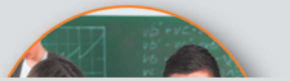
Bohner
Ihlenburg
Ott
Deusch

Mathematisches Grundgerüst

Ein Mathematikbuch für die Eingangsklasse



Merkur M
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner
Lehrauftrag Mathematik am BSW Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch
Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

* * * * * * * * * *

7. Auflage 2016

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-**0206**-6

2.1.8 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben

Beispiel

- Ein Energieversorger bietet seinen Kunden Stromlieferung zu folgenden Bedingungen an: Eine kWh kostet 0,28 € bei einer monatlichen Grundgebühr von 4,50 €.
- Eine Kaufhauskette verkauft Strom für 0,23 € pro kWh bei einer monatlichen Grundgebühr von 7,50 €. Bewerten Sie die Situation.

Lösung

- **Reale Situation**
  Energieversorger bieten ihre Stromlieferungen unter bestimmten Bedingungen an.
- **Reales Modell**
  Man versucht ein vereinfachtes mathematisches Modell zu entwerfen.
  Annahme: Der Preis pro kWh ist konstant.
  Modell (Idee): Kosten durch eine Gerade beschreiben.
- **Mathematisches Modell**
  Die Variable x beschreibt die Anzahl der verbrauchten kWh.
  $y = f(x)$ sind die monatlichen Stromkosten in Abhängigkeit vom Verbrauch.

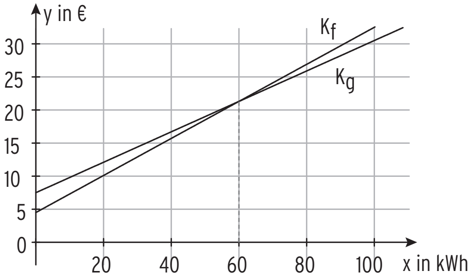
  Wertetabelle:
  z. B.: $x = 10$; $y = 0{,}28 \cdot 10 + 4{,}5 = 7{,}3$

x in kWh	0	10	50	100
y in €	4,50	7,30	18,50	32,50

  Funktionsterm: $f(x) = 0{,}28x + 4{,}5$
  Term für das **Angebot der Kaufhauskette:**
  $g(x) = 0{,}23x + 7{,}5$
  (Grundgebühr pro Monat $g(0) = 7{,}5$; Verbrauchskosten für x kWh: $0{,}23 \cdot x$)
- **Mathematische Lösung**
  Für die Bewertung bestimmt man den Schnittpunkt der beiden Geraden.

  Berechnung der **Schnittstelle** durch **Gleichsetzen:** $f(x) = g(x)$

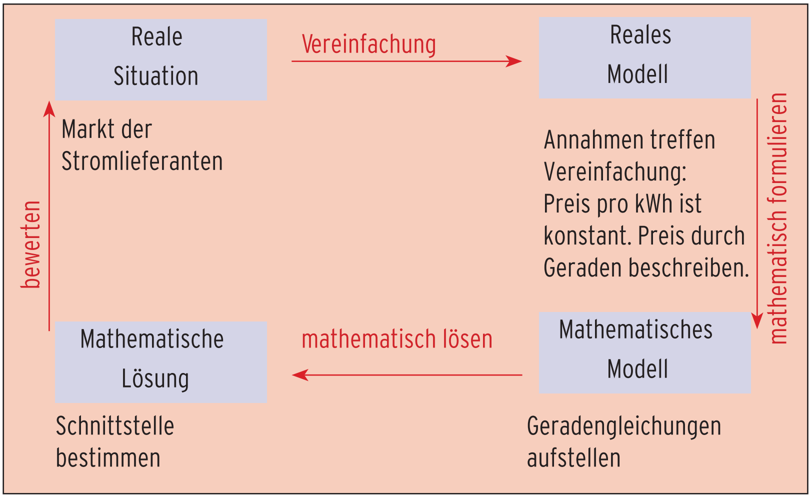
$$0{,}28x + 4{,}5 = 0{,}23x + 7{,}5$$
$$0{,}05x = 3$$
$$\Rightarrow x = 60$$



  Mithilfe der Abbildung:
  Für $x < 60$ gilt: $f(x) < g(x)$,
  für $x > 60$ gilt: $f(x) > g(x)$.

  Bewertung: Das Angebot der Kaufhauskette ist günstiger, wenn der Verbrauch im Monat mehr als 60 kWh beträgt.

Modellierung

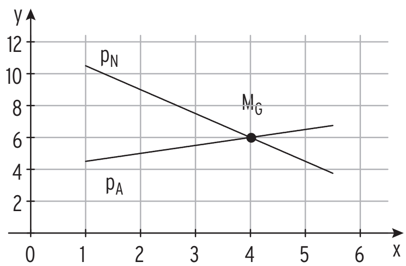


Beispiel

Gegeben sind die Angebotsfunktion mit $p_A(x) = 0{,}5\,x + 4$ und die Nachfragefunktion mit $p_N(x) = 12 - 1{,}5\,x;\ 1 \le x \le 5{,}5$.
Zeigen Sie, $x = 4$ ist die Gleichgewichtsmenge.
Bestimmen Sie den Gleichgewichtspreis.

Lösung

Für die Gleichgewichtsmenge gilt: $p_A(4) = p_N(4)$
Einsetzen von $x = 4$ in $p_A(x)$ ergibt $p_A(4) = 6$.
Einsetzen von $x = 4$ in $p_N(x)$ ergibt $p_N(4) = 6$.
Gleichgewichtspreis: $p_G = 6$
Marktgleichgewicht: $M_G\,(4|6)$



Bemerkungen:

- Die Nachfragefunktion **(Preis-Absatz-Funktion)** p_N beschreibt den **Zusammenhang** von **Stückpreis p und nachgefragter Stückzahl x:** der Stückpreis sinkt, wenn die Absatzmenge zunimmt.
- Die Angebotsfunktion p_A gibt die Abhängigkeit der angebotenen Menge von dem dafür verlangten Preis an. Je höher der Verkaufspreis, desto mehr sind die Hersteller bereit zu produzieren. Mit steigenden Preisen nimmt dann die angebotene Menge zu.
- Das Marktgleichgewicht M_G ist erreicht, wenn **Angebot und Nachfrage übereinstimmen.**

Aufgaben

1 Nach einer Geburtstagsfeier hat ein Freund einen Alkoholspiegel von 1,2 Promille. Im Falle einer Polizeikontrolle muss ein Autofahrer bereits bei 0,3 Promille mit einer Strafe rechnen. Beraten Sie Ihren Freund.

2 Eine Brauerei berechnet für die Auslieferung ihrer Getränkekisten mit dem eigenen Verkaufsfahrzeug 0,80 € pro Kiste bei monatlichen Fixkosten von 840 €.

a) Erstellen Sie einen Term für die Kosten der Auslieferung von x Kisten.

b) Ein Logistikunternehmen bietet die Auslieferung von Getränkekisten für 1,15 € pro Kiste an.
Um welchen Betrag lassen sich dadurch die Kosten bei einem monatlichen Absatz von 2500 Kisten senken?
Bis zu welcher Kistenzahl sollte das Logistikunternehmen die Auslieferung übernehmen?

c) Unterbreiten Sie der Brauerei zwei Angebote, sodass sich die Kosten bei einem Absatz von 4000 Kisten um 680 € reduzieren.

3 Eine Wochenzeitschrift hat eine verkaufte Auflage von 120000 Exemplaren. Der Verkaufspreis für eine Zeitschrift beträgt 2,20 €. Mithilfe der Marktforschung stellt der Verlag fest, dass sich bei einer Preissenkung um 0,20 € die Auflage um 5000 Exemplare erhöhen lässt. Bei einer Preiserhöhung um 0,20 € verliert man 5000 Käufer.

a) Berechnen Sie den Preis bei einer Auflage von 140 000 Exemplaren.
Welcher Stückpreis ergibt sich bei einer Auflage von x Exemplaren?

b) Welche Auflage kann der Verlag erwarten, wenn er den Preis der Zeitschrift auf 1,50 € senkt?

4 In eine zylinderförmige Regentonne mit 1 m^2 Grundfläche fließen 80 Liter pro Stunde. Beschreiben Sie die Füllhöhe h in Abhängigkeit von der Zeit t, wenn zu Beginn ($t = 0$) 150 Liter in der Tonne waren. Ist der Zusammenhang zwischen h und t linear, wenn die Tonne gebaucht oder kegelförmig ist?

5 Die Gesamtkosten eines Autozulieferers verhalten sich linear. Bei einer Produktion von 100 ME betragen die Gesamtkosten 2050 GE, bei 250 ME betragen sie 3850 GE.
Eine ME wird für 20 GE am Markt abgegeben.
Für welche Produktionsmenge wird ein Gewinn von über 1000 GE erzielt?

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

1 Lösen Sie die folgende Gleichung.

a) $3x - 4 = 2(x - 3)$ b) $\frac{5x-1}{2} = \frac{6}{5}$ c) $2 + \frac{3}{2}x = 2 - \frac{4}{5}x$

2 Bestimmen Sie die Gleichung von g.

a) Eine Gerade g verläuft durch die Punkte $A(1|-4{,}5)$ und $B(-2|1{,}2)$.

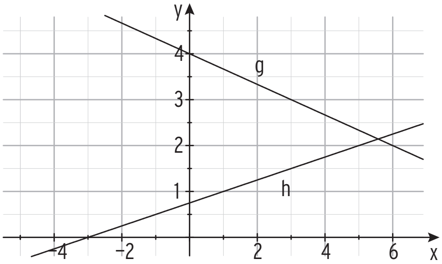
b) Eine Gerade g verläuft parallel zur 1. Winkelhalbierenden und durch $C(-1|5)$

c) Eine Gerade g verläuft senkrecht zu h: $y = 2x$ und durch $D(4|-1)$

d) Die Gerade h mit $y = -3x$ wird um 2 nach oben und um 3 nach links verschoben. Dadurch entsteht die Gerade g.

3

a) Bestimmen Sie die Geradengleichungen



b) Interpretieren Sie die Wertetabelle.

X	Y1
-1	3.5
1	2.5
4	1
6	0.5

4 Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = \frac{7}{12}x + 1$ und g mit $g(x) = -x - 1$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die exakte Nullstelle von f. Unter welchem Winkel schneidet das Schaubild von f die x-Achse?

b) Für welche x-Werte gilt: $f(x) < g(x)$?

5 Die Gerade K_f ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 3 - \frac{3}{4}x$; $x \in \mathbb{R}$.
K_f wird an der y-Achse gespiegelt und es entsteht K_g.
Jan behauptet: K_g schneidet K_f senkrecht. Nehmen Sie Stellung.

6 Herr Krug ist Vertreter der Europa-Versicherungen. Er erhält von seinem Chef ein monatliches Grundgehalt von 2200 € und eine Provision von 5 % der abgeschlossenen Versicherungssumme.
Stellen Sie die Funktion g: Versicherungssumme $\mapsto$ Gehalt in einem geeigneten Koordinatensystem dar.
Interpretieren Sie $g(120\,000)$ und $g(x) = 3500$ im Sachkontext.

2.2 Quadratische Funktionen

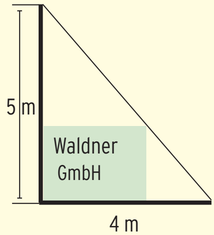
Modellierung einer Situation

Die Firma Waldner stellt unter anderem ein medizinisches Gerät her.
Die Herstellungskosten sind in der Tabelle aufgelistet.

Menge in Stück	10	30	40
Herstellungskosten K (x) in 1000 €	18,25	98,75	169

Eine Marktuntersuchung ergibt einen mittleren Verkaufspreis von 2425 € pro Stück.
Überraschend meldet sich ein chinesischer Konkurrent mit einem vergleichbar leistungsfähigen Gerät auf dem Markt und bietet das Gerät für 1825 € an.
Die Geschäftsleitung erwartet von Ihnen eine fundierte Analyse der Situation und Aufschluss über die Produktionszahl.

Ein weiteres Anliegen der Geschäftsleitung ist es, den Eingang der Produktionshalle mit einem rechteckigen Firmenschild zu versehen.
Dies soll möglichst groß in eine dreiecksförmige Fläche (siehe Skizze) eingepasst werden.
Ein Betrag von 4000 € ist eingeplant.
Reicht der Betrag aus, wenn das Schild pro m^2 900 € kostet?



Bearbeiten Sie diese Situation, nachdem Sie die rechts aufgeführten **Qualifikationen und Kompetenzen** erworben haben.

Qualifikationen & Kompetenzen

- Realitätsbezogene Zusammenhänge mit quadratischen Funktionen beschreiben, darstellen und deuten
- Schnittpunkte berechnen
- Lineare Gleichungssysteme lösen
- Bedeutung der Koordinaten erfassen

2.2.1 Einführungsbeispiel

Beispiel

Das Gestüt Allgäu will eine rechteckige Pferdekoppel einzäunen. Es hat 150 m Zaunmaterial zur Verfügung, um eine möglichst große Fläche einzuzäunen.

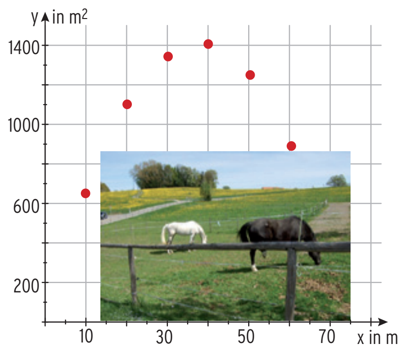
Lösung

- **Reale Situation**
  Pferdekoppel einzäunen bei vorgegebener Zaunlänge.

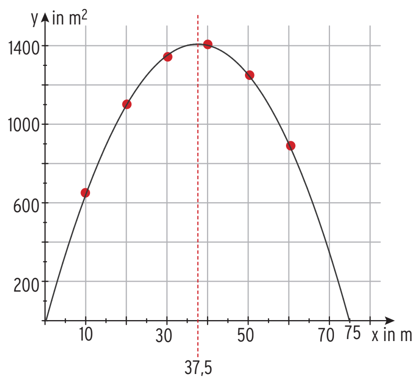
- **Reales Modell**
  Man berechnet den Flächeninhalt verschiedener Rechtecke mit den Seiten a und b.
  Seitenlängen (in m): Flächeninhalt (in m^2):

$a + b = 75$	$A = a \cdot b$
$a = 10;\ \ b = 65$	$A = 650$
$a = 20;\ \ b = 55$	$A = 1100$
$a = 30;\ \ b = 45$	$A = 1350$
$a = 40;\ \ b = 35$	$A = 1400$
$a = 50;\ \ b = 25$	$A = 1250$

  Punkte in ein Koordinatensystem eintragen.
  Die Punkte könnten auf einer Parabel liegen.



- **Mathematisches Modell**
  Parabelgleichung bestimmen
  Es gilt: $a + b = 75 \Rightarrow b = 75 - a$
  Durch Einsetzen erhält man den **Flächeninhalt**
  $A(a) = a \cdot (75 - a) = 75a - a^2$.
  Die Variable a kann alle reellen Zahlen von 0 bis 75 annehmen.
  Verbindet man die Punkte, so erhält man das Schaubild der quadratischen Funktion A mit $A(x) = 75x - x^2;\ \ 0 \le x \le 75$.



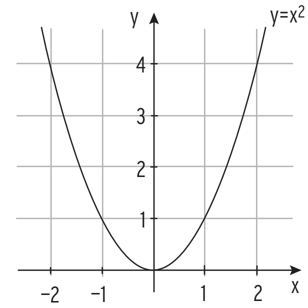
- **Mathematische Lösung**
  Maximaler Flächeninhalt:
  Symmetrieachse: $x = \frac{75}{2} = 37{,}5$ $\qquad A_{max} = A(37{,}5) = 1406{,}25$
  Der größte Flächeninhalt von 1406,25 m^2 wird erreicht bei einem Quadrat mit der Seitenlänge 37,5 m.

Bemerkung:

1. Das Rechteck mit größtem Flächeninhalt ist ein Quadrat.
2. Betrachtet man die **Funktion** A mit $A(x) = 75x - x^2;\ \ x \in \mathbb{R}$, lässt also alle x-Werte zu ($x \in \mathbb{R}$), nennt man das zugehörige Schaubild von A eine Parabel.

2.2.2 Von der Normalparabel zur allgemeinen Parabel

Normalparabel



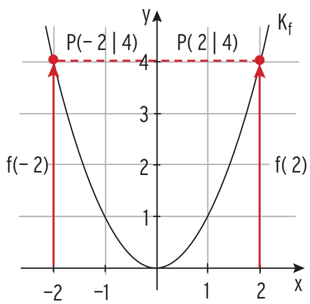
Das Schaubild K_f der Funktion f mit $f(x) = x^2$; $x \in \mathbb{R}$,
ist eine „gekrümmte Kurve“.
Man nennt diese Kurve **Normalparabel.**

$y = x^2$ ist die Gleichung der Normalparabel.

Eigenschaften

- **Globales Verhalten**
  K_f verläuft vom 2. in das 1. Feld.
  Für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to \infty$.
  Für $x \to \infty$ gilt: $f(x) \to \infty$.
  Kurzschreibweise: Für $x \to \pm\infty$ gilt: $f(x) \to \infty$.

- **Symmetrie**
  Die Normalparabel ist **symmetrisch zur y-Achse**.
  Erläuterung der Symmetrie am Beispiel von
  K_f: $f(x) = x^2$.



Wertetabelle

x	−2	−1	0	1	2
f (x)	4	1	0	1	4

Man stellt fest: $f(-2) = f(2) = 4$
$f(-1) = f(1) = 1$

Für jeden Wert $x \in \mathbb{R}$ gilt: **$f(-x) = f(x)$.**
Das Schaubild K_f ist **symmetrisch zur y-Achse**.

Beachten Sie:

Gegeben ist eine Funktion f mit der Definitionsmenge D.
Gilt **$f(-x) = f(x)$** für alle $x \in D$, ist das Schaubild von f **symmetrisch zur y-Achse.**
Eine Funktion mit dieser Eigenschaft nennt man eine **gerade Funktion.**

- **Scheitelpunkt**
  Der Parabelpunkt mit dem **kleinsten** y-Wert liegt auf der **Symmetrieachse** und heißt **Scheitelpunkt** S (0 | 0).

5 Auf einer Teststrecke wird gemessen, wie viel Benzin ein PKW bei gleichbleibender Geschwindigkeit verbraucht. Dabei hängt der Benzinverbrauch f (in Liter pro 100 km) quadratisch von der Geschwindigkeit v $\left(\text{in } \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ ab:

$f(v) = a v^2 + b v + 7$

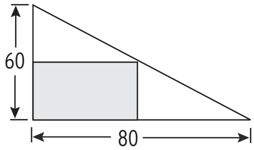
v	30	80
f (v)	6,25	7,0

Mit welchem Verbrauch ist bei durchschnittlich 120 km pro h zu rechnen?

6 Ein Zehnkämpfer stößt seine Kugel so, dass die Flugbahn durch folgenden Funktionsterm beschrieben werden kann: $f(x) = -0{,}059\,x^2 + 0{,}93\,x + 2;\;\; x \geq 0$.
Die Entfernung vom Wurfkreis wird durch x in Meter gemessen, die Funktionswerte geben die Höhe der Kugel in Meter an.
Berechnen Sie die Nullstelle von f.
Welche Bedeutung hat diese Nullstelle?
Welche größte Höhe erreicht die Kugel?

7 Eine Brückendurchfahrt ist 6,60 m hoch und 8 m breit.
Ein Fahrzeug ist 3 m breit und 4,80 m hoch.
Kann dieses Fahrzeug noch unter der Brücke hindurchfahren?

8 Auf einem dreieckigen Grundstück mit den Kantenlängen 60 m und 80 m soll ein möglichst großer rechteckiger Bauplatz abgesteckt werden.



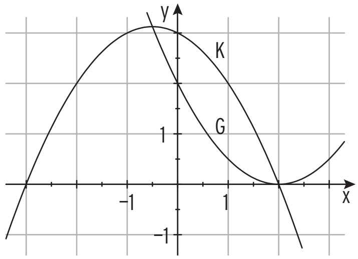
9 Eine Flüssigkeit wird auf 90 °C erhitzt.
Dann lässt man sie bei einer Umgebungstemperatur von 20 °C abkühlen.
Bei diesem Experiment erhält man folgende Messreihe:

Zeit t in Minuten	0	1	2	3	4	5	6	7
Temperatur in °C	90	58	40	31	26	22	22	21

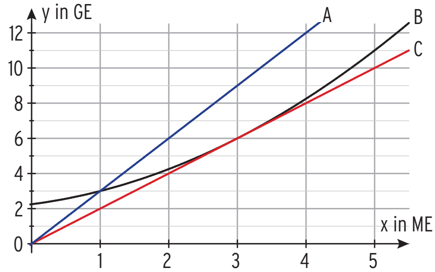
Stellen Sie die Messdaten in einem Koordinatensystem dar.
Bestimmen Sie eine Gleichung einer quadratischen Regressionskurve und zeichnen Sie die Kurve in das Koordinatensystem ein.
Beurteilen Sie die Regressionskurve.

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

1 Bestimmen Sie die Parabelgleichungen aus der Abbildung.



2 Interpretieren Sie die Abbildung.
Prüfen Sie Ihre Vermutungen rechnerisch nach, wenn die Kurve B die y-Achse in 2,25 schneidet.



3 K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)(6 - 3x);\ x \in \mathbb{R}$.
Berechnen Sie:

a) die Nullstellen von f.

b) die x-Werte, für die gilt: $f(x) < 3$.

c) die Schnittpunkte von K mit dem Graph von g mit $g(x) = x^2 - 1$.

4 Berechnen Sie die exakten Lösungen.

a) $2x^2 + 2x = 24$ b) $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = 0$ c) $0 = 2x - \frac{1}{3}x^2$

5 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2 - 1$ wird mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung gestreckt und danach um 3 nach links verschoben.
Wie lautet die Parabelgleichung?
Lassen sich die Schnittpunkte der neuen Parabel mit der x-Achse ohne Rechnung bestimmen?

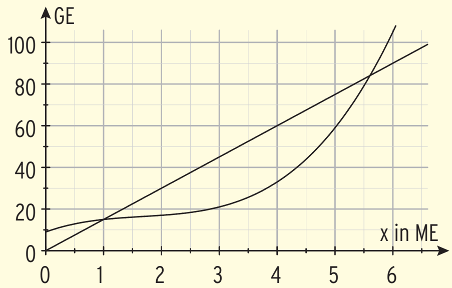
2.3 Polynomfunktionen höheren Grades

Modellierung einer Situation

Der Markt für Verpackungsmaschinen ist im Umbruch. Die Nachfrage ist gestiegen und Konkurrenz aus dem Ausland drängt auf den Markt.
Die Geschäftsleitung der Firma Waldner Verpackungstechnik will die Kosten- und die Gewinnsituation untersuchen lassen. Die Gesamtkosten des Topmodells PACK2 der letzten Produktionsperiode sind in der Tabelle aufgelistet.

Menge in ME	0	2	4	6
Gesamtkosten K (x) in GE	9	17	33	105

Bei einem verkauften Modell werden alle Kosten gedeckt.
Die Geschäftsleitung will wissen, zu welchem Preis das Topmodell verkauft wird.
Prüfen Sie, ob die Gewinnzone bei 1 ME beginnt und etwa bei 5,6 ME endet.
Die Abbildung zeigt den Graph der Gesamtkostenfunktion K mit
$K(x) = x^3 - 5x^2 + 10x + 9;\ x \geq 0;\ x$ in ME
und die Erlösgerade mit $E(x) = 15x$.



Aufgrund hohen Konkurrenzdrucks will die Geschäftsleitung wissen, ob der Marktpreis auf 7 GE/ME gesenkt werden kann, um keine Verluste zu machen. Zeigen Sie, die notwendige Berechnung führt auf $(x-3)^2(x+1) = 0$

Wie viele Modelle sollten dann produziert und verkauft werden?
Erläutern Sie diese Situation mithilfe der Abbildung.

Bearbeiten Sie diese Situation, nachdem Sie die rechts aufgeführten **Qualifikationen und Kompetenzen** erworben haben.

Qualifikationen & Kompetenzen

- Realitätsbezogene Zusammenhänge mit Polynomfunktionen mathematisch modellieren
- mathematisch argumentieren
- Polynomgleichungen lösen
- Die mathematische Fachsprache verwenden

2.3.1 Potenzfunktionen

In der Geometrie und der Physik kommen Formeln der unterschiedlichsten Art vor.

Geometrie: Flächeninhalt eines Quadrates $A = a^2$; Volumen eines Würfels $V = a^3$

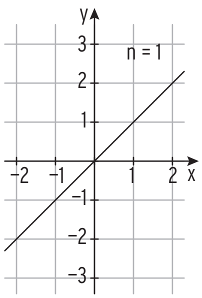
Beispiele aus der Physik	Formel	Mathematische Form
Beschleunigte Bewegung:	$v = a \cdot t$	$f(x) = a \cdot x$
Kinetische Energie:	$W = \frac{m}{2} \cdot v^2$	$f(x) = b \cdot x^2$
Gravitationsgesetz:	$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$	$f(x) = c \cdot x^{-2}$
Fallzeit beim freien Fall:	$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \left(\frac{2s}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$	$f(x) = d \cdot x^{\frac{1}{2}}$

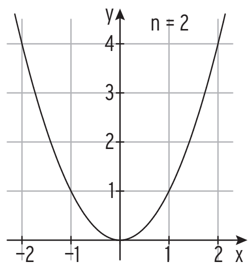
Beachten Sie:

Eine Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^r$ mit $x \in D$; $r \in \mathbb{Q}$, ist eine **Potenzfunktion**.
$\mathbb{Q}$ ist die Menge aller **Bruchzahlen**.

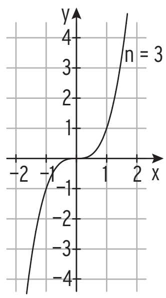
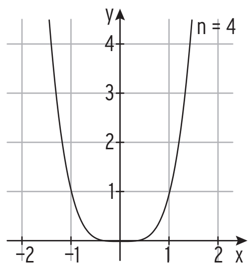
Beispiele für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten

f mit $f(x) = x^n$; $x \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$
Bekannt sind:
$n = 1$: $f(x) = x$; $x \in \mathbb{R}$
Ursprungsgerade: $y = x$
$n = 2$: $f(x) = x^2$; $x \in \mathbb{R}$
Normalparabel: $y = x^2$





Neu:

	$n = 3$: $f(x) = x^3$; $x \in \mathbb{R}$	$n = 4$: $f(x) = x^4$; $x \in \mathbb{R}$
Schaubild von f		
Globaler Verlauf	vom III. in I. Quadranten	vom II. in I. Quadranten
Symmetrie	zum Ursprung	zur y-Achse

Hinweis: Potenzfunktionen mit Exponenten **nicht** aus $\mathbb{N}$ werden im Kapitel „Umkehrfunktion“ behandelt.

Aufgaben

1 Skizzieren Sie den Graph der Potenzfunktion.

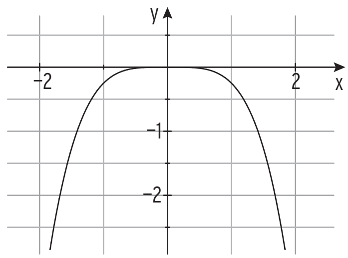
a) $f(x) = -x^3$ **b)** $g(x) = 0,5x^4$ **c)** $h(x) = -x^5$ **d)** $k(x) = -\frac{1}{2}x^2$

Beschreiben Sie Eigenschaften des Graphen.
Wie ändert sich der Funktionswert, wenn sich der x-Wert verdoppelt (verdreifacht)?

2 Das Schaubild K von f mit $f(x) = a\,x^n$ verläuft durch die Punkte $A(2|1)$ und $B(1|0{,}125)$. Bestimmen Sie den Funktionsterm.

3 Das Schaubild K von f mit $f(x) = a\,x^b$ verläuft durch die Punkte $A(2|1)$ und $B\left(1\middle|\frac{1}{4}\right)$. Bestimmen Sie den Funktionsterm. Für welche x-Werte ist $f(x) < \frac{1}{10}$?

4 Gegeben ist das Schaubild der Potenzfunktion f mit $f(x) = a\,x^n$; $n \in \mathbb{N}$.
Welche Aussagen lassen sich über a und n machen?



5 In einem Lexikon steht: Der Durchmesser d eines Atomkerns hängt im Wesentlichen von der Anzahl A der Nukleonen (Protonen und Neutronen) ab. Wenn man sich den Atomkern als mehr oder weniger kugelförmigen Haufen aus Protonen und Neutronen vorstellt, kann man die folgende Näherungsformel für d (in m) verwenden: $d = 2{,}4 \cdot 10^{-15} \cdot \sqrt[3]{A}$.
Ein Aluminiumkern hat 13 Protonen und 14 Neutronen.
Wie groß ist sein Durchmesser in Millimeter?

6 Aus einem Draht der Länge L soll das Gittermodell eines Würfels geformt werden.

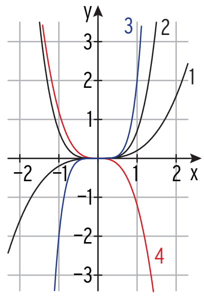
a) Geben Sie das Volumen V eines Würfels in Abhängigkeit von L an.
Stellen Sie den funktionalen Zusammenhang grafisch dar.

b) Welche Beziehung besteht zwischen L und der Oberfläche des Würfels?

7 Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}$.
Für welches n liegt der Punkt P auf dem Schaubild von f?

a) $P(0{,}5|0{,}125)$ **b)** $P(-2|16)$ **c)** $P(-3|-27)$

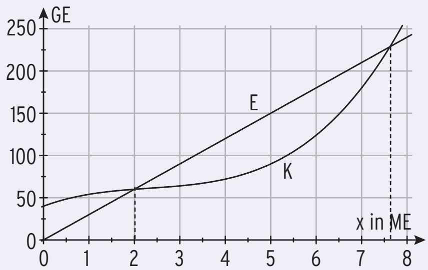
8 Ordnen Sie die Schaubilder 1 bis 4 aus der nebenstehenden Abbildung den folgenden Funktionstermen zu.
Überprüfen Sie Ihre Entscheidung.
$f(x) = 0{,}2\,x^3$
$g(x) = -1{,}2\,x^3$
$h(x) = 0{,}7\,x^4$
$k(x) = 2\,x^5$.



2.3.2 Polynomfunktionen 3. Grades – Einführung

Beispiel

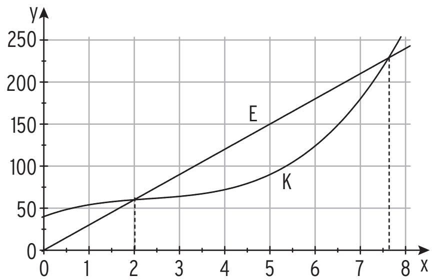
Die Abbildung zeigt den Graphen der Gesamtkostenfunktion K mit
$K(x) = x^3 - 7x^2 + 20x + 40;\ x \geq 0;\ x$ in ME
und die Erlösgerade.



a) Beschreiben Sie den Verlauf der Gesamtkostenkurve.
Wie hoch ist der Verkaufspreis?

b) Begründen Sie, warum bei einer Produktion von 1 ME das Unternehmen keinen Gewinn macht. Geben Sie die Gewinnzone an.

Lösung



a) **Verlauf:** K verläuft im 1. Quadranten,
K schneidet die y-Achse in 40, d. h., die Fixkosten betragen 40 GE.
Die Gesamtkostenkurve ist wachsend.
Wegen $K(2) = E(2) = 60$ folgt $p = 30$
und mit $E(x) = p \cdot x$: $E(x) = 30x$

b) **Erlösfunktion** E mit $E(x) = 30x$
Wegen $K(1) = 54$ und $E(1) = 30$
ist $G(1) = E(1) - K(1) = -24$.
d. h., das Unternehmen macht in $x = 1$ einen Verlust. **Kein Gewinn bei $x = 1$.**

Gewinnzone

Bedingung für die Grenzen: $E(x) = K(x)$
Durch Ablesen: $x_1 = x_{GS} = 2;\ x_2 = x_{GG} \approx 7{,}6$
Die Gewinnzone erstreckt sich von 2 ME bis 7,6 ME.

Hinweis: Hier bietet sich der Einsatz eines (zusätzlichen) elektronischen Hilfsmittels an.
Stichwort: Schnittstelle

Beachten Sie:

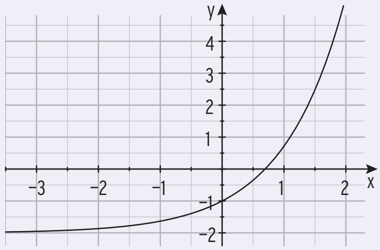
Eine **Polynomfunktion** f 3. Grades ist gegeben durch
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ x \in \mathbb{R};\ a \neq 0$.
a, b, c und d heißen Koeffizienten.
Der maximale Definitionsbereich von f ist $D = \mathbb{R}$.

$ax^3 + bx^2 + cx + d$ ist ein **Polynom 3. Grades**.
Polynomfunktionen werden auch als **ganzrationale Funktionen** bezeichnet.

3.5 Schaubilder von Exponentialfunktionen

Beispiel

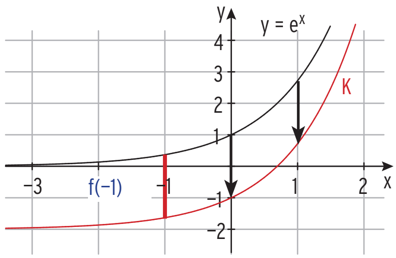
➡ Gegeben ist das Schaubild K der Funktion f mit $f(x) = e^x - 2$; $x \in \mathbb{R}$.
Wie verläuft K? Kennzeichnen Sie $f(-1)$.
Ist die Nullstelle von f kleiner als 0,7?
Wie entsteht das Schaubild G von g mit $g(x) = f(x+1)$ aus K?



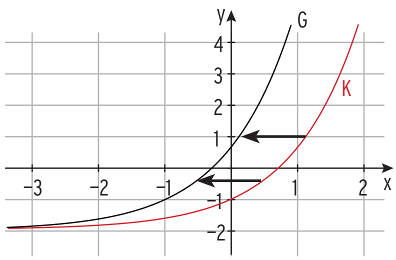
Lösung

Verlauf von K:

- K verläuft vom 3. in das 1. Feld.
- K nähert sich für $x \to -\infty$ der Geraden mit $y = -2$ an **(waagrechte Asymptote).**
- K ist steigend, f ist (streng) monoton wachsend.
- $SP_y(0\,|\,-1)$



Hinweis: Der Graph H von h mit $h(x) = e^x$ (Asymptote: $y = 0$) wird um 2 nach unten **verschoben** und man erhält K (Asymptote: $y = -2$).
$f(0{,}7) = 0{,}013... > 0$
Die Nullstelle von f ist kleiner als 0,7
$g(x) = f(x+1) = e^{x+1} - 2$; K wird um 1 **nach links verschoben.**

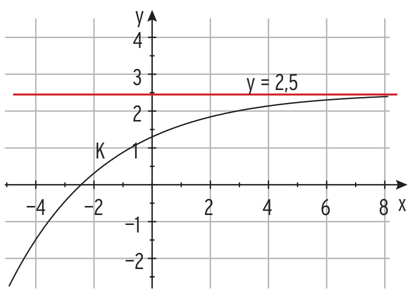


Beispiel

➡ Gegeben ist die Exponentialfunktion f mit $f(x) = -1{,}2\,e^{-0{,}3x} + 2{,}5$; $x \in \mathbb{R}$.
Skizzieren Sie K. Beschreiben Sie den Verlauf von K.
Wo schneidet das Schaubild K von f die Koordinatenachsen?

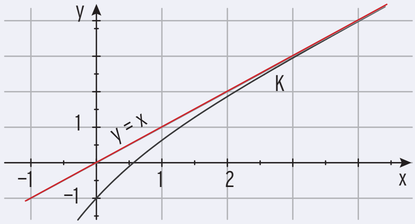
Lösung

K verläuft vom 3. in das 1. Feld. K nähert sich für $x \to \infty$ der Geraden mit $y = 2{,}5$ an **(waagrechte Asymptote).**
K ist steigend.
$f(0) = 1{,}3$; $SP_y(0\,|\,1{,}3)$
Nullstelle $x_N \approx -2{,}5$; $SP_x(-2{,}5\,|\,0)$



Beispiel

➲ Die Abbildung zeigt den Graph K von f mit $f(x) = x - e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$ und die Gerade g mit $y = x$. Beschreiben Sie den Verlauf von K. Begründen Sie: K verläuft stets unterhalb von g. Zeigen Sie: Die Nullstelle von f liegt zwischen 0,56 und 0,57.



Lösung

Verlauf von K: • vom 3. in das 1. Feld • monoton steigend • $S_y(0\,|\,-1)$

• nähert sich für $x \to \infty$ der Geraden mit $y = x$ an **(schiefe Asymptote: $y = x$)**

K verläuft stets **unterhalb der Geraden**, da $e^{-x} > 0$ ist und damit $f(x) < x$ gilt für alle x.

Nullstelle: $f(0{,}56) = -0{,}011...$; $f(0{,}57) = 0{,}0047...$

f(x) wechselt das Vorzeichen zwischen 0,56 und 0,57, also liegt (mindestens) eine Nullstelle auf diesem Bereich. Aus der Zeichnung: K verläuft **oberhalb der x-Achse** für $x > 0{,}57$.

Beachten Sie:

Für $x \to \infty$ strebt $e^{-x} \to 0$

d. h., setzt man in $f(x) = x - e^{-x}$ und $y = x$ immer größere x-Werte ein, unterscheiden sich die errechneten Werte immer weniger, da $e^{-x} \to 0$ strebt: $f(x) \approx x$ für $x \to \infty$.

Die **schiefe Asymptote hat die Gleichung** $y = x$.

x	$y = x - e^{-x}$	$y = x$
1	0.6321	1
5	4.9932	5
10	9.9999	10
50	50	50

Beispiel

➲ Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = (x - 2)e^x$; $x \in \mathbb{R}$.
Beschreiben Sie den Verlauf des Schaubildes K von f.

Lösung

Achsenschnittpunkte: $N(2\,|\,0)$; $S_y(0\,|\,-2)$.

Verhalten von f(x) für $x \to -\infty$:

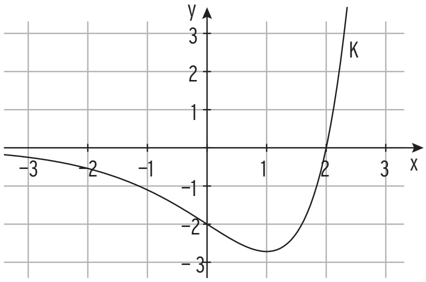
Anhand der Wertetabelle erkennt man, dass das Produkt $(x - 2)e^x$ gegen null strebt.

X	F(X)
−40	$-1 \cdot 10^{-16}$
−30	$-2 \cdot 10^{-12}$
−20	$-4 \cdot 10^{-8}$
−10	$-5 \cdot 10^{-4}$
0	−2

Hinweis:

$-5\,E-4$ bedeutet:

$-5 \cdot 10^{-4} = -0{,}0005$



Beachten Sie:

Für $x \to -\infty$ strebt e^x „schneller“ gegen null als $(x - 2)$ gegen $-\infty$,
damit gilt: $f(x) = (x - 2)e^x \to 0$. Die **waagrechte Asymptote** hat die Gleichung $y = 0$.

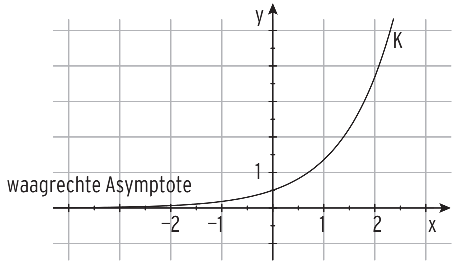
Asymptoten bei Schaubildern von Exponentialfunktionen

K: $f(x) = 0{,}5\,e^{x}$

$e^{x} \to 0$ für $x \to -\infty$

K hat eine **waagrechte Asymptote:**

y = 0 (x-Achse)

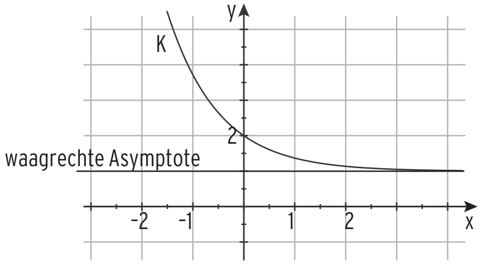


K: $f(x) = e^{-x} + 1$

$e^{-x} \to 0$ für $x \to \infty$

K hat eine **waagrechte Asymptote:**

y = 1

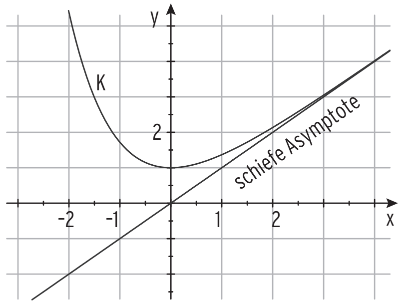


K: $f(x) = e^{-x} + x$

$e^{-x} \to 0$ für $x \to \infty$

K hat eine **schiefe Asymptote:**

y = x



Beachten Sie:

Wegen $e^{ax} \to 0$; $a \neq 0$, für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ hat das Schaubild von f mit $f(x) = e^{ax} + bx + c$ die Asymptote mit der Gleichung $y = bx + c$.

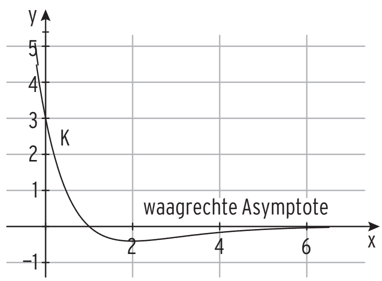
K: $f(x) = 3(1 - x)\,e^{-x}$

Für $x \to \infty$ strebt e^{-x} schneller gegen null als $3(1 - x)$ gegen $-\infty$.

$f(x) = (1 - x)e^{-x} \to 0$ für $x \to \infty$.

K hat eine **waagrechte Asymptote:**

y = 0 (x-Achse)



Aufgaben

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2e^x$; $x \in \mathbb{R}$.
Skizzieren Sie das Schaubild K von f. Wie verläuft K?
Kennzeichnen Sie $f(-1)$. Wo schneidet K die y-Achse?
Begründen Sie, warum K keine gemeinsamen Punkte mit der x-Achse hat.
Formulieren Sie einen Zusammenhang von $f(x)$ und $f(x+1)$.
Wie verändert sich der Funktionswert, wenn man x um 1 verkleinert?

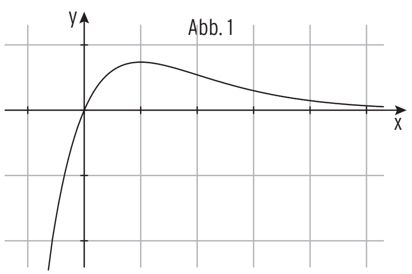
2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 - e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen K von f.
Zeigen Sie, die Nullstelle von f liegt zwischen $-0{,}69$ und $-0{,}70$.
Wie entsteht K von f aus dem Graphen von g mit $g(x) = e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$?

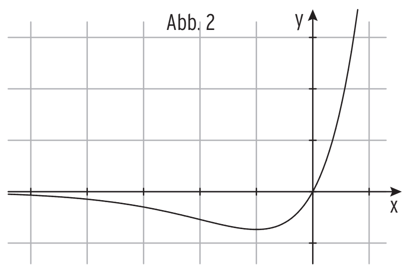
3 K ist das Schaubild der Funkion f mit $f(x) = (2x - 1)e^x$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie K. Beschreiben Sie den Verlauf von K.

b) Für $x < -4{,}50$ haben die zugehörigen Kurvenpunkte einen Abstand von der x-Achse, der kleiner als $\frac{1}{10}$ ist. Überprüfen Sie diese Behauptung.

4 Die Schaubilder gehören zu einer Funktion vom Typ $f(x) = a\,x\,e^{bx}$.
Welche Aussagen lassen sich über a und b machen?





5 Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = (1 - 3x)e^{-0{,}5x}$ und $g(x) = 2e^{-x} + 1$; $x \in \mathbb{R}$ mit den Schaubildern K_f und K_g.
Die Gerade mit der Gleichung $x = 0{,}5$ schneidet K_f im Punkt P und K_g im Punkt Q.
Berechnen Sie die Länge der Strecke PQ.

6 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 - e^{2x}$ und die Funktion g mit $g(x) = e^{-2x}$; $x \in \mathbb{R}$.

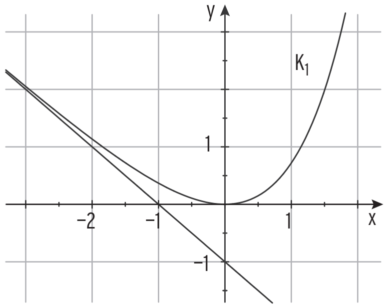
a) Zeichnen Sie die Schaubilder der beiden Funktionen.

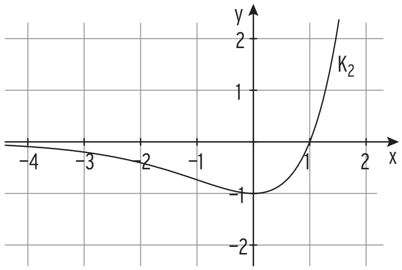
b) Lösen Sie die Gleichungen $f(x) = 0{,}5$; $g(x) = 4$ und $f(x) = g(x)$.
Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

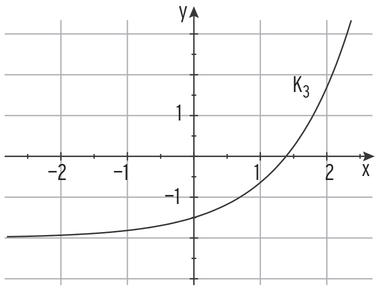
7 Welches Schaubild gehört zu welcher Funktion? Begründen Sie Ihre Wahl.

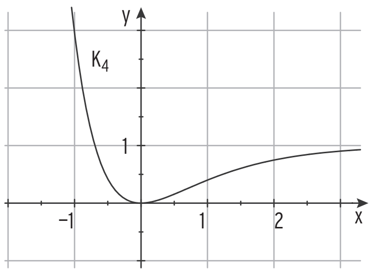
A: $f(x) = 0{,}5\,e^{x} - 2$; B: $f(x) = (x - 1)\,e^{x}$; C: $f(x) = 0{,}5\,x + e^{-x}$;

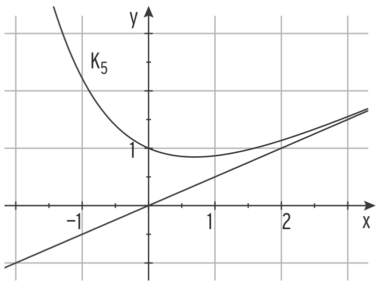
D: $f(x) = (e^{-x} - 1)^2$; E: $f(x) = e^{-x} + 2$; F: $f(x) = e^{x} - x - 1$

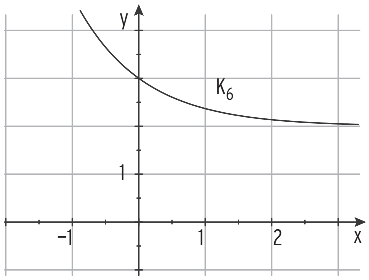




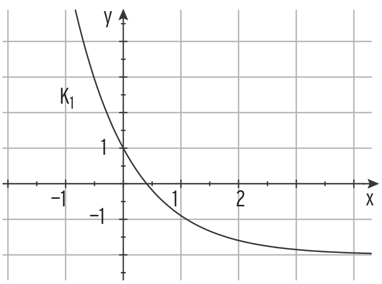


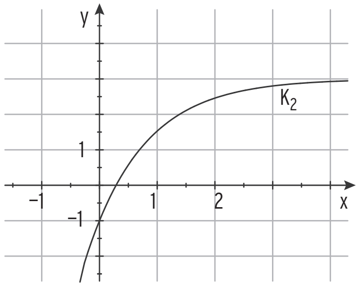






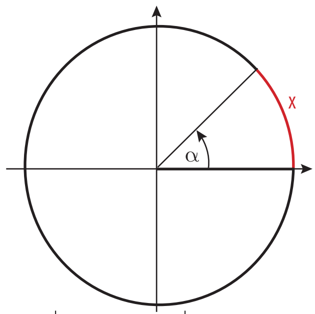
8 Die Schaubilder gehören zu einer Funktion vom Typ $f(x) = a\,e^{-x} + b$.
Bestimmen Sie a und b und begründen Sie Ihre Wahl.





4.2.3 Das Bogenmaß eines Winkels

Der **Winkel** α wird in der Einheit **Grad** angegeben, z. B. $\alpha = 45°$. Ein anderes Winkelmaß ist das **Bogenmaß**. Die Größe eines Winkels wird durch die **Länge** des entsprechenden **Bogens im Einheitskreis** gemessen. Man ordnet dem Winkel 360° den Umfang des Einheitskreises $U = 2 \cdot \pi \cdot 1 = 2\pi$ zu, d. h., $360° \mathrel{\hat{=}} 2\pi = 6{,}28$ zu.



Beispiele für die Zuordnung von Winkel und Bogenlänge:

Winkel α in Grad	180°	90°	60°	45°	30°
Maßzahl der Bogenlänge x (x ist eine reelle Zahl)	$\pi = 3{,}14$	$\frac{\pi}{2} = 1{,}57$	$\frac{\pi}{3} = 1{,}05$	$\frac{\pi}{4} = 0{,}79$	$\frac{\pi}{6} = 0{,}52$

Beachten Sie

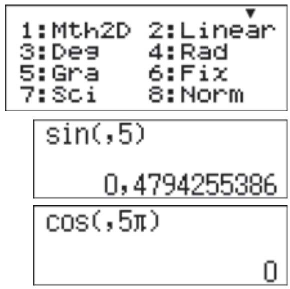
Jedem Winkel α lässt sich eindeutig eine reelle Zahl x zuordnen (x im Bogenmaß).

Umrechnungsformel: $\frac{2\pi}{360°} = \frac{x}{\alpha}$ ergibt $x = \frac{\pi\alpha}{180°}$ oder $\alpha = \frac{x \cdot 180°}{\pi}$

Beispiele

Gradmaß $\alpha = 36{,}7°$ $\Leftrightarrow$ Bogenmaß $x = \frac{36{,}7° \cdot \pi}{180°} = 0{,}64$

Bogenmaß $x = \frac{\pi}{10}$ $\Leftrightarrow$ Gradmaß $\alpha = \frac{\pi \cdot 180°}{10\pi} = 18°$



Berechnung mit dem TR:

$\sin(0{,}5) = 0{,}48$ $\qquad$ $\cos(0{,}5\pi) = 0$

$\sin(-2{,}5) = -0{,}60$ $\qquad$ $\cos(\pi) + 1 = 0$

Beachten Sie

Ist der Winkel im
- **Gradmaß (α)** gegeben, rechnet man im **Modus DEG**,
- **Bogenmaß (x)** gegeben, rechnet man im **Modus RAD**.

Aufgaben

1 Welcher Winkel α gehört zum Bogenmaß x oder umgekehrt?

a) $x = 1{,}5$ b) $\alpha = 45°$ c) $x = 3$ d) $\alpha = 120°$ e) $x = -1$

2 Bestimmen Sie.

a) $\sin(1{,}8)$ b) $\cos(0{,}9)$ c) $\sin(3{,}14)$ d) $\cos(1{,}57)$ e) $\sin(-1{,}57)$

3 Kennzeichnen Sie am Einheitskreis.

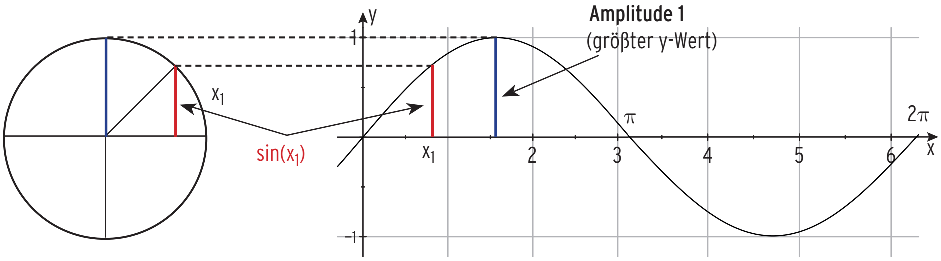
a) $x = 1$ und $\sin(1)$ b) $x = 4$ und $\cos(4)$ c) $x = -0{,}5$ und $\sin(-0{,}5)$

4 Schätzen Sie ab: $\sin(1{,}5°)$ und $\sin(1{,}5)$. Erklären Sie Ihr Ergebnis.

4.3 Trigonometrische Funktionen

4.3.1 Sinus- und Kosinusfunktion

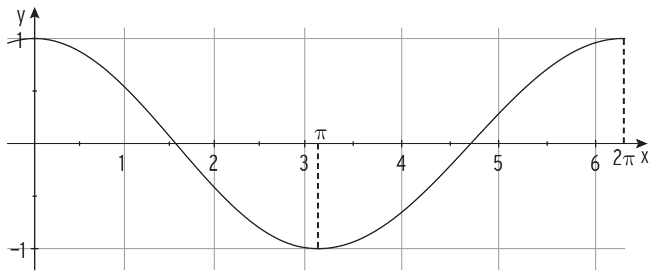
Die Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$; $x \in \mathbb{R}$, heißt **Sinusfunktion.**
Schaubild **(Sinuskurve)**



Die Funktion g mit $g(x) = \cos(x)$; $x \in \mathbb{R}$, heißt **Kosinusfunktion.**
Schaubild **(Kosinuskurve)**

Wertetabelle
(Schrittweite 1):

X	F(X)
−1	0,5403
0	1
1	0,5403
2	−0,416
3	−0,989



Beachten Sie die folgenden Eigenschaften von Sinus- und Kosinusfunktion:

1) **Wertebereich:** $W = [-1; 1]$ d. h.: $-1 \le \sin(x) \le 1$ bzw. $-1 \le \cos(x) \le 1$
Sinus- und Kosinusfunktion haben die **Amplitude 1**.

2) **Periodizität:** Wegen $\sin(x) = \sin(x \pm 2\pi)$ bzw. $\cos(x) = \cos(x \pm 2\pi)$ gilt:
Sinus- und Kosinusfunktion haben die **Periode 2π.**

3) **Nullstellen** von f mit $f(x) = \sin(x)$; $x \in \mathbb{R}$
Bedingung: $f(x) = 0$ — $\sin(x) = 0$ für $x = 0;\ \pm\pi;\ \pm 2\pi;\ \ldots$
Nullstellen von f: $x_1 = 0;\ x_{2|3} = \pm\pi;\ x_{4|5} = \pm 2\pi;\ \ldots$
allgemein: $x_k = k \cdot \pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Nullstellen von g mit $g(x) = \cos(x)$; $x \in \mathbb{R}$
Bedingung: $g(x) = 0$ — $\cos(x) = 0$ für $x = \pm\frac{\pi}{2};\ \pm\frac{3}{2}\pi;\ \ldots$
Nullstellen von g: $x_{1|2} = \pm\frac{\pi}{2};\ x_{3|4} = \pm\frac{3}{2}\pi;\ x_{5|6} = \pm\frac{5}{2}\pi;\ \ldots$
allgemein: $x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi;\ k \in \mathbb{Z}$

4.3.2 Funktionen der Form $f(x) = a\sin(x) + d$ bzw. $f(x) = a\cos(x) + d$

Beispiel

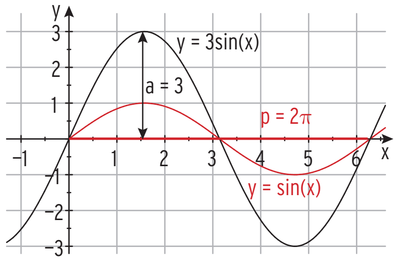
➡ Gegeben ist die Funktion f für $x \in \mathbb{R}$.
Wie entsteht das Schaubild K von f aus der Sinuskurve?
Bestimmen Sie die Amplitude und den Wertebereich von f und zeichnen Sie K.

a) $f(x) = 3\sin(x)$ b) $f(x) = \cos(x) + 2$ c) $f(x) = 0{,}5\sin(x) - 1$

Lösung

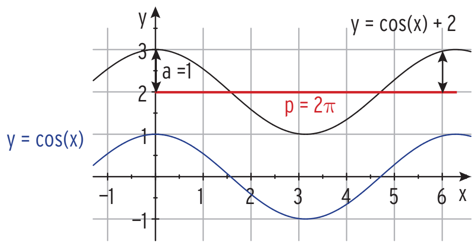
a) $f(x) = 3\sin(x)$
Die Sinuskurve $(y = \sin(x))$
wird mit Faktor 3 in y-Richtung gestreckt.
Amplitude (größter „Ausschlag") $a = 3$
Periode $p = 2\pi$
Wertebereich $W = [-3; 3]$

Hinweis: Nullstellen von f: $x_k = k \cdot \pi$; $k \in \mathbb{Z}$



b) $f(x) = \cos(x) + 2$
Die Kosinuskurve $(y = \cos(x))$ wird
um 2 nach oben verschoben.
Amplitude $a = 1$; Periode $p = 2\pi$
Wertebereich: [1; 3]

Hinweis: Keine Nullstelle von f, da
$-1 \leq \cos(x) \leq 1$

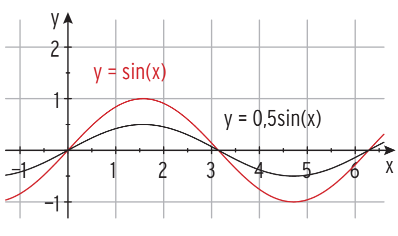


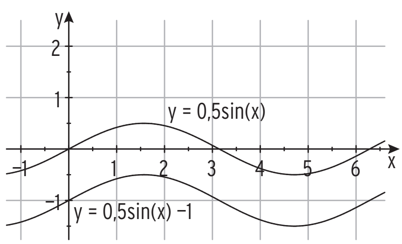
Beachten Sie:

Die **Amplitude** a ist die halbe y-Differenz des höchsten und des tiefsten Punktes:
$a = 0{,}5\,(y_H - y_T)$.

c) Die Sinuskurve wird mit Faktor 0,5 in y-Richtung gestreckt:
$g(x) = 0{,}5\sin(x)$ mit Amplitude $a = 0{,}5$.
Der Graph von g mit $g(x) = 0{,}5\sin(x)$ wird um 1 nach unten verschoben:
$f(x) = 0{,}5\sin(x) - 1$ mit Amplitude $a = 0{,}5$; Periode $p = 2\pi$ und
Wertebereich $W = \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$;

Hinweis: keine Nullstellen, da $-0{,}5 \leq 0{,}5\sin(x) \leq 0{,}5$.





Beispiel

Gegeben ist die Funktion f für $x \in \mathbb{R}$.
Wie entsteht das Schaubild K von f aus der Sinuskurve bzw. der Kosinuskurve?
Bestimmen Sie die Amplitude und den Wertebereich von f.

a) $f(x) = -2\sin(x)$ b) $f(x) = 2 + 3\cos(x)$

Lösung

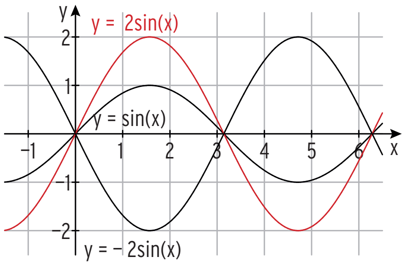
a) $f(x) = -2\sin(x)$

Die Sinuskurve $(y = \sin(x))$ wird an der x-Achse gespiegelt: $h(x) = -\sin(x)$

Der Graph von h mit $h(x) = -\sin(x)$ wird mit Faktor 2 in y-Richtung gestreckt:

$f(x) = -2\sin(x)$ mit Amplitude $|a| = 2$

$a = -2$, aber Amplitude $|a| = |-2| = 2$



Hinweis: Der Betrag von −2 ist die positive Zahl 2.

Wertebereich von f: [−2; 2]; Periode $p = 2\pi$

Hinweis: Nullstellen von f: $x_1 = 0$; $x_2 = \pm\pi$; $x_3 = \pm 2\pi$, also $x_k = k \cdot \pi$; $k \in \mathbb{Z}$

b) $f(x) = 2 + 3\cos(x)$

Die Kosinuskurve $(y = \cos(x))$ wird mit Faktor 3 in **y-Richtung gestreckt**:

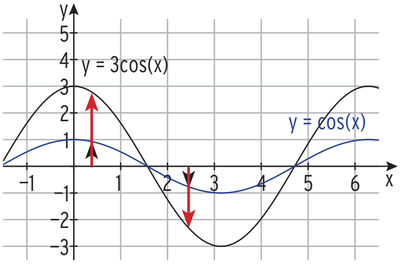
$h(x) = 3\cos(x)$

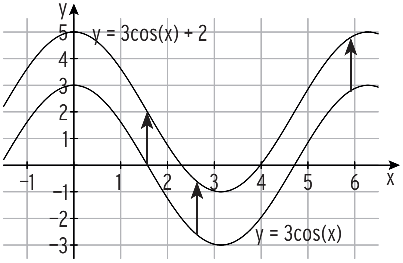
Der Graph von h mit $h(x) = 3\cos(x)$ wird um 2 nach oben verschoben:

$f(x) = 3\cos(x) + 2$

Amplitude $|a| = 3$; Periode $p = 2\pi$

Wertebereich: [1; 5]





Beachten Sie

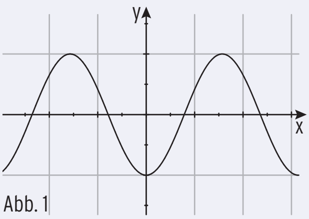
Der Graph K_g von g entsteht aus dem Graph K_f von f durch

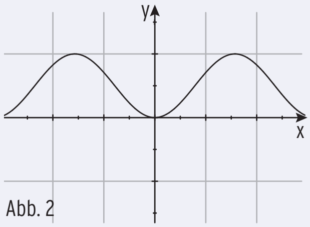
- **Spiegelung** an der x-Achse. Dann gilt: $g(x) = -f(x)$.
- **Verschiebung** in y-Richtung. Dann gilt: $g(x) = f(x) + d$.
- **Streckung** in y-Richtung. Dann gilt: $g(x) = a \cdot f(x)$; $a > 0$.

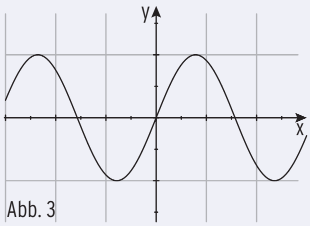
Die trigonometrische Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(x) + b$ bzw. $f(x) = a \cdot \cos(x) + b$; $a \neq 0$ hat die **Amplitude** $|a|$ und die **Periode** $p = 2\pi$.

Beispiel

➲ Das Schaubild K_f einer Funktion f mit der Gleichung $y = -2\sin(x)$ entspricht keinem der dargestellten Schaubilder.
Begründen Sie obige Aussage, indem Sie je eine Eigenschaft der Schaubilder nennen, die mit den Funktionseigenschaften nicht vereinbar ist.





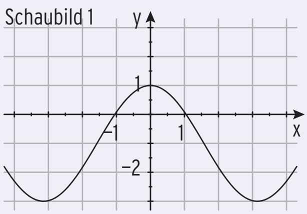


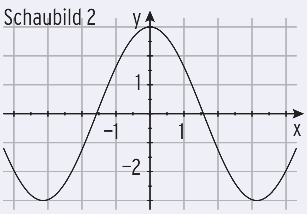
Lösung

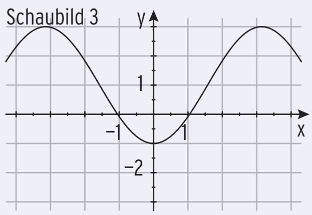
Eigenschaften von K_f: K_f schneidet die x-Achse im Ursprung O.
$f(x)$ wechselt in O das Vorzeichen von + nach −.
Schaubild 1 verläuft nicht durch den Koordinatenursprung.
Schaubild 2 berührt die x-Achse im Ursprung.
Schaubild 3: Die y-Werte der Kurvenpunkte wechseln bei O das Vorzeichen von − nach +.

Beispiel

➲ Das Schaubild einer Funktion f mit $f(x) = a\cos(x) + b$ ist dargestellt.
Bestimmen Sie den Funktionsterm aus der Abbildung.







Lösung

Alle Schaubilder haben die Periode $p = 2\pi$.

Schaubild 1 hat die **Amplitude** $a = 2$ und K: $y = 2\cos(x)$ ist um 1 in negativer y-Richtung verschoben worden. K_1: $f(x) = 2\cos(x) - 1$

Schaubild 2 hat die **Amplitude** $a = 3$ und K: $y = 3\cos(x)$ ist nicht in y-Richtung verschoben. K_2: $f(x) = 3\cos(x)$

Schaubild 3 hat die **Amplitude** $a = 2$ und K: $y = 2\cos(x)$ ist an der x-Achse gespiegelt und danach um 1 nach oben verschoben worden. K_3: $f(x) = -2\cos(x) + 1$

Oder: K_3 erhält man durch Spiegelung von K_1 an der x-Achse.

Aufgaben

1 Gegeben ist die Funktion f mit $x \in \mathbb{R}$.
Zeichnen Sie K im angegebenen Intervall.
Bestimmen Sie die Amplitude und den Wertebereich von f.
Wie entsteht K aus der Sinuskurve bzw. Kosinuskurve?

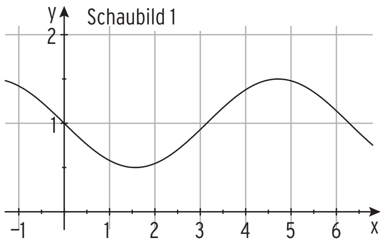
a) $f(x) = 3\sin(x) + 1$; $D = [-1; 7]$

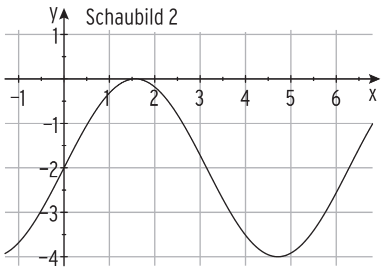
b) $f(x) = -0{,}5\cos(x) + 2$; $D = [-0{,}5; 2\pi]$

c) $f(x) = 4 - 2\cos(x)$; $D = [-4; 4]$

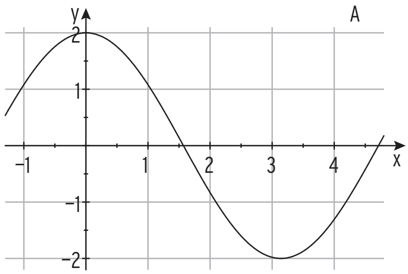
d) $f(x) = 2\sin(x) - 1{,}5$; $D = [-2; 6]$

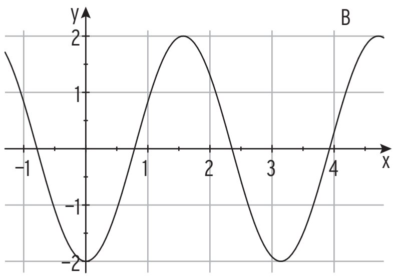
2 Das Schaubild einer Funktion f mit $f(x) = a\sin(x) + b$ ist dargestellt.
Bestimmen Sie den Funktionsterm aus der Abbildung.

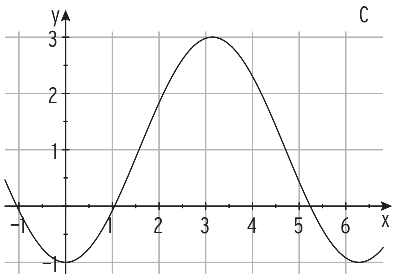


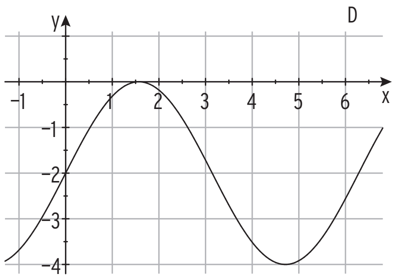


3 Das Schaubild einer Funktion f mit der Gleichung $y = -2\cos(x)$ entspricht keinem der dargestellten Schaubilder.
Begründen Sie obige Aussage, indem Sie je eine Eigenschaft der Schaubilder nennen, die mit den Funktionseigenschaften von f nicht vereinbar ist.









Beachten Sie:

Das Schaubild einer Funktion f mit $f(x) = a\sin[b(x-c)] + d$
bzw. $f(x) = a\cos[b(x-c)] + d$
entsteht aus der Sinuskurve bzw. der Kosinuskurve durch

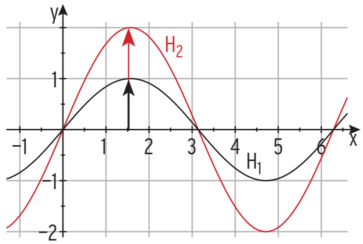
1	2	3	4
Streckung in y-Richtung mit Faktor $\lvert a\rvert$ Für $a < 0$: Spiegelung an der x-Achse	**Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{b}$;** $b > 0$	**Verschiebung in x-Richtung um c**	**Verschiebung in y-Richtung um d**

Die Funktion f hat die **Amplitude $\lvert a\rvert$** und die **Periode** $p = \frac{2\pi}{b}$.

Beispiel

K: $f(x) = 2\sin[\pi(x+0{,}5)] + 1$

Dabei ist $a = 2$, $b = \pi$, $c = -0{,}5$ und $d = 1$.

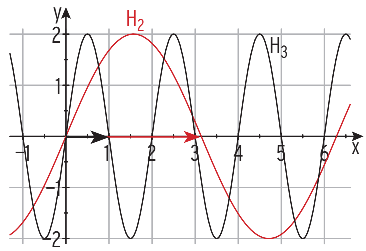


Zu 1:

a = 2

Streckung von H_1: $y = \sin(x)$ **in y-Richtung**

mit Faktor a = 2 ergibt H_2: $y = 2\sin(x)$.



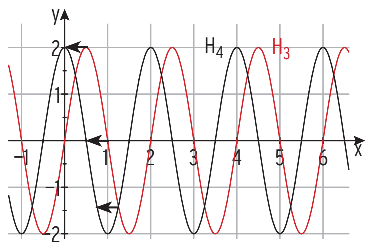
Zu 2:

$b = \pi$

Streckung von H_2: $y = 2\sin(x)$ **in x-Richtung**

mit Faktor $\frac{1}{b} = \frac{1}{\pi}$ ergibt H_3: $y = 2\sin(\pi x)$.

H_3 hat die **Periode** $p = \frac{2\pi}{b} = 2$.

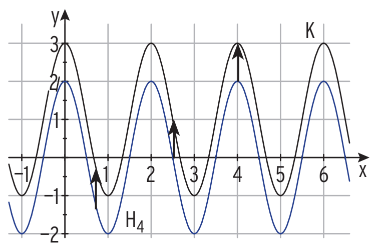


Zu 3:

c = −0,5

Verschiebung von H_3: $y = 2\sin(\pi x)$ **in x-Richtung um c** (0,5 nach links) **ergibt**

H_4: $y = 2\sin[\pi(x+0{,}5)]$.



Zu 4:

d = 1

Verschiebung von H_4: $y = 2\sin[\pi(x+0{,}5)]$

in y-Richtung um d (1 nach oben) ergibt:

K: $y = 2\sin[\pi(x+0{,}5)] + 1$

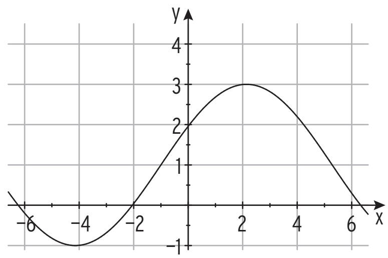
Aufgaben

1 K_f ist das Schaubild der Funktion f mit $x \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie die Periodenlänge und den Wertebereich von f.
Zeichnen Sie K_f auf dem gegebenen Bereich in ein Koordinatensystem ein.

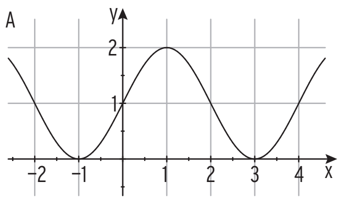
a) $f(x) = 3\sin[\pi(x+1)]$; $D = [-1; 3]$

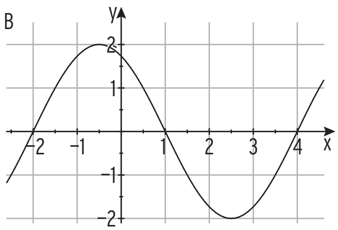
b) $f(x) = 2\cos(x-1) - 1$; $D = [0; 2\pi]$

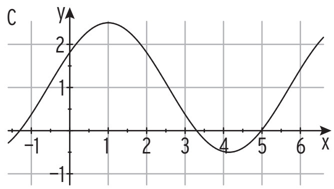
2 Das gezeichnete Schaubild (siehe Abb.) hat die Gleichung $y = a\sin(0{,}5x - c) + d$. Bestimmen Sie a, c und d sowie die exakte Periodenlänge. Begründen Sie.



3 Geben Sie zu jedem Graphen die Periode, die Amplitude und den zugehörigen Funktionsterm an.







4 Wie entsteht das Schaubild K_g aus K_f?

a) $f(x) = \cos(x)$; $g(x) = 3\cos(x+2)$

b) $f(x) = \sin(x)$; $g(x) = -\sin(2x-5) - 3$

c) $f(x) = 4\sin(x)$; $g(x) = \sin(0{,}5x) - 1$

d) $f(x) = -\cos(4x)$; $g(x) = \cos[4(x-2)] + 1$

5 In einem Einfamilienhaus wird Erdgas sowohl zum Heizen der Räume als auch für die Warmwasserzubereitung genutzt. Pro Monat werden $20\,m^3$ Gas zur Warmwasserbereitung benötigt. In den Monaten 4 bis 12 seit Aufzeichnungsbeginn $(x = 0)$ wird geheizt und der monatliche Gasverbrauch schwankt zwischen $20\,m^3$ und $160\,m^3$.
Er soll für diesen Zeitraum durch eine Funktion f beschrieben werden. Für den Funktionsterm wird der Ansatz $f(x) = a + b\sin[c(x-d)]$ gewählt; dabei steht x für die Zeit in Monaten seit Aufzeichnungsbeginn. Die Periode von f entspricht der Dauer der Heizperiode.
Bestimmen Sie die Parameter a, b, c und d.

3 Wahrscheinlichkeit

3.1 Absolute und relative Häufigkeiten

Eine Häufigkeitsverteilung dient zur statistischen Beschreibung von Daten.

An einer Kreuzung werden innerhalb einer halben Stunde 125 Fahrzeuge gezählt. Davon sind 18 Fahrzeuge Lkw. Die **absolute Häufigkeit** der Lkw ist somit 18. Dies sagt wenig darüber aus, wie groß der Anteil der Lkw am Verkehr auf dieser Kreuzung ist. Um ein brauchbares Maß für diesen Anteil zu bekommen, benötigt man die relative Häufigkeit. Die **relative Häufigkeit** ist der Quotient $\frac{18}{125} = 0{,}144 = 14{,}4\,\%$, d. h., ca. 14 % der vorbeigefahrenen Fahrzeuge waren Lkw.

Beispiel

Ein Schüler erkundigt sich bei einer Zulassungsstelle nach der Anzahl der zugelassenen Autos, sortiert nach Automarken. Er erstellt eine **Häufigkeitstabelle.**

Marke x	Ford	VW	Mercedes	andere	Summe
abs. Häufigkeit $n_i = H(x_i)$	2810	3211	1398	2081	$n = 9500$
rel. Häufigkeit $h = \frac{n_i}{n}$	$\frac{2810}{9500} \approx 0{,}29$	$\frac{3211}{9500} \approx 0{,}34$	$\frac{1398}{9500} \approx 0{,}15$	$\frac{2081}{9500} \approx 0{,}22$	$\frac{9500}{9500} = 1$
rel. Häufigkeit h in %	29 %	34 %	15 %	22 %	100 %

Festlegung

Unter der **absoluten Häufigkeit** H (E) **eines Ereignisses E** versteht man die Anzahl der Fälle, in denen das Ereignis eintritt.
Ist n die Anzahl der Durchführungen (Stichprobenumfang), so ist $h(E) = \frac{H(E)}{n}$ die relative Häufigkeit **eines Ereignisses E**.

Relative Häufigkeit $= \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Stichprobenumfang}}$

Eigenschaften der relativen Häufigkeit:

- Für die **relative Häufigkeit** gilt: $0 \le h \le 1$.
- Die **Summe** der relativen Häufigkeiten ist 1 bzw. 100 %.

Aus der Tabelle:

Ereignis E: VW

Gegenereignis $\overline{E}$: kein VW

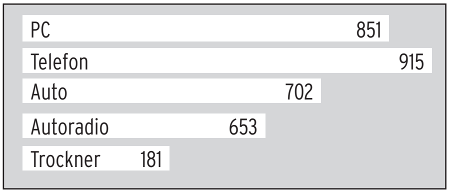
Zusammenhang: $h(E) + h(\overline{E}) = 1$ bzw. $h(\overline{E}) = 1 - h(E)$

Beachten Sie:

Für ein Ereignis E und sein Gegenereignis $\overline{E}$ gilt: $h(E) + h(\overline{E}) = 1$.

Aufgaben

1 Ein Forschungsinstitut befragte 1000 Haushalte nach der Ausstattung mit bestimmten Konsumgütern. Das Ergebnis der Untersuchung ist in einem Balkendiagramm dargestellt. Berechnen Sie die relative Häufigkeit der Haushalte mit



a) PC b) keinem Trockner c) Auto d) Auto ohne Autoradio.

2 Bei einer Mathematikklassenarbeit gab es folgende Noten:
3; 4; 3; 2; 3; 1; 5; 5; 4; 3; 3; 2; 1; 4; 2; 5; 4; 2; 4; 3
Erstellen Sie eine Häufigkeitstabelle.
Stellen Sie die Verteilung in einem Kreisdiagramm dar.

3 Werfen Sie einen Würfel 200-mal und notieren Sie die Anzahl der Sechser nach 20, 40, …, 200 Würfen.
a) Berechnen Sie die relative Häufigkeit der Anzahl der Sechser nach 20, …, 200 Würfen.
b) Geben Sie eine Prognose ab: Wie oft wird die Augenzahl 6 nach 1000 Würfen gefallen sein?

4 Eine Fabrik produziert Stifte.
Die Stifte werden auf Abweichungen im Durchmesser und in der Länge geprüft.
Ein Stift ist fehlerhaft, wenn er im Durchmesser oder in der Länge abweicht.
Bestimmen Sie die relative Häufigkeit der fehlerhaften Stifte.

Von 2000 Stiften gab es Abweichungen	
im Durchmesser	65
in der Länge	87
im Durchmesser und in der Länge	25

5 Schulbücher wurden sortiert nach „Mathematikbuch" (M) und „Neue Auflage" (N).
Es ergab sich folgende Tabelle.
a) Bestimmen Sie die fehlenden Häufigkeiten.
b) Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten $h(\overline{M})$, $h(M \cap N)$ und $h(\overline{M} \cap \overline{N})$.

	M	$\overline{M}$	Summe
N		200	280
$\overline{N}$	112		302
Summe	192		582

6 Bei einer Aufnahmeprüfung sind von jedem Bewerber 5 Aufgaben zu bearbeiten. Das Ergebnis der Prüfung zeigt die folgende Tabelle, wobei $H(k)$ die Anzahl der Bewerber angibt, die k Aufgaben richtig bearbeitet haben:

k	5	4	3	2	1	0
H(k)	4	7	14	11	8	6

a) Ermitteln Sie für $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ die relative Häufigkeit dafür, dass ein Bewerber k Aufgaben richtig gelöst hat. Stellen Sie die Häufigkeitsverteilung grafisch dar.
b) Wie viele Aufgaben hat jeder Bewerber im Mittel richtig bearbeitet?
c) Wie viel Prozent der bearbeiteten Aufgaben wurden richtig gelöst?

3.2 Definition der Wahrscheinlichkeit

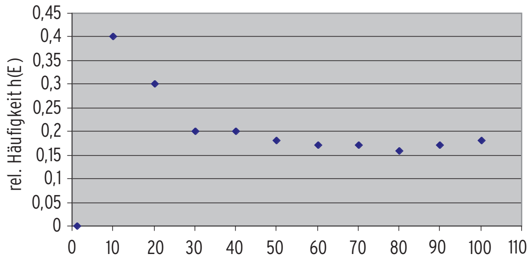
Beim Lotto wird zusätzlich eine Superzahl gezogen (vgl. Tabelle). Im Jahr 2010 (10 Ziehungen) kam z. B. die Zahl „2" nicht vor, die Zahl „4" kam jedoch zweimal vor. Bei vielen Ziehungen (seit 07.12.91) kommt die Zahl „2" etwa gleich häufig vor wie die anderen Zahlen. Lässt sich über die Häufigkeit der gezogenen Zahlen eine Aussage machen, wenn das Experiment sehr oft durchgeführt wird?

Superzahlen am Samstag										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Treffer 2010	2	–	–	2	1	1	1	1	1	1
Gesamt	191	198	197	193	216	183	196	181	193	188

Diese Frage untersuchen wir an einem Würfel.
Ein Würfel wird 10-; 20-; ... ; 100-mal geworfen.
Es wird geprüft, wie oft das Ereignis E: „Augenzahl ist 2" aufgetreten ist.
Häufigkeitstabelle (n gibt die Anzahl der Würfe an)

n	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$H_n(E)$	4	6	6	8	9	10	12	13	15	18
$h_n(E)$	0,4	0,3	0,2	0,2	0,18	0,17	0,17	0,16	0,17	0,18

Um einen Überblick zu bekommen, erstellen wir mit einem Tabellenprogramm ein Punktdiagramm. Das Diagramm zeigt, dass die Folge der relativen Häufigkeiten am Anfang schwankt. Mit wachsendem n werden die Schwankungen geringer. Nach vielen Durchführungen des Zufallsexperiments kann man beobachten, dass sich die **relativen Häufigkeiten** um den Wert 0,17 **stabilisieren**. Diese Zahl wird als **statistische Wahrscheinlichkeit** für das Ereignis E angesehen.



Beachten Sie

Das empirische Gesetz der großen Zahlen: Wird ein Zufallsexperiment sehr oft durchgeführt, so **stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten** um einen festen Wert.

Bestimmung der Wahrscheinlichkeit P (E) **ohne Häufigkeitstabelle**
Beim (idealen) Würfel kann man aufgrund seiner Symmetrie die Annahme machen, dass die Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 etwa gleich häufig auftreten, wenn man „oft genug" würfelt. Für das Ereignis A: „Augenzahl ist 2" **setzt** man die Wahrscheinlichkeit P **fest** durch $P(A) = \frac{1}{6}$ ($\approx 0{,}17$).

Beispiel 1

Zufallsexperiment: **Werfen eines idealen Würfels**

Ergebnismenge $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Wahrscheinlichkeit P für das Ereignis

A: Augenzahl ist 2 $P(A) = \frac{1}{6}$

$A = \{2\}$ ist ein **Elementarereignis**.

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E: „Augenzahl ist kleiner als 3"

Ereignis E: $E = \{1; 2\}$

Wahrscheinlichkeit für E: $P(E) = P(AZ = 1) + P(AZ = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

Beispiel 2

Zufallsexperiment: **Zweimaliges Werfen eines idealen Würfels**

Ergebnismenge $S = \{1\,1; 1\,2; 1\,3; \ldots; 6\,6\}$

Wahrscheinlichkeit P für das Ereignis

E_1: Pasch 2 $P(A) = \frac{1}{36}$

$E_1 = \{2\,2\}$ ist ein **Elementarereignis** (von 36 möglichen).

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis

E_2: Pasch $E_2 = \{1\,1; 2\,2; 3\,3; 4\,4; 5\,5; 6\,6\}$

Ereignis E_2 besteht aus 6 Elementarereignissen.

Wahrscheinlichkeit für E_2: $P(E_2) = P(1\,1) + P(2\,2) + \ldots + P(6\,6) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Definition: Axiome von Kolmogorov

Ein Zufallsexperiment besitzt die Ergebnismenge S.

Eine Funktion P, die jedem Ereignis E eine reelle Zahl P(E) zuordnet, heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung**, wenn gilt:

(1) $P(E) \geq 0$ **Nichtnegativität**

(2) $P(S) = 1$ **Normiertheit**

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$; $A, B \subseteq S$ und $A \cap B = \emptyset$ **Additivität**

Der Funktionswert P(E) heißt **Wahrscheinlichkeit von E.**

Beispiel 3

Eine Statistik belegt, dass bei Mäusen von 100 Nachkommen 47 weiblich sind.

Ergebnismenge S = {Männchen, Weibchen}

Die statistische Wahrscheinlichkeit, dass eine Maus weibliche Nachkommen hat, liegt also bei 0,47.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Maus männliche Nachkommen hat, ist $1 - 0{,}47 = 0{,}53$.

Ist A das Ereignis „Weibchen", so ist das **Gegenereignis** $\overline{A}$ das Ereignis „Männchen".

Für die Wahrscheinlichkeit gilt: $P(\overline{A}) + P(A) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Beachten Sie

Für ein Ereignis A und sein Gegenereignis $\overline{A}$ gilt: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Zusammenhang von $P(A \cap B)$ und $P_A(B)$

Vgl. Baumdiagramm von Beispiel Seite 251.

$P(A) = \frac{3}{4}$ — r — $P_A(B) = \frac{2}{3}$ — r — $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$

Pfadmultiplikationsregel: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$

In diesem Fall spricht man vom allgemeinen Multiplikationssatz.

Beachten Sie:

Allgemeiner Multiplikationssatz: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$

Ist nach der Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ gefragt, so formt man diese Gleichung um.

Beachten Sie:

$P_A(B)$ ist die durch A bedingte Wahrscheinlichkeit von B. $\mathbf{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$ mit $P(A) \neq 0$

Formulierung: $P_A(B)$ ist die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung, dass A schon eingetreten ist.

Beispiel

➲ In einer Gewerbeschule sind 70 % der zu unterrichtenden Personen männlich, davon besitzen 20 % ein Auto. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig befragte Person dieser Schule männlich und besitzt ein Auto?

Lösung

Festlegung von Ereignissen

A: Person ist männlich — B: Person besitzt ein Auto

Gesuchte Wahrscheinlichkeit: $P(A \cap B)$

Bekannt sind die Wahrscheinlichkeiten $P(A) = 0{,}7$; $P_A(B) = 0{,}2$

Hinweis: $P_A(B)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person ein Auto besitzt, wenn man weiß, dass es sich um eine männliche Person handelt.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}14$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 14 % ist eine zufällig ausgewählte Person männlich und besitzt ein Auto.

Weiterer Lösungsweg (Plausibilitätsbetrachtung)

Von z. B. 100 Personen sind 70 männlich. 20 % von 70 Personen besitzen ein Auto, d. h., 14 männliche Personen besitzen ein Auto.

14 Personen von 100 Personen entspricht 14 %.

Beispiel

In einer Gruppe von 300 Personen haben sich 200 Personen prophylaktisch gegen Grippe impfen lassen. Nach einer bestimmten Zeit wurde jedes Gruppenmitglied danach befragt, wer an einer Grippe erkrankte. Die Ergebnisse werden in einer sogenannten **Vierfeldertafel** (2 Merkmale mit jeweils 2 Ausprägungen) dargestellt.

Gruppe	B (erkrankt)	$\overline{B}$ (nicht erkrankt)	Summe
A (mit Impfung)	20	180	200
$\overline{A}$ (ohne Impfung)	40	60	100
Summe	60	240	300

Das Ereignis A sei „Person ist geimpft" und das Ereignis B: „Person erkrankt".
Berechnen Sie $P_A(B)$ und $P_B(A)$. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

Lösung

$P(A) = \frac{200}{300} = \frac{2}{3} = 0{,}67$

Bemerkung: Hier wurde die relative Häufigkeit berechnet.
Diese relative Häufigkeit fasst man als Wahrscheinlichkeit für die zufällige Auswahl irgend einer Person auf.

$P(B) = \frac{60}{300} = 0{,}2$

$A \cap B$: „Eine geimpfte Person ist erkrankt."

$P(A \cap B) = \frac{20}{300} = 0{,}067$

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{2}{3}} = 0{,}1$

	B	$\overline{B}$	Summe
A	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$
$\overline{A}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$
Summe	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	1

Interpretation: Wenn man weiß, dass die Person geimpft wurde, kommen nur noch 200 Personen in Frage. 20 geimpfte Personen von 200 geimpften entsprechen einer Wahrscheinlichkeit von 0,1.

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}067}{0{,}2} = 0{,}33$

Interpretation: Man weiß, dass die Person erkrankt ist, somit kommen nur noch 60 Personen in Frage. 20 geimpfte und erkrankte Personen von 60 Personen entsprechen einer Wahrscheinlichkeit von 0,33.

Vierfeldertafel für Wahrscheinlichkeiten

Zwei Merkmale mit jeweils zwei Ausprägungen

	B	$\overline{B}$	Summe
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Summe	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Beispiel

Eine ideale Münze wird dreimal geworfen. Die Ereignisse A und B sind definiert durch
A: 1. Wurf Wappen bzw. B: Genau einmal Zahl.
Berechnen Sie $P_A(B)$ und $P_B(A)$ und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

Lösung

Wahrscheinlichkeit von A: $P(A) = \frac{1}{2}$

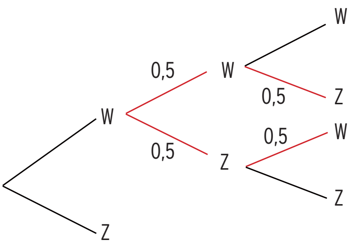
Ergebnisse des Ereignisses $A \cap B$: WZW; WWZ mit $P(WZW) = P(WWZ) = \frac{1}{8}$

Wahrscheinlichkeit: $P(A \cap B) = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}25}{0{,}5} = 0{,}5$

Interpretation: Wenn man weiß, dass A eingetreten ist, d. h., 1. Wurf war Wappen, ergibt sich eine neue Ergebnismenge $S^* = \{WWW; WWZ; WZW; WZZ\}$.
Mit dieser Ergebnismenge S* gilt $B = \{WWZ; WZW\}$. Jedes Ergebnis hat die gleiche Wahrscheinlichkeit. $P_A(B) = \frac{2}{4} = 0{,}5$

Lösung mit einem **Baumdiagramm**
A: 1. Wurf Wappen ist eingetreten
Die beiden rot gekennzeichneten Äste beschreiben das Ereignis B unter der Bedingung A.
$P_A(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$



Ereignis B: $B = \{ZWW; WZW; WWZ\}$

Wahrscheinlichkeit von B: $P(B) = \frac{3}{8}$

Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P_B(A) = \frac{0{,}25}{0{,}375} = \frac{2}{3}$

Interpretation: Man weiß, dass B eingetreten ist, d. h., es trat ein Mal Zahl auf.
Es ist von einer neuen Ergebnismenge S* auszugehen: $S^* = \{ZWW; WZW; WWZ\}$
Mit dieser Ergebnismenge S* ist $A = \{WZW; WWZ\}$: $P_B(A) = \frac{2}{3}$.

Abbildungsverzeichnis

3 frhuynh – Fotolia.com • **3** Africa Studio – Fotolia.com • **21** darknightsky – Fotolia.com • **22** JAN BECKE • **27** Stoyan Haytov – Fotolia.com • **30** Stoyan Haytov – Fotolia.com • **34** Stoyan Haytov – Fotolia.com • **37** Stoyan Haytov – Fotolia.com • **39** Stoyan Haytov – Fotolia.com • **42** Stoyan Haytov – Fotolia.com • **45** Stoyan Haytov – Fotolia.com • **48** industrieblick – Fotolia.com • **49** Margit Jacob / pixelio.de, www.pixelio.de • **49** Stoyan Haytov - Fotolia.com • **51** Alterfalter – Fotolia.com • **71** Stoyan Haytov – Fotolia.com • **73** Stoyan Haytov – Fotolia.com • **73** karichs – Fotolia.com • **81** Stoyan Haytov – Fotolia.com • **82** Stoyan Haytov – Fotolia.com • **83** camera-me.com – Fotolia.com • **85** Stoyan Haytov – Fotolia.com • **86** Sven Krautwald – Fotolia.com • **86** Mikhail Olykaynen – Fotolia.com • **86** Stoyan Haytov – Fotolia.com • **88** industrieblick – Fotolia.com • **94** Stoyan Haytov – Fotolia.com • **115** Stoyan Haytov – Fotolia.com • **127** Stoyan Haytov – Fotolia.com • **128** (3) – Neier – http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Shunsuke1_20080622.jpg • **129** Stoyan Haytov – Fotolia.com • **129** LianeM – Fotolia.com • **138** Stoyan Haytov – Fotolia.com • **142** Stoyan Haytov – Fotolia.com • **148** Stoyan Haytov – Fotolia.com **153** Stoyan Haytov – Fotolia.com • **157** beawolf - Fotolia • **159** Stoyan Haytov - Fotolia.com • **160** Ansebach – Fotolia.com • **162** Stoyan Haytov - Fotolia.com • **162** Peter Habereder / pixelio.de, www.pixelio.de • **164** (4) – Rftblr – http://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Giant_Ferris_Wheel_in_Vienna_2010-09-20.jpg • **204** Stoyan Haytov – Fotolia.com • **222** V. Petö - adpic.de • **231** Peter Wiegel / pixelio.de, www.pixelio.de • **232** Imaginis – Fotolia.com • **236** Günter Rehfeld / pixelio.de, www.pixelio.de • **265** Katharina Bregulla / pixelio.de, www.pixelio.de • **269** Picture-Factory – Fotolia.com • **271** popov48 – Fotolia.com • **278** RioPatuca Images – Fotolia.com • **280** DS / pixelio.de, www.pixelio.de • **284** djama – Fotolia.com • **285** Stoyan Haytov – Fotolia.com • **285** industrieblick – Fotolia.com • **285** Stoyan Haytov – Fotolia.com

Es war leider nicht möglich, alle Rechteinhaber ausfindig zu machen.
Berechtigte Ansprüche werden selbstverständlich nach den üblichen Konditionen abgegolten.

Einige Grafiken fallen unter die Wikimedia GNU Lizenz und sind somit frei verfügbar und dürfen weiter verbreitet werden. Nähere Informationen über die Verbreitungsmöglichkeit finden Sie unter dem jeweiligen Link: (1) Public Domain, (2) Public Domain, auch in den USA, (3) GNU Lizenz – freie Dokumentation (4) Creative Commons, (5) Creative Commons und GNU Lizenz

Nicht aufgeführte Abbildungen wurden vom Autor erstellt.