

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner

Lehrauftrag Mathematik am BSW Wangen

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch

Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Umschlag: © frhuynh - Fotolia.com, kleines Bild oben: © Picture-Factory - Fotolia.com,
kleines Bild unten: Africa Studio - Fotolia.com

Download-Icon: Stoyan Haytov - Fotolia.com

* * * * *

1. Auflage 2016

© 2016 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung:

MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de

lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-0638-5

Vorwort

Vorbemerkungen

Der vorliegende Band „Mathematik für berufliche Gymnasien – **Lineare Algebra Vektorgeometrie**“ ist ein Lehr- und Arbeitsbuch für alle beruflichen Gymnasien in Baden-Württemberg. Das Lehrbuch richtet sich exakt nach dem neuen Bildungsplan für die gymnasiale Oberstufe, Mathematik, in Baden-Württemberg vom Juni 2014.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam sowohl die im Lehrplan geforderten inhalts- als auch die prozessbezogenen Kompetenzen (modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).

Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die im Bildungsplan aufgeführten Kompetenzen und Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Eine sinnvolle Ergänzung ist das Buch „**Mathematik für berufliche Gymnasien – Abitur**“ (ISBN 978-3-8120-0464-0) mit Aufgaben für das Abitur in neuer Form. Das Buch wird jährlich aktualisiert.

Begleitend wird ein **Arbeitsheft** (ISBN 978-3-8120-1339-0) angeboten. Es soll Schüler und Lehrer in ihrer Arbeit durch Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung unterstützen.

Die Verfasser

Der Aufbau dieses Buches

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.

Rechnen mit Vektoren

Beispiel

Bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und senkrecht auf $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ steht.

Lösung

Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf \vec{a} und auf \vec{b} .

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 - (-7) \cdot (-2) \\ 5 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-4) \\ 5 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 18 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 16 \\ 18 \\ 14 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf \vec{a} und senkrecht auf \vec{b} .

Hinweis: Der Vektor $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 18 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$ steht auch senkrecht auf \vec{a} und senkrecht auf \vec{b} .

Bemerkung:

Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ergibt einen Vektor.
Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ergibt eine reelle Zahl (einen Skalar).

Jede Lerneinheit schließt mit einer ausreichenden Anzahl von **Aufgaben** ab. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Kompetenzorientierte Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Aufgaben aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her.

Die Aufgaben „Modellierung einer Situation“ und „Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse“ werden im Anhang ausführlich gelöst.

Für **Aufgaben mit dem Download-Logo** stehen **ausführliche Lösungen zum Download** bereit. Sie finden diese in der Mediathek zum Buch auf unserer Website <http://www.merkur-verlag.de>.

Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.

Aufgaben

- Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h . Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S .
 - $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$
 - $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$
 - $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$
 - $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$
- Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(0 | 5 | 0)$ und $B(0 | 0 | 5)$. Die Gerade h verläuft durch die Punkte $C(-1 | 4 | 3)$ und $D(5 | 5 | 1)$. Untersuchen Sie, ob die Geraden g und h windschief sind.
- Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

II Vektorielle Geometrie

Modellierung einer Situation
 Die Gemeinde Barkitzellen möchte ihre Freilichtbühne überdachen. Der Grundriss der Bühne ist das Viereck ABCD (siehe Abb.). Dieses Viereck liegt in der x_1x_2 -Ebene. Die Bühne soll ein schräg liegendes Dach erhalten, dessen Ecken sich senkrecht über den Punkten A, B, C und D befinden. Dazu werden an den Punkten A, B und C senkrechte Masten aufgestellt. Die Masthöhen betragen 4 m bei A, 2 m bei B und 3 m bei C.

- Geben Sie die Gleichung der Ebene in Koordinatenform an, in der das Dach liegt. In welcher Höhe befindet sich die Ecke des Daches, die senkrecht über D liegt?
- Damit das Regenwasser gut abfließt, soll der Winkel zwischen der Ebene, die das Dach enthält und dem Boden (x_1x_2 -Ebene) mindestens 15° betragen.

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

- Die Ebene E verläuft durch die Punkte $A(-1 | 1 | 0)$, $B(-2 | 3 | 4)$ und $C(-2 | 0 | 3)$.
 - Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E .
 - Überprüfen Sie, ob der Punkt $D(-2 | 6 | 5)$ auf E liegt.
- Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform.
 - $E: \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3$
 - $E: \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$
 - $E: \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 5$
 - $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$
- Bestimmen Sie die Spurpunkte der Ebene $E: Zx_1 = 4$. Welche besondere Lage hat E ?

müssen eine gewisse Anzahl von Arbeitsstunden aufgewendet werden. Für die Pflege stehen insgesamt 950 Arbeitsstunden, für die Ernte 1590 Arbeitsstunden zur Verfügung.

Die Tabelle gibt die Anzahl der Arbeitsstunden pro Baum an. Berechnen Sie die Verteilung der einzelnen Baumarten.

	A	X	B
Pflege	2	15	3
Ernte	3	6	25

- Bereiten Sie eine Mischung aus drei Vitaminpräparaten P1, P2 und P3 so, dass sie den täglichen Vitaminbedarf deckt und ein Gramm L2 kostet. Ein Gramm P1 kostet 0,1 €, ein Gramm P2 kostet 0,15 € und ein Gramm P3 kostet 0,25 €. Die notwendigen Daten können Sie der Tabelle entnehmen. (Angaben in mg pro g, z. B.: P1 enthält pro g 0,2 mg Vitamin A.)

Beachten Sie:
 Gegeben sind die windschiefen Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u}$; $r \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + s\vec{v}$; $s \in \mathbb{R}$. Den Abstand d der Geraden g und h berechnet man mit der Formel:

$$d = \frac{|\vec{q} - \vec{p} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

\vec{n} ist ein Normalenvektor zu den Richtungsvektoren \vec{u} und \vec{v} , z. B. $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
---------------	---

I Lineare Gleichungssysteme

1 Einführung	10
2 Umformung und Lösung eines linearen Gleichungssystems	12
2.1 Das LGS ist eindeutig lösbar	12
2.2 Das LGS ist unlösbar	16
2.3 Das LGS ist mehrdeutig lösbar	17
2.4 Anwendungen	23

II Vektorielle Geometrie

1 Punkte	29
2 Vektoren	32
3 Rechnen mit Vektoren	34
3.1 Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation	34
3.2 Skalarprodukt	43
3.3 Vektorprodukt	48
4 Geraden im Anschauungsraum	52
4.1 Geradengleichung in Parameterform	52
4.2 Spurpunkte einer Geraden	57
4.3 Gegenseitige Lage von zwei Geraden	59
5 Ebenen im Anschauungsraum	69
5.1 Parameterform einer Ebenengleichung	69
5.2 Normalen- und Koordinatenform	74
5.3 Spurpunkte und Spurgeraden einer Ebene	81
6 Gegenseitige Lage	85
6.1 Gegenseitige Lage einer Geraden und einer Ebene	85
6.2 Gegenseitige Lage von zwei Ebenen	91
7 Abstandsberechnungen im Raum	99
7.1 Abstand von zwei Punkten	99
7.2 Abstand eines Punktes von einer Ebene	100
7.3 Abstand eines Punktes von einer Geraden	103
7.4 Abstand windschiefer Geraden	106
8 Winkelberechnungen	109
9 Flächen- und Volumenberechnungen an Objekten im Raum	113
9.1 Flächenberechnung	113
9.2 Volumenberechnung	114

ANHANG

Musteraufgaben für das Abitur.....	118
Lösungen der Modellierungen und Tests.....	120
Stichwortverzeichnis	125
Abbildungsverzeichnis.....	127