Berechne die Achsenschnittpunkte.
Zeichne die Gerade in ein Koordinatensystem.
- b) Liegt der Punkt $P(-18 | -6)$ auf der Geraden g ?
- c) Eine zu g parallele Gerade h schneidet die x -Achse in $x = 3$.
Bestimme die Gleichung von h .

- 3** Bestimme die Geradengleichungen mithilfe der Abbildung.



- 4** Bestimme einen Funktionsterm, wenn der Funktionsgraph durch die Punkte $A(4 | -1)$ und $B(-1 | 3)$ verläuft.
- 5** Maike leiht sich von Opa 280 €, um sich einen Wunsch zu erfüllen. Sie möchte den Betrag in Raten von 15 € monatlich zurückzahlen. Stelle einen Funktionsterm für die Zuordnung $\text{Zeit} \mapsto \text{Restschuld}$ auf. Berechne die Nullstelle. Welche Bedeutung hat sie?
- 6** Für dein neues Smartphone empfiehlt dir der Verkäufer zwei Tarife.
 Tarif 1: Telefonieren und Surfen unbegrenzt für monatlich 24,99 €.
 Tarif 2: Surfen unbegrenzt für monatlich 14,99 € und telefonieren in alle Netze für 9 Ct pro Minute.
- a) Erstelle ein mathematisches Modell für beide Tarife.
- b) Welchen Tarif wählst du, wenn du 100 Minuten bzw. 200 Minuten im Monat telefonierst?
Begründe deine Wahl mithilfe einer Rechnung.

6 Statistik

Lernsituation

Die Schülerübungsfirma trifft sich zur wöchentlichen Sitzung.

Es gibt zwei Tagesordnungspunkte:

1. Umsatzentwicklung

Die Klasse 8a stellt die folgenden Daten vor.

Quartal	1/13	2/13	3/13	4/13	1/14	2/14	3/14	4/14
Umsatz in Tausend €	12,4	12,2	11,9	12,0	12,4	12,8	12,9	12,5

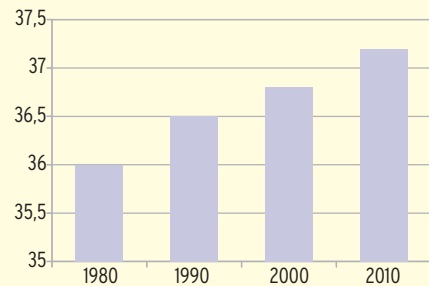
2. Umfrage nach der Schuhgröße in allen Klassen 8 um Daten für den Skischuhverleih der Schule zu erhalten.

Handlungsauftrag

Stelle die Umsatzentwicklung in einem Balkendiagramm dar. Berechne den mittleren Umsatz pro Quartal und die Spannweite.





Ermittle für die Daten der Schuhgrößen-Umfrage Mittelwert, Modalwert, Median und Spannweite. Welches Lagemaß kennzeichnet die Schuhgröße, die am häufigsten vorkommt? Der Unterschied zwischen der kleinsten und der größten Schuhgröße beträgt 10 Größen. Stimmt das?

Vergleiche deine Umfrage mit dem Diagramm: Entwicklung der Schuhgröße in Klasse 8 seit 1980.



Bearbeite diese Anforderungssituation nach Abschluss des Kapitels „Statistik“, in dem du die rechts aufgeführten Qualifikationen und Kompetenzen erworben hast.

Kompetenzen

-  Daten grafisch darstellen
-  Häufigkeiten und Lagemaße berechnen
-  Grafiken beschreiben und interpretieren
-  Daten interpretieren und bewerten

6.2 Deutung und Bewertung von Daten

6.2.1 Lagemaße

In diesem Kapitel sollen zu einer Beobachtungsreihe charakteristische Größen bestimmt werden, die Aussagen über die Lage der Beobachtungswerte zulassen. Das bekannteste Lagemaß ist das arithmetische Mittel.

Arithmetisches Mittel

Beispiel

Die Umsatzzahlen der Fink-AG je Quartal des Jahres 2012 sind gegeben durch

	I	II	III	IV
Umsatz in Mio. €	24,8	14,5	9,8	12,5

- Berechne den Mittelwert für den Quartalsumsatz.
- In den ersten 3 Monaten werden 40% des Umsatzes erzielt. Nimm dazu Stellung.

Lösung

- a) Durchschnittlicher Umsatz** je Quartal (Mittelwert):

$$\bar{x} = \frac{24,8 + 14,5 + 9,8 + 12,5}{4} = \frac{61,6}{4} = 15,4$$

In einem Quartal werden durchschnittlich 15,4 Mio. € Umsatz erzielt.

- b)** $h(\text{Quartal I}) = \frac{\text{Umsatz in Quartal I}}{\text{Gesamtumsatz}} = \frac{24,8}{61,6} = 0,4026$

In den ersten 3 Monaten werden 40,26% des Umsatzes erzielt. Die Aussage stimmt.

Hinweis: Der Mittelwert 15,4 bedeutet: Hätte jedes Quartal einen Umsatz von 15,4 Mio. €, so ergäbe die Summe aller Umsätze 61,6 Mio. €.

Berechnung des (arithmetischen) Mittelwertes \bar{x}

$$\text{Mittelwert } \bar{x} = \frac{\text{Summe aller Beobachtungswerte}}{\text{Anzahl } n \text{ der Beobachtungswerte}}$$

Beispiele für Mittelwerte

Durchschnitt aller Zeugnisnoten:	1,8
Durchschnittspreis einer Kugel Eis:	1€
Pro-Kopf-Verbrauch von Wasser:	135 Liter pro Tag
Durchschnittseinkommen aller Arbeitnehmer:	28500€ pro Jahr
Durchschnittlicher Trinkwasserverbrauch:	1,6 Liter pro Tag
Mittlerer Verkaufspreis eines Fahrrads:	486,50€
Mittlerer Absatz eines Autohauses:	12,5 Pkw pro Monat
Durchschnittliche Anzahl der Mahlzeiten mit Fleisch:	4,3 Mahlzeiten pro Woche

 **Beispiel**

Ein Weingut bietet vier Sorten Weine aus verschiedenen Lagen an.
Die nachfolgende Liste gibt die verkauften Mengen für einen Jahrgang an.

Sorte	A	B	C	D
Verkaufspreis pro Flasche in €	5	7	8	12
Verkaufte Flaschen	150	600	250	300

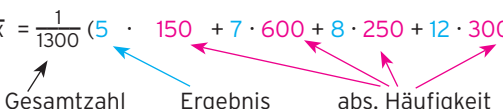
Berechne den durchschnittlichen Verkaufspreis pro Flasche.

Lösung

Anzahl der verkauften Flaschen: $n = 150 + 600 + 250 + 300 = 1300$
 Gesamteinnahmen (Erlös): $5 \cdot 150 + 7 \cdot 600 + 8 \cdot 250 + 12 \cdot 300 = 10550$
 Erlös pro Flasche: $\frac{10550}{1300} = 8,12$

Der durchschnittliche Verkaufspreis pro Flasche beträgt 8,12 €.

Erläuterung: Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{1300} (5 \cdot 150 + 7 \cdot 600 + 8 \cdot 250 + 12 \cdot 300) = 8,12$



 **Aufgaben**


1 Berechne das arithmetische Mittel folgender Daten:

15,2 16,1 17,3 15,7 14,8 17,0 16,8 15,1

Ergebnis	52	55	58	60	65
H	3	4	5	3	1

Ergebnis	0	1	2	3
h	0,25	0,2	0,15	0,4

2 Die Tabelle zeigt die Inflationsraten der letzten Jahre.

2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
1,5%	1,6%	2,3%	2,6%	0,4%	1,1%	2,3%	2,0%

Stelle die Daten in einem geeigneten Diagramm dar. Erläutere, wie die Inflationsrate gemessen wird. Bestimme die mittlere Inflationsrate für 2005 bis 2012.

Welche Gründe lassen sich für die Schwankungen anführen?

3 Bei der Meisterschaft im Kunstturnen wird die Reckübung von Fabian von den 6 Punktrichtern mit 9,1; 9,0; 9,4; 9,6; 9,3; 9,6 bewertet.

Berechne die mittlere Wertung.

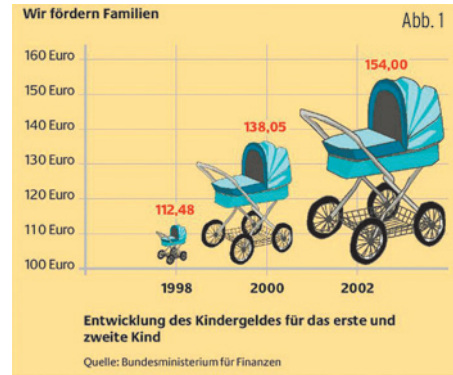
4 Mia hat 3 Versuche im Weitwurf gemacht und im Durchschnitt 22,10 m weit geworfen. Im 1. Versuch waren es 24,5 m, im zweiten 20,45 m.

Wie weit hat sie im 3. Versuch geworfen?

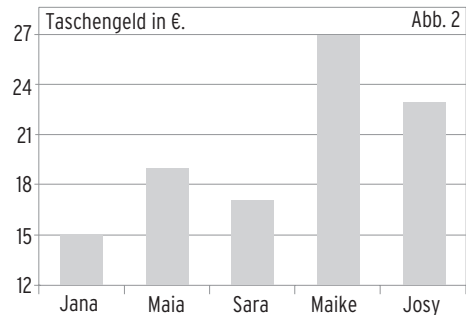
 **Aufgaben**



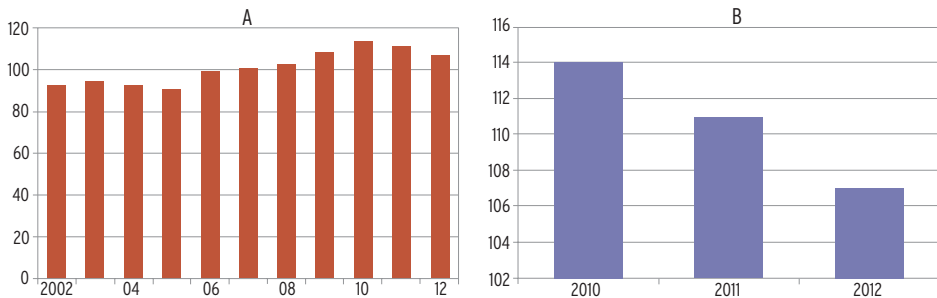
1 Beurteile die Darstellung in Abb. 1.



2 Jana und ihre Freundinnen erhalten monatlich Geld für ihr Prepaid-Handy: Jana 15 €; Maia 19 €; Sara 17 €; Maïke 27 € und Josy 23 €. Jana möchte eine Erhöhung durchsetzen. Sie legt nebenstehendes Diagramm vor. Erläutere das Diagramm. Ihre Eltern zeigen sich erstaunt und zeichnen auch ein Diagramm. Wie könnte das Diagramm der Eltern aussehen?



3 Die Entwicklung der täglichen Spielzeiten Jugendlicher am Handy wurde untersucht.



In den beiden Diagrammen A und B ist der Rückgang recht unterschiedlich ausgeprägt. Was bewirkt die unterschiedlichen Eindrücke? Welche Darstellung ist sachlicher und ehrlicher?