Beispiel: Bruttobetrag, Nettobetrag, Umsatzsteuer

Profiradfahrer Klaus kauft sich ein Mountainbike.
Das Fahrrad kostet einschließlich 19 % Umsatzsteuer 892,50 €.
Das Finanzamt möchte aber, dass Klaus den Nettobetrag und die Umsatzsteuer angibt.

Lösung

Prozentsatz: $p = 100\,\% + 19\,\% = 119\,\% = 1{,}19$

Prozentwert (vermehrter Grundwert, Bruttopreis): $PW = 892{,}50\,€$

Grundwert ≙ 100 % **(Lösung mit der Formel)**: $GW = \frac{PW}{p} = \frac{892{,}50\,€}{1{,}19} = 750\,€$

Umsatzsteuer 19 % von GW: $750\,€ \cdot 0{,}19 = 142{,}50\,€$

oder: Umsatzsteuer = Bruttopreis minus Nettopreis: $892{,}50\,€ - 750\,€ = 142{,}50\,€$

Der Nettopreis beträgt 750 € und die Umsatzsteuer 142,50 €.

750 €	+	142,50 €	=	892,50 €
Nettopreis		Umsatzsteuer		Bruttopreis

Beispiel: Verminderter und vermehrter Grundwert

Der Preis einer Spielkonsole wurde um 6 % erhöht.
Da der Umsatz aufgrund dieser Erhöhung zurückging, wurde der Preis um 8 % gesenkt.
Wie hoch war der ursprüngliche Preis, wenn die Konsole nach der Preissenkung 243,80 € kostet?

Lösung

Preissenkung 8 % bedeutet, dass 92 % den **243,80 €** entspricht.

Prozentsatz: $p = 100\,\% - 8\,\% = 92\,\% = 0{,}92$

Prozentwert (verminderter GW, Endpreis): $PW = 243{,}80\,€$

Grundwert ≙ 100 % **(Lösung mit der Formel)**: $GW = \frac{PW}{p} = \frac{243{,}80\,€}{0{,}92} = 265\,€$

Preiserhöhung 6 % bedeutet, dass 106 % den 265 € entspricht.

Prozentsatz: $p = 100\,\% + 6\,\% = 106\,\% = 1{,}06$

Prozentwert (vermehrter GW, Zwischenpreis): $PW = 265\,€$

Grundwert ≙ 100 % (ursprünglicher Preis): $GW = \frac{PW}{p} = \frac{265\,€}{1{,}06} = 250\,€$

Der ursprüngliche Preis betrug 250 €.

Zusammenfassung: Prozentrechnung

Prozent

Anteil bezogen auf die Vergleichszahl (den Grundwert) 100.

Formeln

Prozentsatz: $p = \frac{PW}{GW}$

Prozentwert: $PW = p \cdot GW$

Grundwert: $GW = \frac{PW}{p}$

Verminderter Grundwert, neuer Grundwert nach „Prozentabschlag“

Z. B.: Skonto, Rabatt

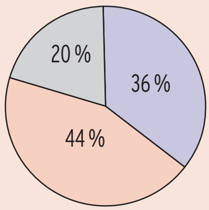
Vermehrter Grundwert, neuer Grundwert nach „Prozentaufschlag“

Z. B. Umsatzsteuer Bruttopreis = Nettopreis + Umsatzsteuer

Darstellung der Prozentsätze

Streifendiagramm:

Kreisdiagramm:



Aufgaben

1 Gib den veränderten Prozentsatz an.

a) Preiserhöhung um 27 %

b) Preisnachlass 13 %

c) Umsatzsteuer 19 %

d) Skonto 3 %

e) Rabatt 8 %

f) Wertsteigerung 7 %

g) Nachlass um ein Fünftel des ursprünglichen Preises

h) Erhöhung um ein Viertel des Preises.

2 Händler Wild kauft ein Gerät ein. Da das Gerät sich schlecht verkaufen lässt, gewährt er einen Preisnachlass von 15 %. Ein Kunde bezahlt schließlich 2419,95 €.
Für welchen Preis hat Herr Wild das Gerät ursprünglich verkaufen wollen?

3 Das Sportgeschäft Maierhöfen erhöht zu Beginn des Winters den Preis einer Winterjacke um 20 %.
Ein Kunde bezahlt 180 €. Wie hoch war der Preis vor der Erhöhung?

4 Der Rechnungsbetrag für einen Wareneinkauf beträgt einschließlich 19 % Umsatzsteuer 190,40 €.
Berechne den Rechnungsbetrag ohne Umsatzsteuer (Nettobetrag) und die Umsatzsteuer.

5 Herr Maier verdient nach einer Gehaltserhöhung von 2,5 % monatlich 2511,25 €.
Wie viel € betrug das Gehalt vor der Erhöhung?

6 Eva kauft ein Snowboard. Sie erhält 3 % Skonto und bezahlt 437,47 €.
Wie teuer war das Snowboard vor dem Preisnachlass?

7 Die Firma Sonne & Partner bietet den zusammenklappbaren Gartenstuhl „Santos“ an.
Zu Beginn des Sommers hat die Geschäftsleitung den Preis um 20 % erhöht.
Da der Stuhl nicht verkauft werden konnte, wurde der erhöhte Preis um 30 % gesenkt.
Er kostet jetzt 109,20 €.

a) Zu welchem Preis wurde der Stuhl ursprünglich angeboten?

b) Peter behauptet, der Stuhl wurde um 10 % billiger. Nimm dazu Stellung.

8 Der Rechnungsbetrag für einen Flachbildschirm einschließlich 19 % Umsatzsteuer und 3 % Skonto beträgt 252,65 €.
Berechne den Nettobetrag.

9 Der Preis einer Ware wurde um 15 % erhöht. Da diese Ware immer noch nicht verkauft werden konnte, senkte man den Preis wieder um 15 %.
Klaus sagt: „Dann hat man ja wieder den ursprünglichen Preis“.
Stimmt das? Begründe deine Antwort anhand eines Beispiels.

10 Mike wiegt 80 kg. Er möchte abnehmen und beginnt am 1. Oktober eine Diät.
Am 1. November hat sich sein Körpergewicht um 10 % verringert.
Wie schwer ist er jetzt?
Bis zum 1. Dezember verliert er weitere 10 % im Vergleich zum 1. November.
Am 1. Januar zeigt die Waage wieder 80 kg an.
Um wie viel Prozent hat er von Dezember bis Januar wieder zugenommen?

11 Klaus möchte sich eine Stereoanlage kaufen. Im Musikgeschäft Durach kostet die Anlage 630 €. Er darf 3 % Skonto abziehen. Im Musikgeschäft Vollmar kann er eine vergleichbare Stereoanlage kaufen und spart durch 3 % Skonto 19,50 €. Um wie viel Prozent unterscheiden sich die Preise der beiden Anlagen?

12 Das Sportgeschäft Schlumpberger senkt aufgrund eines Jubiläumsverkaufs alle Preise um 20 %. Eva kauft sich ein Fahrrad, das jetzt 890 € kostet. Sie weiß nicht, dass das Geschäft den Preis für dieses Fahrrad vor zwei Monaten um 15 % erhöht hat. Wie viel Euro kostete das Fahrrad ursprünglich? Wie viel Prozent beträgt der Preisnachlass in Wirklichkeit?

13 Onkel Alexander hat beim Finanzamt einen Beleg eingereicht (s. Abbildung). Leider sind die Umsatzsteuer und der Nettobetrag nicht aufgeführt.
Das Finanzamt verlangt aber die Angabe dieser Beträge. Onkel Alexander bittet dich, diese Beträge zu berechnen.

14 Herr Müller kauft eine Bohrmaschine im Spezialgeschäft DeWalti. Er erhält einen Rabatt von 6 % und da er ein guter Kunde ist, zusätzlich noch 2 % Skonto.
Herr Müller bezahlt schließlich 506,66 €. Wie hoch war der ursprüngliche Preis?

15 Eine Befragung über die Höhe des monatlichen Taschengeldes in der Klasse 7 b ergab folgende Tabelle.

Höhe des monatlichen Taschengeldes in €	0	5	7	10	12	15	20	25
Anzahl der Schüler	1	2	1	8	6	5	3	1

a) Mike von der Klasse 8 d erhält 10 € Taschengeld im Monat.
Welcher Prozentsatz der Schüler in der Klasse 7 b bekommt mehr Taschengeld als Mike?

b) Bestimme die relative Häufigkeit der Schüler, die weniger als 10 €, genau 10 €, mehr als 10 € Taschengeld bekommen.
Stelle diese Häufigkeiten in einem Kreisdiagramm dar.

c) Würdest du folgenden Vorschlag annehmen?
Dein monatliches Taschengeld wird um 10 % erhöht und anschließend wieder um 10 % gesenkt.
Begründe deine Antwort.

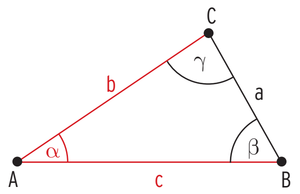
16 Die Firma Adler erhöht zum 1. Januar den Preis eines Monitors um 10 %.
Mitte Januar kommt ein Konkurrenzprodukt auf den Markt. Daraufhin senkt die Firma Adler den Preis um 5 %.
Wie hoch war der Preis vor dem 1. Januar?

17 Bearbeite die Lernsituation von Seite 24.

Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (SWS)

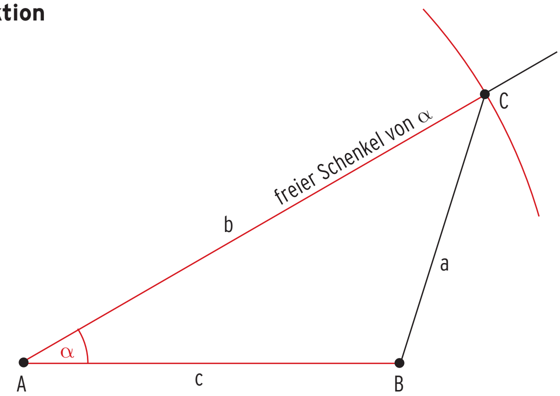
Planfigur

Gegeben:
c = 5 cm, b = 7 cm, α = 30°,
zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (Zwischenwinkel).



Konstruktionsprotokoll SWS-Konstruktion

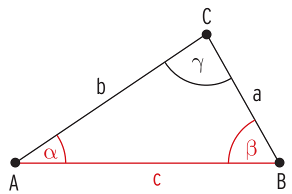
1. Zeichne die Seite c = AB.
2. Trage den Winkel α im Punkt A an. (Zeichne den freien Schenkel von α.)
3. Zeichne den Kreisbogen um A mit Radius b.
4. Der Kreis schneidet den freien Schenkel von α im Punkt C. Verbinde A mit C und B mit C.



Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Winkeln und der eingeschlossenen Seite (WSW)

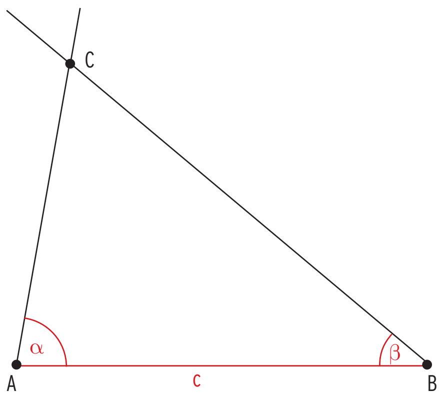
Planfigur

Gegeben: c = 5,5 cm, α = 80 °, β = 40°,
eine Seite und die anliegenden Winkel.



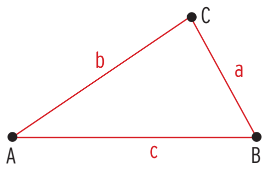
Konstruktionsprotokoll WSW-Konstruktion

1. Zeichne die Seite c = AB.
2. Trage den Winkel α im Punkt A an. (Zeichne den freien Schenkel von α.)
3. Trage den Winkel β im Punkt B an. (Zeichne den freien Schenkel von β.)
4. Die freien Schenkel von α und β schneiden sich im Punkt C. Verbinde A mit C und B mit C.

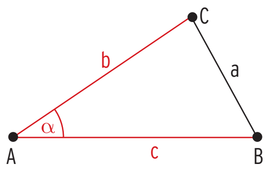


Zusammenfassung der drei Konstruktionstypen

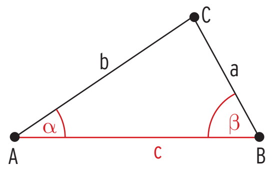
SSS



SWS



WSW



Aufgaben

1 Konstruiere das Dreieck. Erstelle ein Konstruktionsprotokoll.

a) a = 4 cm, b = 3 cm, c = 6 cm **b)** a = 2,5 cm, b = 5,6 cm, c = 4,3 cm

c) a = 72 mm, b = 32 mm, c = 52 mm **d)** a = 3,5 cm, b = 6 cm, c = 3 cm

2 Konstruiere das gleichschenklige Dreieck. Erstelle ein Konstruktionsprotokoll.

a) a = b = 5 cm, c = 4 cm **b)** a = 3,7 cm, b = c = 6,2 cm

c) a = c = 3,1 cm, b = 2,5 cm **d)** c = 29 mm, a = b = 52 mm

3 Konstruiere das gleichseitige Dreieck. Erstelle ein Konstruktionsprotokoll.

a) a = 4,7 cm **b)** b = 35 mm

c) c = 2,2 cm **d)** a = 0,52 dm

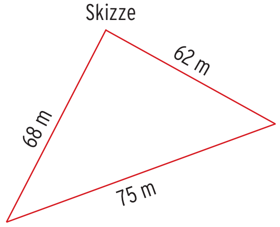
4 Im Heft eines Schülers aus der Parallelklasse findest du folgendes Konstruktionsprotokoll.

1. Zeichne die Seite c = $\overline{AB}$ = 3,9 cm
2. Zeichne den Kreisbogen um A mit Radius b = 4,2 cm
3. Zeichne den Kreisbogen um B mit Radius a = 2,7 cm
4. Die Kreise schneiden sich in C. Verbinde die Punkte A mit C und B mit C.

Konstruiere das Dreieck.

5 Onkel Herbert hat folgende Skizze seines Grundstücks erstellt. Konstruiere das Dreieck. Erstelle ein Konstruktionsprotokoll.
Maßstab: 1:1000, d. h., 1 mm entspricht 1000 mm in der Natur.

Skizze



6 Konstruiere das Dreieck. Erstelle ein Konstruktionsprotokoll.

a) b = 3,2 cm, c = 5,3 cm, α = 50° **b)** a = 5 cm, c = 6 cm, β = 40°

c) b = 35 mm, a = 55 mm, γ = 20° **d)** b = c = 4,2 cm, α = 110°

e) a = b = 3 cm, γ = 70° **f)** c = 4,2 cm, b = 5 cm, α = 65°

Konstruktionen mithilfe einer dynamischen Software

Konstruktionen können statt mit Zirkel, Lineal und Geodreieck auch mithilfe einer dynamischen Software erfolgen.

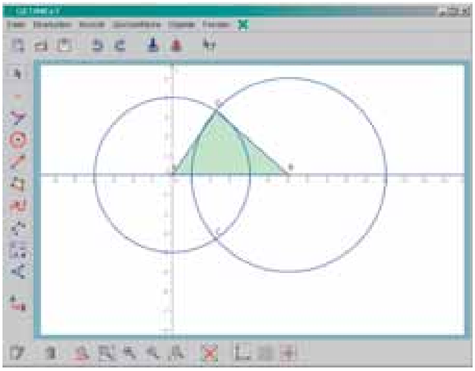
Die gewählten Konstruktionsmöglichkeiten sind an die Konstruktionsprotokolle mit Zirkel und Geodreieck angelehnt (vgl. Seiten 53 und 54).

Beispiel SSS (Drei Seiten)

Konstruiere das Dreieck mit $a = 5\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$ und $c = 6\,\text{cm}$.

SSS-Konstruktion

1. Strecke mit fester Länge wählen.
   $c = AB = 6\,\text{cm}$
2. Kreis (Radius eingeben) wählen.
   Mittelpunkt A, Radius $r = b = 4\,\text{cm}$.
   Mittelpunkt B, Radius $r = a = 5\,\text{cm}$.
3. Vieleck (Polygon) wählen.
   Punkte A, B und Schnittpunkt der beiden Kreise markieren. Dreieck zeichnen.

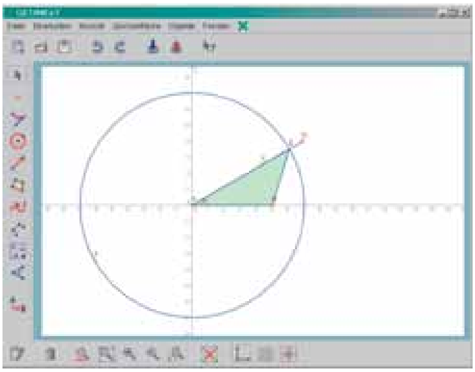


Beispiel SWS (Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel)

Konstruiere das Dreieck mit $c = 5\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$ und $\alpha = 30°$.

SWS-Konstruktion

1. Strecke mit fester Länge wählen.
   $c = AB = 5\,\text{cm}$
2. Winkel mit fester Größe wählen.
   Punkt A, Winkel $\alpha = 30°$
3. Strecke wählen. Strecke b´ von A über C hinaus zeichnen (s. Abbildung).
4. Kreis (Radius eingeben) wählen.
   Mittelpunkt A, Radius $r = b = 7\,\text{cm}$.
5. Vieleck (Polygon) wählen.
   Punkte A, B und Schnittpunkt des Kreises mit der Strecke b′ markieren.
   Dreieck zeichnen.



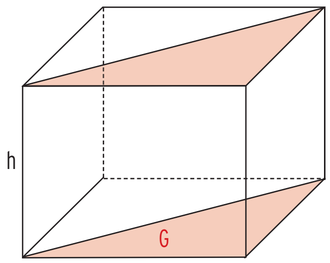
4.4.5 Volumen und Oberfläche eines Dreiecksprismas

Schneidet man einen Quader entlang der Diagonalen auseinander, so erhält man zwei Dreiecksprismen.
Die Grundfläche G des Prismas ist halb so groß wie die Grundfläche G_Q des Quaders: $G = \frac{1}{2} G_Q$

Volumen des Quaders: $V_Q = G_Q \cdot h$

Volumen des Dreiecksprismas: $V = \frac{1}{2} V_Q = \frac{1}{2} G_Q \cdot h = G \cdot h$

Das Volumen eines Prismas berechnet man mit der Formel $V = G \cdot h$.

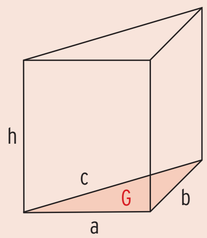


Merke

Volumen eines Prismas

Volumen = Grundfläche · Höhe

$\mathbf{V = G \cdot h}$



Oberfläche eines Prismas

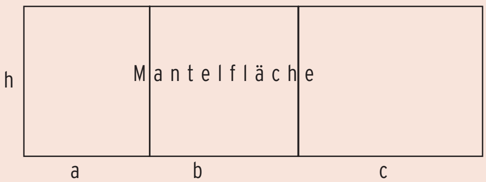
Oberfläche
= 2 · Grundfläche + Mantelfläche

$\mathbf{O = 2 \cdot G + M}$

Mantelfläche eines Prismas

$\mathbf{M = (a + b + c) \cdot h = u \cdot h}$

u ist der Umfang des Vielecks (Grundfläche G).



Beispiel

Ein Dreiecksprisma ist $h = 5{,}2\,\text{cm}$ hoch und hat als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $c = 2{,}5\,\text{cm}$ und der Dreieckshöhe $h_c = 2{,}17\,\text{cm}$.
Berechne das Volumen und die Oberfläche des Prismas.

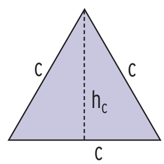
Lösung

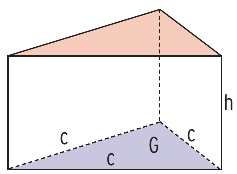
Grundfläche: $G = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5\,\text{cm} \cdot 2{,}17\,\text{cm} = 2{,}71\,\text{cm}^2$

Volumen: $V = G \cdot h = 2{,}71\,\text{cm}^2 \cdot 5{,}2\,\text{cm} = 14{,}09\,\text{cm}^3$

Mantel: $M = u \cdot h = 3c \cdot h = 3 \cdot 2{,}5\,\text{cm} \cdot 5{,}2\,\text{cm}$
$= 39\,\text{cm}^2$

Oberfläche: $O = 2 \cdot G + M = 2 \cdot 2{,}71\,\text{cm}^2 + 39\,\text{cm}^2$
$O = 44{,}42\,\text{cm}^2$





Aufgaben

1 Berechne das Volumen des Prismas.

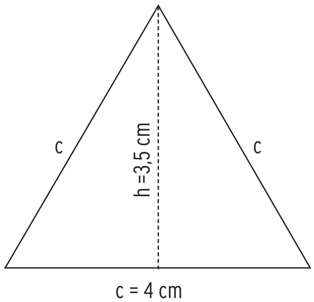
a) $G = 23\,cm^2$, $h = 11\,cm$ **b)** $G = 37\,mm^2$, $h = 4\,mm$

c) $G = 7{,}2\,cm^2$, $h = 3\,mm$ **d)** $G = 4{,}2\,m^2$, $h = 6\,dm$

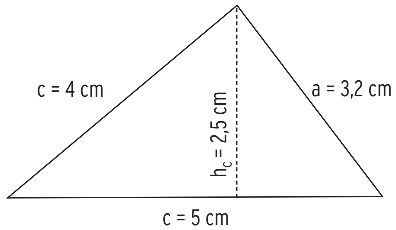
e) $G = 3\,dm^2$, $h = 4{,}7\,m$ **f)** $G = 0{,}3\,mm^2$, $h = 4\,cm$

2 Ein Dreiecksprisma hat die abgebildete Grundfläche G und die Höhe $h = 7\,cm$.
Berechne das Volumen und die Oberfläche des Dreiecksprismas.

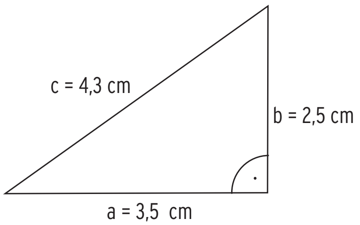
a)



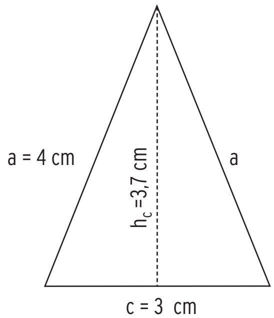
b)



c)



d)

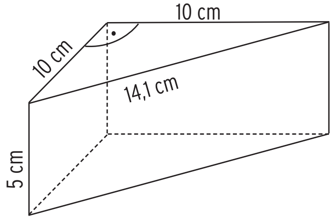


3 Ein Zelt hat die Form eines liegenden Prismas. Die Vorder- und Rückseite des Zeltes ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $a = 1{,}2\,m$ und der Höhe $h = 1{,}04\,m$.
Die Länge des Zeltes beträgt 1,80 m.

a) Wie viel m^3 Luft sind im Zelt?

b) Wie viel m^2 Material wurden zur Herstellung des Zeltes (einschließlich Zeltboden) benötigt?

4 Ein Käsestück hat die Form eines Prismas (siehe Abbildung).
$1\,cm^3$ wiegt 1,53 g.
Oma Anna wünscht sich zum Abendessen 200 g Käse.
Reicht dieses Käsestück?



4.4.6 Prismenförmige Gegenstände aus unserem Umfeld

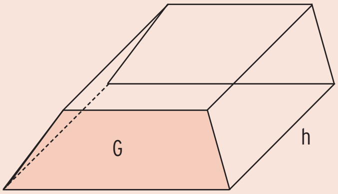
Bisher untersuchten wir Prismen, die als Grundfläche ein Rechteck oder ein Dreieck hatten. Nun untersuchen wir Prismen, die als Grundfläche ein Vieleck (beliebiges Viereck, Fünfeck, Sechseck, …) haben. Den Volumeninhalt berechnet man wie bisher mit der Formel $V = G \cdot h$.

Merke

Volumen eines Prismas
Volumen = Grundfläche · Höhe
$\mathbf{V = G \cdot h}$

Oberfläche eines Prismas
Oberfläche = 2 · Grundfläche + Mantelfläche
$\mathbf{O = 2 \cdot G + M}$

Mantelfläche eines Prismas
$\mathbf{M = u \cdot h}$
u ist der Umfang des Vielecks (Grundfläche G)

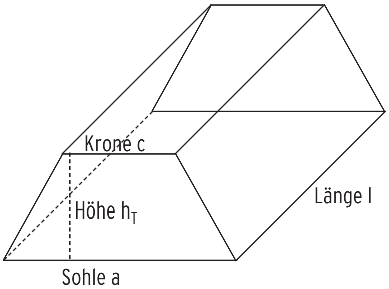


Beispiel

Ein Eisenbahndamm hat den Querschnitt eines Trapezes. Der Damm ist an seiner Sohle 24 m breit und hat eine Höhe von 8 m. Die Dammkrone beträgt 7,5 m.
Wie viel m^3 Auffüllmaterial wurden für einen 400 m langen Damm benötigt?

Lösung

Skizze des Damms
Der Damm ist ein **Prisma,** das als Grundfläche ein symmetrisches Trapez hat.



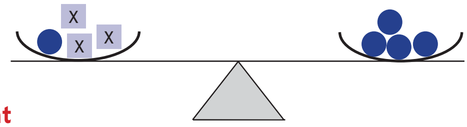
Querschnittsfläche G
$G = \frac{a + c}{2} \cdot h_T = \frac{24\,m + 7{,}5\,m}{2} \cdot 8\,m = 126\ m^2$

Volumen
Hinweis: Die Höhe des Damms ist die Länge $\ell = 400\,m$.
$V = G \cdot h = G \cdot \ell = 126\,m^2 \cdot 400\,m = 50\,400\,m^3$
Für den Damm wurden $50\,400\,m^3$ Auffüllmaterial benötigt.

5.2.3 Lösung einer Gleichung durch Äquivalenzumformungen

Eine Gleichung kann mit einer Waage verglichen werden, die im Gleichgewicht ist.
Die Waage bleibt nur dann im Gleichgewicht, wenn die Gewichte in beiden Waagschalen „gleich" verändert werden.

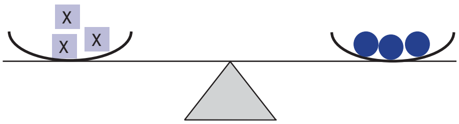
Waagemodell



Gleichgewicht bedeutet $3x + 1 = 4$

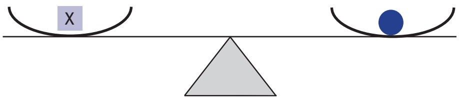
Die „mathematische Waage" bleibt im Gleichgewicht, wenn man folgende Umformungen, die auf eine einfache Gleichung führen, vornimmt.

Auf beiden Seiten 1 subtrahieren



$3x = 3$

Beide Seiten durch 3 teilen



$x = 1$

Äquivalenzumformungen

Gleichung: $3x + 1 = 4 \quad |-1$

Grundmenge: $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$

Auf beiden Seiten 1 subtrahieren: $3x + 1 - 1 = 4 - 1$

$3x = 3 \quad |:3$

Beide Seiten durch 3 teilen: $\frac{3x}{3} = \frac{3}{3}$

Einfache Gleichung: $x = 1$

Die Gleichung hat die Lösung 1.

Angabe in Mengenschreibweise: $\mathbb{L} = \{1\}$

Gelesen: Die Zahl 1 gehört zur Lösungsmenge $\mathbb{L}$.
(Da die Zahl 1 zur Grundmenge gehört und das Einsetzen eine wahre Aussage ergibt.)

Probe: Einsetzen von 1 für x

in die ursprüngliche Gleichung: $3 \cdot 1 + 1 = 4$

Wahre Aussage: $4 = 4$

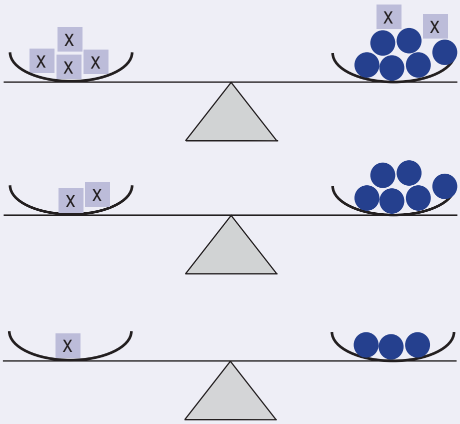
Zu jeder Gleichung gehört eine Grundmenge $\mathbb{G}$. Sie enthält alle Zahlen, die als Lösung infrage kommen. Ist die Grundmenge nicht angegeben, so gilt stets $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$.

Beachte

Eine Gleichung mit einer Unbekannten (Lösungsvariablen) ist eine Behauptung der Form:
linker Term = rechter Term.
Die Lösung einer Gleichung ist ein **Element der Grundmenge** $\mathbb{G}$. Sie macht die Gleichung zu einer **wahren Aussage**. Die Menge aller Lösungen heißt **Lösungsmenge** $\mathbb{L}$.

Beispiel

Welche Gleichung ist dargestellt?
Sind die Umformungen richtig?



Lösung

Dargestellte Gleichung: $4x = 2x + 6$
Die Umformungen sind richtig:
- Subtraktion von $2x$
- Division durch 2

Lösung: $x = 3$

Bemerkung: Ziel der Umformungen ist es, eine gegebene Gleichung in die **einfachste Form** zu bringen. Umformungen, die die Lösungsmenge nicht ändern (Waage bleibt im Gleichgewicht), nennt man **Äquivalenzumformungen**.

Beispiel

Löse die Gleichungen durch Umformung (Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$).

a) $x - 5 = 4$ **b)** $x + 2 = 7$ **c)** $4x = 7$ **d)** $\frac{1}{3}x = 4$

Lösung

a) $x - 5 = 4 \quad |+5$
$x - 5 \mathbf{+ 5} = 4 \mathbf{+ 5}$
$x = 9$; $\mathbb{L} = \{9\}$

b) $x + 2 = 7 \quad |-2$
$x + 2 \mathbf{- 2} = 7 \mathbf{- 2}$
$x = 5$; $\mathbb{L} = \{5\}$

Die Gleichungen $x - 5 = 4$ und $x = 9$ bzw. $x + 2 = 7$ und $x = 5$ sind **äquivalent,** sie haben die **gleiche Lösung**.

c) $4x = 7 \quad |:4$
$(4x):4 = 7:4 = \frac{7}{4}$
$x = \frac{7}{4}$; $\mathbb{L} = \left\{\frac{7}{4}\right\}$

d) $\frac{1}{3}x = 4 \;|\cdot 3$
$\left(\frac{1}{3}x\right)\cdot 3 = 4 \cdot 3$
$x = 12$; $\mathbb{L} = \{12\}$

Äquivalenzumformungen
- *Addieren*
- *Subtrahieren*
- *Multiplizieren (Zahl ≠ 0)*
- *Dividieren (Zahl ≠ 0)*

Sachaufgaben aus dem Alltag

Beispiel

Ein Minivan kostet pro Tag 60 € und zusätzlich je gefahrenen km 40 Cent.
Der Vater von Klaus braucht den Transporter 3 Tage. Kannst du ihm ausrechnen, wie viele km er fahren kann, wenn er nicht mehr als 250 € bzw. 300 € ausgeben kann?

Lösung

a) Wir lösen mit einer **Wertetabelle**

gefahrene km	100	150	175	200	250	300	350	400
Grundgebühr in €	180	180	180	180	180	180	180	180
km-Kosten in €	$100 \cdot 0{,}4 = 40$	$150 \cdot 0{,}4 = 60$	70	80	100	120	140	160
Gesamtkosten in €	220	240	250	260	280	300	320	340

Ergebnis: Er kann 175 km bzw. 300 km fahren.

b) Wir lösen mit einer **Gleichung**

Variable festlegen: Die Anzahl der gefahrenen km sei x.

Gleichung aufstellen:

Grundgebühr in € für 3 Tage: 180
km-Geld in € für x km: $0{,}4x$
Gesamtkosten für x km: $K(x) = 0{,}4x + 180$
Bedingung für x: $K(x) = 250$
Zu lösende Gleichung: $0{,}4x + 180 = 250 \quad |-180$
Nach x auflösen: $0{,}4x = 70 \quad |:0{,}4$
$x = \frac{70}{0{,}4}$
Einfache Gleichung: $x = 175$
Antwortsatz: Er kann 175 km fahren.
Probe: $0{,}4 \cdot 175 + 180 = 250$ (wahre Aussage).
Bedingung für x: $K(x) = 300$
Zu lösende Gleichung: $0{,}4x + 180 = 300 \quad |-180$
Nach x auflösen: $0{,}4x = 120 \quad |:0{,}4$
$x = \frac{120}{0{,}4}$
Einfache Gleichung: $x = 300$
Antwortsatz: Er kann 300 km fahren.
Probe: $0{,}4 \cdot 300 + 180 = 300$ (wahre Aussage).

Beispiel

Du hast eine Modelleisenbahn mit einer Dampflokomotive (Länge 24 cm) und einer Anzahl von Reisewagen (Länge 14 cm).

a) Wie lange ist dein Zug mit 4, mit x Reisewagen?

b) Deine Anlage ist geeignet für Züge bis zu einer Länge von 150 cm.
Wie viele Reisewagen kannst du an die Lokomotive hängen?
Wie viele Reisewagen hat ein Zug mit 2,48 m Länge?

Lösung

a) Wir lösen mit einer **Wertetabelle; x ist die Anzahl der Reisewagen**.

x	1	2	4	6	8	9	15	16
Länge der Lok in cm	24	24	24	24	24	24	24	24
Wagenlänge in cm	$14 \cdot 1 = 14$	$14 \cdot 2 = 28$	56	84	112	126	210	224
Gesamtlänge in cm	38	52	80	108	136	150	234	248

Ergebnis: Dein Zug mit 4 Reisewagen ist 80 cm lang. Du kannst 9 Reisewagen an die Lokomotive hängen. Ein Zug mit 2,48 m Länge hat 16 Reisewagen.

b) Wir lösen die Aufgabe mit einer **Gleichung.**

Variable festlegen: Die Anzahl der Reisewagen sei x.

Gleichung aufstellen:

Länge der Lokomotive in cm: 24

Länge der x Reisewagen in cm: $14x$

Gesamtlänge für x Reisewagen in cm: $L(x) = 14x + 24$

– Länge für 4 Reisewagen: $L(4) = 14 \cdot 4 + 24 = 80$

– **Bedingung** für x: $L(x) = 150$ — $14x + 24 = 150 \quad | -24$

Nach x auflösen: $14x = 126 \quad | :14$

$x = \frac{126}{14} = 9$

Probe: $14 \cdot 9 + 24 = 150$ (wahre Aussage).

– **Bedingung** für x: $L(x) = 248$ — $14x + 24 = 248 \quad | -24$

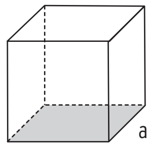
Nach x auflösen: $14x = 224 \quad | :14$

$x = \frac{224}{14} = 16$

Probe: $14 \cdot 16 + 24 = 248$ (wahre Aussage).

Aufgaben

1 Für das Kantenmodell des Würfels braucht man 288 cm Draht. Karin behauptet:
Der Würfel hat ein Volumen von mehr als 10 Liter.
Überprüfe.



2 Ein Rechteck mit einer Seite $a = 18\,\text{cm}$ hat einen Umfang von 1,20 m.
Wie lang ist die Seite b? Löse mithilfe einer Gleichung.

3 Ein Dreieck ist 10 cm hoch. Der Flächeninhalt beträgt $145\,\text{cm}^2$.
Stelle eine Gleichung auf und bestimme damit die Länge der Grundseite.

4 In einen 12 g schweren Umschlag werden DIN-A4-Blätter gelegt, die jeweils 5 g wiegen.

a) Wie schwer ist der Umschlag mit 25 Blättern?
b) Das Porto erhöht sich, wenn der Umschlag mehr als 500 g wiegt. Löse dazu eine Gleichung.

5 An unserer Schule gibt es Lehrerinnen (w) und Lehrer (m).
Beschreibe in Worten, welche Aussage jeweils mit der Gleichung verbunden ist.

a) $w + m = 85$ **b)** $w = m + 45$ **c)** $w - 15 = 2m$ **d)** $3m - 25 = w$

6 Ein Radfahrer fährt auf einer zweitägigen Radtour am 1. Tag 20 % der Gesamtstrecke und noch weitere 60 km, am 2. Tag 25 % der Gesamtstrecke und noch weitere 50 km.
An beiden Tagen fährt er gleich viel km.
Wie viel km legt der Radfahrer insgesamt zurück?
Löse mithilfe einer Tabelle und einer Gleichung.

7 Ben möchte 330 € ansparen, um ein Fahrrad zu kaufen. Von jedem der beiden Großväter erhält er zum Geburtstag 50 €.
Wie viele Raten zu je 20 € muss Ben mindestens einzahlen, damit er den erwünschten Betrag erreicht?
Stelle eine Gleichung auf, löse sie und führe die Probe durch.