Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Kurt Bohner
Lehrauftrag Mathematik am BS Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Ronald Deusch
Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Umschlag: Kreis oben: Syda Productions - www.colourbox.de

* * * * * * * * * *

1. Auflage 2019

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-**0696**-**5**

Vorwort

Vorbemerkungen

Der vorliegende Band „Mathematik für die Qualifikationsphase“ ist ein Arbeitsbuch für den Mathematikunterricht in allen beruflichen Gymnasien in Niedersachsen der Fachrichtungen Wirtschaft und Verwaltung, Gesundheit und Soziales und weiteren Bildungsgängen, die den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife ermöglichen. Das Buch behandelt den gesamten Lehrstoff, die Analysis mit Differenzialrechnung und Integralrechnung, die Stochastik, die Lineare Algebra und die Analytische Geometrie.

Die Grundlage der Inhalte ist das Kerncurriculum von 2018. Das Autorenteam berücksichtigt sowohl die in den Rahmenrichtlinien geforderten inhalts- als auch die prozessbezogenen Kompetenzen (modellieren, argumentieren, kommunizieren, nutzen mathematischer Werkzeuge und Darstellungen, lösen innermathematischer Problemstellungen sowie das Umgehen mit formalen und symbolischen Elementen).

Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die in den Richtlinien aufgeführten Kompetenzen wie auch die Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Begleitend werden ein Arbeitsheft (ISBN 978-3-8120-2696-9) und eine Formelsammlung (ISBN 978-3-8120-1695-0) angeboten. Das Arbeitsheft soll Schüler und Lehrer durch Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung unterstützen.

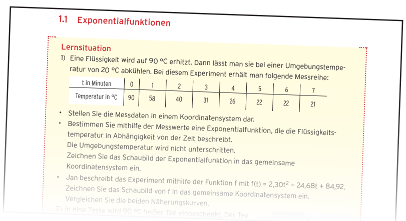
Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

Dieses Buch können Sie auch als digitale Version erhalten. Nähere Informationen finden Sie auf unserer Webseite, Suche: 6696

Der Aufbau dieses Buches

Jedes Hauptkapitel beginnt mit berufsbezogenen **Lernsituationen**, die die Schüler/innen eigenverantwortlich und selbstorganisiert bearbeiten. Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.



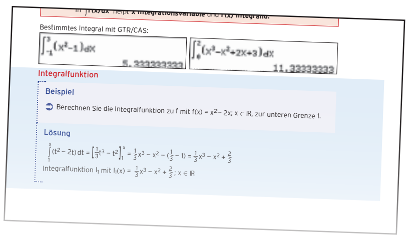
1.1 Exponentialfunktionen

Lernsituation

1) Eine Flüssigkeit wird auf 90 °C erhitzt. Dann lässt man sie bei einer Umgebungstemperatur von 20 °C abkühlen. Bei diesem Experiment erhält man folgende Messreihe:

t in Minuten	0	1	2	3	4	5	6	7
Temperatur in °C	90	58	40	31	26	22	22	21

- Stellen Sie die Messdaten in einem Koordinatensystem dar.
- Bestimmen Sie mithilfe der Messwerte eine Exponentialfunktion, die die Flüssigkeitstemperatur in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Die Umgebungstemperatur wird nicht unterschritten. Zeichnen Sie das Schaubild der Exponentialfunktion in das gemeinsame Koordinatensystem ein.
- Jan beschreibt das Experiment mithilfe der Funktion f mit $f(t) = 2{,}30t^2 - 24{,}68t + 84{,}92$. Zeichnen Sie das Schaubild von f in das gemeinsame Koordinatensystem ein. Vergleichen Sie die beiden Näherungskurven.



Bestimmtes Integral mit GTR/CAS:

$\int_{-1}^{3}(x^2-1)dx$ 5.333333333

$\int_{0}^{2}(x^3-x^2+2x+3)dx$ 11.33333333

Integralfunktion

Beispiel

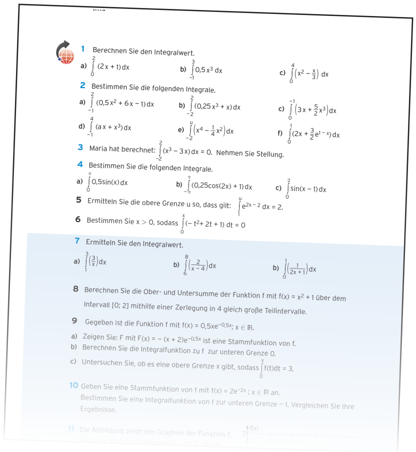
Berechnen Sie die Integralfunktion zu f mit $f(x) = x^2 - 2x$; $x \in \mathbb{R}$, zur unteren Grenze 1.

Lösung

$\int_1^x (t^2 - 2t)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2\right]_1^x = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - (\frac{1}{3} - 1) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}$

Integralfunktion I_1 mit $I_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}$; $x \in \mathbb{R}$

Kompetenzorientierte Fragestellungen mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Probleme aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her.



1 Berechnen Sie den Integralwert.

a) $\int_0^2 (2x+1)\,dx$ b) $\int_{-1}^{3} 0{,}5x^3\,dx$ c) $\int_0^4 \left(x^2 - \frac{x}{3}\right) dx$

2 Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_{-1}^{2} (0{,}5x^2 + 6x - 1)\,dx$ b) $\int_{-2}^{2} (0{,}25x^3 + x)\,dx$ c) $\int_0^{-1} \left(3x + \frac{5}{2}x^3\right) dx$

d) $\int_{-1}^{4} (ax + x^3)\,dx$ e) $\int_{-2}^{u} \left(x^4 - \frac{1}{4}x^2\right) dx$ f) $\int_0^1 \left(2x + \frac{3}{2}e^{1-x}\right) dx$

3 Maria hat berechnet: $\int_{-2}^{2} (x^3 - 3x)\,dx = 0$. Nehmen Sie Stellung.

4 Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_0^{\pi} 0{,}5\sin(x)\,dx$ b) $\int_{-\pi}^{\pi} (0{,}25\cos(2x) + 1)\,dx$ c) $\int_0^{2} \sin(x-1)\,dx$

5 Ermitteln Sie die obere Grenze u so, dass gilt: $\int_1^u e^{2x-2}\,dx = 2$.

6 Bestimmen Sie $x > 0$, sodass $\int_0^x (-t^2 + 2t + 1)\,dt = 0$

7 Ermitteln Sie den Integralwert.

a) $\int_1^3 \left(\frac{3}{x}\right) dx$ b) $\int_6^8 \left(\frac{2}{x-4}\right) dx$ b) $\int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1}\right) dx$

8 Berechnen Sie die Ober- und Untersumme der Funktion f mit $f(x) = x^2 + 1$ über dem Intervall [0; 2] mithilfe einer Zerlegung in 4 gleich große Teilintervalle.

9 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5xe^{-0{,}5x}$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: F mit $F(x) = -(x+2)e^{-0{,}5x}$ ist eine Stammfunktion von f.

b) Berechnen Sie die Integralfunktion zu f zur unteren Grenze 0.

c) Untersuchen Sie, ob es eine obere Grenze x gibt, sodass $\int_0^x f(t)dt = 3$.

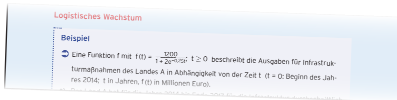
10 Geben Sie eine Stammfunktion von f mit $f(x) = 2e^{-2x}$; $x \in \mathbb{R}$ an. Bestimmen Sie eine Integralfunktion von f zur unteren Grenze −1. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse.

Jede Lerneinheit endet mit einer umfassenden Anzahl von Aufgaben. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet.

Eine **Differenzierung der Aufgaben** ist durch Farben gegeben;

blau: Lösung ohne Hilfsmittel
schwarz: keine Vorgabe zur Lösung.

Themen und Aufgaben für das erhöhte Anforderungsniveau (eA) sind farblich hinterlegt.

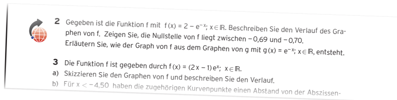


Logistisches Wachstum

Beispiel

Eine Funktion f mit $f(t) = \frac{1200}{1 + 2e^{-0{,}25t}}$; $t \geq 0$ beschreibt die Ausgaben für Infrastrukturmaßnahmen des Landes A in Abhängigkeit von der Zeit t (t = 0: Beginn des Jahres 2014; t in Jahren, f(t) in Millionen Euro).

Für **Aufgaben mit dem Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese in der Mediathek zum Buch auf unserer Website http://www.merkur-verlag.de.



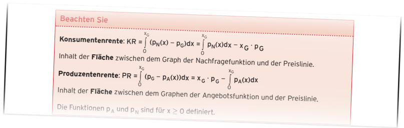
2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 - e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$. Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f. Zeigen Sie, die Nullstelle von f liegt zwischen −0,69 und −0,70. Erläutern Sie, wie der Graph von f aus dem Graphen von g mit $g(x) = e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$, entsteht.

3 Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = (2x-1)e^x$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f und beschreiben Sie den Verlauf.

b) Für $x < -4{,}50$ haben die zugehörigen Kurvenpunkte einen Abstand von der Abszissen-

Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.



Beachten Sie

Konsumentenrente: $KR = \int_0^{x_G} (p_N(x) - p_G)dx = \int_0^{x_G} p_N(x)dx - x_G \cdot p_G$

Inhalt der **Fläche** zwischen dem Graph der Nachfragefunktion und der Preislinie.

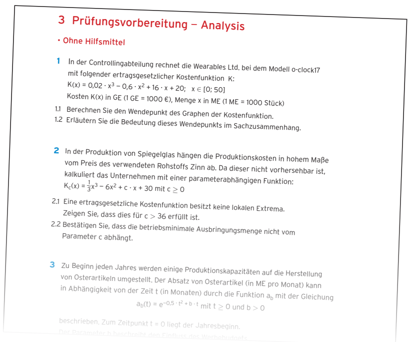
Produzentenrente: $PR = \int_0^{x_G} (p_G - p_A(x))dx = x_G \cdot p_G - \int_0^{x_G} p_A(x)dx$

Inhalt der **Fläche** zwischen dem Graphen der Angebotsfunktion und der Preislinie.

Die Funktionen p_A und p_N sind für $x \geq 0$ definiert.

Prüfungsvorbeitung – Analysis, Stochastik, Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Schüler/innen bereiten sich durch die Bearbeitung prüfungsähnlicher Aufgaben auf Kursarbeiten und auf die Abiturprüfung vor. Die mathematischen Anforderungen werden wiederholt und die Schüler/innen lernen die prüfungsspezifischen Formulierungen kennen.



3 Prüfungsvorbereitung – Analysis

• Ohne Hilfsmittel

1 In der Controllingabteilung rechnet die Wearables Ltd. bei dem Modell o-clock17 mit folgender ertragsgesetzlicher Kostenfunktion K:
$K(x) = 0{,}02 \cdot x^3 - 0{,}6 \cdot x^2 + 16 \cdot x + 20$; $x \in [0; 50]$
Kosten K(x) in GE (1 GE = 1000 €), Menge x in ME (1 ME = 1000 Stück)

1.1 Berechnen Sie den Wendepunkt des Graphen der Kostenfunktion.

1.2 Erläutern Sie die Bedeutung dieses Wendepunkts im Sachzusammenhang.

2 In der Produktion von Spiegelglas hängen die Produktionskosten in hohem Maße vom Preis des verwendeten Rohstoffs Zinn ab. Da dieser nicht vorhersehbar ist, kalkuliert das Unternehmen mit einer parameterabhängigen Funktion:
$K_c(x) = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + c \cdot x + 30$ mit $c \geq 0$

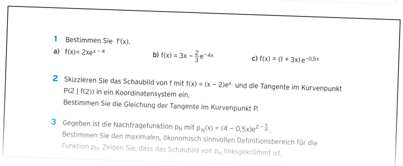
2.1 Eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion besitzt keine lokalen Extrema. Zeigen Sie, dass dies für $c > 36$ erfüllt ist.

2.2 Bestätigen Sie, dass die betriebsminimale Ausbringungsmenge nicht vom Parameter c abhängt.

3 Zu Beginn jeden Jahres werden einige Produktionskapazitäten auf die Herstellung von Osterartikeln umgestellt. Der Absatz von Osterartikel (in ME pro Monat) kann in Abhängigkeit von der Zeit t (in Monaten) durch die Funktion a_b mit der Gleichung
$a_b(t) = e^{-0{,}5 \cdot t^2 + b \cdot t}$ mit $t \geq 0$ und $b > 0$

beschrieben. Zum Zeitpunkt t = 0 liegt der Jahresbeginn.

Die Aufgaben **„Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse“** werden im Anhang ausführlich gelöst.



1 Bestimmen Sie f′(x).

a) $f(x) = 2xe^{x-4}$ b) $f(x) = 3x - \frac{2}{3}e^{-4x}$ c) $f(x) = (1+3x)e^{-0{,}5x}$

2 Skizzieren Sie das Schaubild von f mit $f(x) = (x-2)e^x$ und die Tangente im Kurvenpunkt P(2 | f(2)) in ein Koordinatensystem ein. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Kurvenpunkt P.

3 Gegeben ist die Nachfragefunktion p_N mit $p_N(x) = (4 - 0{,}5x)e^{2-\frac{x}{4}}$. Bestimmen Sie den maximalen, ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich für die Funktion p_N. Zeigen Sie, dass das Schaubild von p_N linksgekrümmt ist.

Inhalt

I Analysis 11

II Stochastik 156

IV Analytische Geometrie 356

Anhang 389