

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner

Lehrauftrag Mathematik an der KSW Wangen

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch

Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die in diesem Buch zitierten Internetseiten wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.

Stand: Juli 2015

Umschlag: © frhuynh - Fotolia.com, kleines Bild oben: © Picture-Factory - Fotolia.com,
kleines Bild unten: Africa Studio - Fotolia.com

* * * * *

5. Auflage 2015

© 1997 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-0338-4

Vorwort

Vorbemerkungen

Der vorliegende Band „Mathematik für berufliche Gymnasien – Jahrgangsstufen 1 und 2, Analysis und Stochastik“ ist ein Lehr- und Arbeitsbuch für alle beruflichen Gymnasien in Baden-Württemberg.

Das Lehrbuch richtet sich exakt nach dem neuen Bildungsplan für die gymnasiale Oberstufe, Mathematik, in Baden-Württemberg vom Juni 2014.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam sowohl die im Lehrplan geforderten inhalts- als auch die prozessbezogenen Kompetenzen (modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).

Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die im Bildungsplan aufgeführten Kompetenzen und Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

Der Aufbau dieses Buches

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.

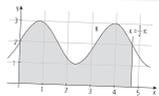
Integrierte Lösung

127

Die Fläche liegt oberhalb der x-Achse

Beispiel
 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(2x) + 2$; $x \in \mathbb{R}$ mit Schaubild K .
 K schließt mit der x-Achse auf $[0; \frac{1}{2}\pi]$ eine Fläche ein. Berechnen Sie den Inhalt.

Lösung
 K von f verläuft wegen $\sin(2x) \geq -1$ oberhalb der x-Achse: $f(x) > 0$
 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin(2x) + 2) dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x) + 2x\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}$
 $= -\frac{1}{2}(-1) + 3\pi - \left[-\frac{1}{2}(-1)\right] = 3\pi + 1$
 Inhalt der Fläche: $A = 3\pi + 1$



Beachten Sie: Verläuft K von f für alle $x \in [a; b]$ oberhalb der x-Achse, so liefert das Integral $\int_a^b f(x) dx$ die Maßzahl für den **Flächeninhalt zwischen K , der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$** : $A = \int_a^b f(x) dx$

Die Fläche liegt unterhalb der x-Achse

Beispiel
 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x$; $x \in \mathbb{R}$, die Koordinatenachsen und die Gerade mit $x = 1$ begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Lösung

Jede Lerneinheit schließt mit einer ausreichenden Anzahl von **Aufgaben** ab. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Kompetenzorientierte Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Aufgaben aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her.

Die Aufgaben „**Modellierung einer Situation**“ und „**Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse**“ werden im Anhang ausführlich gelöst.

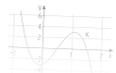
Für **Aufgaben mit dem Download-Logo** stehen **ausführliche Lösungen zum Download** bereit. Sie finden diese in der Mediathek zum Buch auf unserer Website <http://www.merkur-verlag.de>.

Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.

70 | Analysis

Aufgaben

- Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6}x^3(x^2 - 24)$; $x \in \mathbb{R}$. mit Schaubild K . K hat zwei Wendetangenten. Begründen Sie, dass sich die Wendetangenten auf der y -Achse schneiden. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Schnittpunktes. Stehen die Wendetangenten senkrecht aufeinander? Auf welcher Geraden liegen die zwei Wendepunkte?
- Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - x + 2$; $x \in \mathbb{R}$. mit Schaubild K .
 - In welchem Quadranten liegt der Extrempunkt von K ?
 - Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K .
 - Zeichnen Sie K und seine Asymptote in ein Koordinatensystem ein.
- K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -8x^3 + 12x^2 + 2x - 3$; $x \in \mathbb{R}$.
 - Zeigen Sie: $-0,5$, $0,5$ und $1,5$ sind die Nullstellen von f . Zerlegen Sie $f(x)$ in Linearfaktoren.
 - Gegeben: Die Wendetangente an K bildet mit dem x -Achsenabschnitt ein Dreieck mit dem Inhalt $A = 1$.



Differenzialrechnung

9

Analysis

1 Differenzialrechnung

1.1 Ableitung von Funktionen

Modellierung einer Situation

In der Pause eines Openair-Konzerts nimmt der Kioskbesitzer Huber ein Getränk aus dem Kühlschrank. Da es nicht verkauft wird, erwärmt es sich. Der Term $T(t) = 27 - 19e^{-0,1t}$; $t \geq 0$ (t in Minuten, $T(t)$ in Grad Celsius) beschreibt näherungsweise den Erwärmungsvorgang. Welche Temperatur hat das Getränk, wenn es die Umgebungstemperatur hat? Zu welcher Zeit steigt die Temperatur am schnellsten an? Wie groß ist dieser Anstieg? Bestimmen Sie für die ersten 15 Minuten die durchschnittliche Temperaturänderung.



Für das Openair-Konzert soll rechtlich höchstens ein Zählstoßwert einer Bühne...

80 | Analysis

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

- Untersuchen Sie das Schaubild der Funktion f auf Hoch- und Tiefpunkte.
 - $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^3 + 6x + 3$
 - $f(x) = (x - 3)e^x$
 - $f(x) = \sin(\pi x - 2)$; $x \in]-0,5; 2,5[$
 - $f(x) = e^{x^2} - e^x$
- Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.
 - $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$
 - $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 + 3$

1 Berechnen Sie die Änderungsrate von $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x^3 - x + 1$ auf dem Intervall $I =]1; 5[$.
 $I: 1,5[$; $]-4; -2,5[$; $\{2; t\}$ mit $t \neq 2$; $\{3; 3 + h\}$ mit $h > 0$.

2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$.

- Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von f auf dem Intervall $I =]2; 5[$.
- Bestimmen Sie die Gleichung der Sekante q durch $P(2 | f(2))$ und $Q(5 | f(5))$. Zeichnen Sie die Schaubilder von f und q in ein Koordinatensystem.
- Berechnen Sie die momentane Änderungsrate von f an der Stelle $x = 2$. Interpretieren Sie geometrisch.

3 Chemische Reaktionen können langsam oder schnell ablaufen. Bringt man z. B. Zink in Salzsäure, entsteht Wasserstoff.




Beachten Sie

Bedeutet $s(t)$ den in der Zeit t zurückgelegten Weg (Weg als Funktion der Zeit), so gilt:

für die **mittlere Geschwindigkeit** $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

für die **Momentangeschwindigkeit** $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = s'(t)$

für die **mittlere Beschleunigung** $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

für die **Momentanbeschleunigung** $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'(t)$

Die **Momentangeschwindigkeit** ist die Durchschnittsgeschwindigkeit in einem möglichst kleinen Zeitintervall.
 Die **mittlere Beschleunigung** ist die Geschwindigkeitsänderung Δv in der Zeit Δt .

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 5

I Analysis 9

1	Differenzialrechnung	9
1.1	Ableitung von Funktionen	9
1.1.1	Änderungsrate	10
1.1.2	Definition der Ableitung	15
1.1.3	Ableitungsregeln	17
1.1.4	Ableitung und Steigung	29
1.1.5	Tangente und Normale	31
1.1.6	Schneiden und Berühren	37
1.1.7	Grafisches Differenzieren	40
1.2	Kurvenuntersuchung	44
1.2.1	Monotonie	45
1.2.2	Extrempunkte	49
1.2.3	Wendepunkte	57
1.2.4	Aufgabenbeispiele zur Kurvenuntersuchung	66
1.2.5	Aufstellen von Kurvengleichungen aus gegebenen Bedingungen	72
1.3	Modellierung realer Probleme	81
1.3.1	Modellierung von Optimierungsproblemen	82
1.3.2	Modellierung von Wachstums- und Zerfallsprozessen	88
1.3.3	Modellierung in der Physik	92
1.3.4	Modellierung in der Kostentheorie	96
2	Integralrechnung	102
2.1	Einführung	103
2.2	Stammfunktion und unbestimmtes Integral	105
2.3	Das bestimmte Integral	117
2.4	Flächeninhaltsberechnung mithilfe der Integralrechnung	126
2.4.1	Fläche zwischen Kurve und x-Achse	126
2.4.2	Fläche zwischen zwei Kurven	133
2.4.3	Besondere Aufgabenstellungen bei der Flächeninhaltsberechnung	142
2.5	Anwendungen der Integralrechnung	149
2.5.1	Flächen in anwendungsorientierten Aufgaben	150
2.5.2	Mittelwert	152
2.5.3	Rotationskörper	155
2.5.4	Weitere Anwendungen des Integrals in Natur, Technik und Wirtschaft	159

II Stochastik 169

1 Binomialverteilung 170

 1.1 Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Ketten 170

 1.2 Die Bernoulli-Formel 172

 1.3 Erwartungswert und Varianz einer Binomialverteilung 185

 1.4 Die Sigma-Regeln 193

2 Schätzen unbekannter Wahrscheinlichkeiten 199

Anhang 210

Musterabitur 210

Lösungen der Modellierungen und Tests 218

Mathematics als weiteres elektronisches Hilfsmittel 231

Mathematische Zeichen 236

Stichwortverzeichnis 237

Abbildungsverzeichnis 239