

# Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

## Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

---

Die Verfasser:

### **Roland Ott**

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

### **Kurt Bohner**

Lehrauftrag Mathematik an der KSW Wangen

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

### **Ronald Deusch**

Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die in diesem Buch zitierten Internetseiten wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.

Stand: Juli 2015

Umschlag: © frhuynh - Fotolia.com, kleines Bild oben: © Picture-Factory - Fotolia.com,  
kleines Bild unten: Africa Studio - Fotolia.com

\* \* \* \* \*

5. Auflage 2015

© 1997 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: [info@merkur-verlag.de](mailto:info@merkur-verlag.de); [lehrer-service@merkur-verlag.de](mailto:lehrer-service@merkur-verlag.de)

Internet: [www.merkur-verlag.de](http://www.merkur-verlag.de)

ISBN 978-3-8120-0338-4

# Vorwort

## Vorbemerkungen

Der vorliegende Band „Mathematik für berufliche Gymnasien – Jahrgangsstufen 1 und 2, Analysis und Stochastik“ ist ein Lehr- und Arbeitsbuch für alle beruflichen Gymnasien in Baden-Württemberg.

Das Lehrbuch richtet sich exakt nach dem neuen Bildungsplan für die gymnasiale Oberstufe, Mathematik, in Baden-Württemberg vom Juni 2014.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam sowohl die im Lehrplan geforderten inhalts- als auch die prozessbezogenen Kompetenzen (modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).

Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die im Bildungsplan aufgeführten Kompetenzen und Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

## Der Aufbau dieses Buches

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.

Integrierte Lösung

127


**Die Fläche liegt oberhalb der x-Achse**

**Beispiel**  
 Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \sin(2x) + 2$ ;  $x \in \mathbb{R}$  mit Schaubild  $K$ .  
 $K$  schließt mit der x-Achse auf  $[0; \frac{1}{2}\pi]$  eine Fläche ein. Berechnen Sie den Inhalt.

**Lösung**  
 $K$  von  $f$  verläuft wegen  $\sin(2x) \geq -1$  oberhalb der x-Achse:  $f(x) > 0$   

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin(2x) + 2) dx = \left[ -\frac{1}{2} \cos(2x) + 2x \right]_0^{\frac{1}{2}\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}(-1) + 3\pi - \left[ -\frac{1}{2}(-1) \right] = 3\pi + 1$$
 Inhalt der Fläche:  $A = 3\pi + 1$



**Beachten Sie:** Verläuft  $K$  von  $f$  für alle  $x \in [a; b]$  oberhalb der x-Achse, so liefert das Integral  $\int_a^b f(x) dx$  die Maßzahl für den **Flächeninhalt zwischen  $K$ , der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen  $x = a$  und  $x = b$** :  $A = \int_a^b f(x) dx$

**Die Fläche liegt unterhalb der x-Achse**

**Beispiel**  
 Der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x$ ;  $x \in \mathbb{R}$ , die Koordinatenachsen und die Gerade mit  $x = 1$  begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

**Lösung**

Jede Lerneinheit schließt mit einer ausreichenden Anzahl von **Aufgaben** ab. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Kompetenzorientierte Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Aufgaben aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her.

Die Aufgaben „**Modellierung einer Situation**“ und „**Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse**“ werden im Anhang ausführlich gelöst.

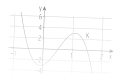
Für **Aufgaben mit dem Download-Logo** stehen **ausführliche Lösungen zum Download** bereit. Sie finden diese in der Mediathek zum Buch auf unserer Website <http://www.merkur-verlag.de>.

**Definitionen, Festlegungen, Merksätze** und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.

70 | Analysis

**Aufgaben**

- Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{6}x^3(x^2 - 24)$ ;  $x \in \mathbb{R}$ . mit Schaubild  $K$ .  $K$  hat zwei Wendetangenten. Begründen Sie, dass sich die Wendetangenten auf der  $y$ -Achse schneiden. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Schnittpunktes. Stehen die Wendetangenten senkrecht aufeinander? Auf welcher Geraden liegen die zwei Wendepunkte?
- Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - x + 2$ ;  $x \in \mathbb{R}$ . mit Schaubild  $K$ .
  - In welchem Quadranten liegt der Extrempunkt von  $K$ ?
  - Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von  $K$ .
  - Zeichnen Sie  $K$  und seine Asymptote in ein Koordinatensystem ein.
- $K$  ist das Schaubild der Funktion  $f$  mit  $f(x) = -8x^3 + 12x^2 + 2x - 3$ ;  $x \in \mathbb{R}$ .
  - Zeigen Sie:  $-0,5$ ,  $0,5$  und  $1,5$  sind die Nullstellen von  $f$ . Zerlegen Sie  $f(x)$  in Linearfaktoren.
  - Zeichnen Sie die Wendetangente an  $K$  bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck mit dem Inhalt  $A = 1$ .




Differenzialrechnung

9

**Analysis**

**1 Differenzialrechnung**  
**1.1 Ableitung von Funktionen**

**Modellierung einer Situation**  
 In der Pause eines Openair-Konzerts nimmt der Kioskbesitzer Huber ein Getränk aus dem Kühlschrank. Da es nicht verkauft wird, erwärmt es sich.  
 Der Term  $T(t) = 27 - 19e^{-0,1t}$ ;  $t \geq 0$  ( $t$  in Minuten,  $T(t)$  in Grad Celsius) beschreibt näherungsweise den Erwärmungsvorgang. Welche Temperatur hat das Getränk, wenn es die Umgebungstemperatur hat? Zu welcher Zeit steigt die Temperatur an schnelleren an? Wie groß ist dieser Anstieg? Bestimmen Sie für die ersten 15 Minuten die durchschnittliche Temperaturänderung.



Für das Openair-Konzert soll rechtlich höchstens ein Zählstoßwert einer Bühne...

80 | Analysis

**Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse**


- Untersuchen Sie das Schaubild der Funktion  $f$  auf Hoch- und Tiefpunkte.
  - $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^3 + 6x + 3$
  - $f(x) = (x - 3)e^x$
  - $f(x) = \sin(\pi x - 2)$ ;  $x \in ]-0,5; 2,5[$
  - $f(x) = e^{x^2} - e^x$
- Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.
  - $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$
  - $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 + 3$

1. Berechnen Sie die Änderungsrate von  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x^3 - x + 1$  auf dem Intervall  $I = ]1; 5[$ .  
 (1; 1,5], [-4; -2,5], (2; 1) mit  $t \neq 2$ , (3; 3 + h) mit  $h > 0$ .

2. Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ .
 

- Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von  $f$  auf dem Intervall  $I = [2; 5]$ .
- Bestimmen Sie die Gleichung der Sekante  $q$  durch  $P(2 | f(2))$  und  $Q(5 | f(5))$ . Zeichnen Sie die Schaubilder von  $f$  und  $q$  in ein Koordinatensystem.
- Berechnen Sie die momentane Änderungsrate von  $f$  an der Stelle  $x = 2$ . Interpretieren Sie geometrisch.

3. Chemische Reaktionen können langsam oder schnell ablaufen. Bringt man z. B. Zink in Salzsäure, entsteht Wasserstoff.



**Beachten Sie**

Bedeutet  $s(t)$  den in der Zeit  $t$  zurückgelegten Weg (Weg als Funktion der Zeit), so gilt:

für die **mittlere Geschwindigkeit**  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

für die **Momentangeschwindigkeit**  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = s'(t)$

für die **mittlere Beschleunigung**  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

für die **Momentanbeschleunigung**  $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'(t)$

Die **Momentangeschwindigkeit** ist die Durchschnittsgeschwindigkeit in einem möglichst kleinen Zeitintervall.  
 Die **mittlere Beschleunigung** ist die Geschwindigkeitsänderung  $\Delta v$  in der Zeit  $\Delta t$ .

# Inhaltsverzeichnis

## Vorwort

5

## I Analysis

9

1	Differenzialrechnung .....	9
1.1	Ableitung von Funktionen .....	9
1.1.1	Änderungsrate .....	10
1.1.2	Definition der Ableitung .....	15
1.1.3	Ableitungsregeln .....	17
1.1.4	Ableitung und Steigung .....	29
1.1.5	Tangente und Normale .....	31
1.1.6	Schneiden und Berühren .....	37
1.1.7	Grafisches Differenzieren .....	40
1.2	Kurvenuntersuchung .....	44
1.2.1	Monotonie .....	45
1.2.2	Extrempunkte .....	49
1.2.3	Wendepunkte .....	57
1.2.4	Aufgabenbeispiele zur Kurvenuntersuchung .....	66
1.2.5	Aufstellen von Kurvengleichungen aus gegebenen Bedingungen .....	72
1.3	Modellierung realer Probleme .....	81
1.3.1	Modellierung von Optimierungsproblemen .....	82
1.3.2	Modellierung von Wachstums- und Zerfallsprozessen .....	88
1.3.3	Modellierung in der Physik .....	92
1.3.4	Modellierung in der Kostentheorie .....	96
2	Integralrechnung .....	102
2.1	Einführung .....	103
2.2	Stammfunktion und unbestimmtes Integral .....	105
2.3	Das bestimmte Integral .....	117
2.4	Flächeninhaltsberechnung mithilfe der Integralrechnung .....	126
2.4.1	Fläche zwischen Kurve und x-Achse .....	126
2.4.2	Fläche zwischen zwei Kurven .....	133
2.4.3	Besondere Aufgabenstellungen bei der Flächeninhaltsberechnung .....	142
2.5	Anwendungen der Integralrechnung .....	149
2.5.1	Flächen in anwendungsorientierten Aufgaben .....	150
2.5.2	Mittelwert .....	152
2.5.3	Rotationskörper .....	155
2.5.4	Weitere Anwendungen des Integrals in Natur, Technik und Wirtschaft .....	159

**II Stochastik****169**

1	Binomialverteilung .....	170
1.1	Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Ketten .....	170
1.2	Die Bernoulli-Formel .....	172
1.3	Erwartungswert und Varianz einer Binomialverteilung .....	185
1.4	Die Sigma-Regeln .....	193
2	Schätzen unbekannter Wahrscheinlichkeiten .....	199

**Anhang****210**

	Musterabitur .....	210
	Lösungen der Modellierungen und Tests .....	218
	Mathematics als weiteres elektronisches Hilfsmittel .....	231
	Mathematische Zeichen .....	236
	Stichwortverzeichnis .....	237
	Abbildungsverzeichnis .....	239