Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner
Lehrauftrag Mathematik an der KSW Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch
Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Umschlag: © Adrian Schulz Foto: Mall of Berlin
Bild Kreis links: © Christian Schwier – fotolia.com
Bild Kreis rechts: © Kirill Kedrinski – fotolia.com

* * * * * * * * * *

6. Auflage 2016

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-**0234-9**

Vorwort

Vorbemerkungen

Der vorliegende Band ist ein Arbeitsbuch für den Mathematikunterricht in allen Berufskollegs und in Bildungsgängen, die zur Fachhochschulreife führen. Das Buch behandelt den Lehrstoff des ersten Schuljahres (BK I) im zweijährigen Berufskolleg, nämlich die Polynomfunktionen sowie die Exponentialfunktionen und deren Linearkombinationen mit Linearen Funktionen. Grundlage der Inhalte ist der Lehrplan für Bildungsgänge, die zum Erwerb der Fachhochschulreife führen, vom August 2015. Grundlage der Inhalte ist der *Lehrplan für Bildungsgänge, die zum Erwerb der Fachhochschulreife führen*, vom August 2015.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam die im Lehrplan geforderten Inhalte. Die Autoren orientieren sich an den in den Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife formulierten mathematischen Kompetenzen (Mathematisch modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).
Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die in den Bildungsstandards aufgeführten Kompetenzen wie auch die Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

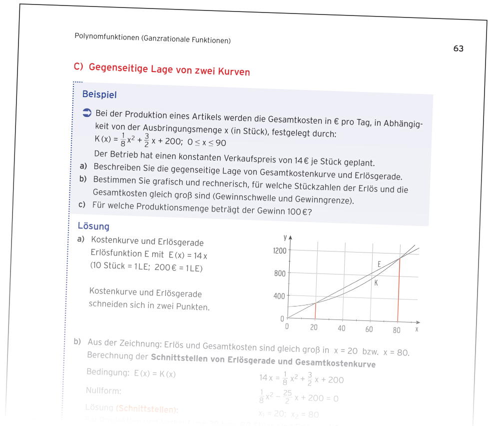
Begleitend wird jeweils ein Arbeitsheft (ISBN 978-3-8120-2234-7) angeboten. Es soll Schüler und Lehrer durch Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung unterstützen.

Alle Titel, mit Ausnahme der Arbeitshefte, können Sie auch für das Digitale Schulbuchregal erhalten.

Eine sinnvolle Ergänzung ist das Buch „Mathematik im Berufskolleg – Prüfungsaufgaben für die Fachhochschulreife“ (ISBN 978-3-8120-0459-6) mit Aufgaben für die Prüfung zur Fachhochschulreife in neuer Form. Das Buch wird jährlich aktualisiert.

Der Aufbau dieses Buches

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.



Polynomfunktionen (Ganzrationale Funktionen) 63

C) Gegenseitige Lage von zwei Kurven

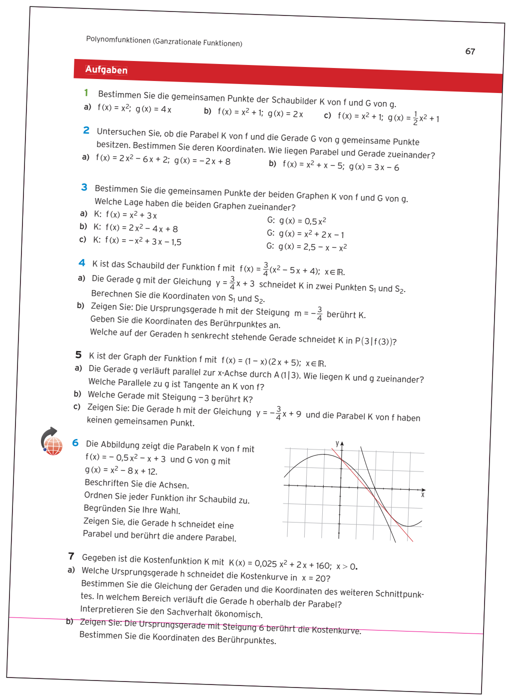
Beispiel

Bei der Produktion eines Artikels werden die Gesamtkosten in € pro Tag, in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge x (in Stück), festgelegt durch:
$K(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x + 200;\ 0 \le x \le 90$
Der Betrieb hat einen konstanten Verkaufspreis von 14 € je Stück geplant.
a) Beschreiben Sie die gegenseitige Lage von Gesamtkostenkurve und Erlösgerade.
b) Bestimmen Sie grafisch und rechnerisch, für welche Stückzahlen der Erlös und die Gesamtkosten gleich groß sind (Gewinnschwelle und Gewinngrenze).
c) Für welche Produktionsmenge beträgt der Gewinn 100 €?

Lösung
a) Kostenkurve und Erlösgerade
Erlösfunktion E mit $E(x) = 14x$
(10 Stück = 1 LE; 200 € = 1 LE)
Kostenkurve und Erlösgerade schneiden sich in zwei Punkten.

b) Aus der Zeichnung: Erlös und Gesamtkosten sind gleich groß in $x = 20$ bzw. $x = 80$.
Berechnung der **Schnittstellen von Erlösgerade und Gesamtkostenkurve**
Bedingung: $E(x) = K(x)$ $\quad 14x = \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x + 200$
Nullform: $\quad \frac{1}{8}x^2 - \frac{25}{2}x + 200 = 0$
Lösung (Schnittstellen) $\quad x_1 = 20;\ x_2 = 80$

Jede Lerneinheit endet mit einer umfassenden Anzahl von Aufgaben. Diese sind zur Ergebnissicherungund Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Kompetenzorientierte Fragestellung mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Probleme aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her.
Eine **Differenzierung der Aufgaben nach Schwierigkeit** ist durch Farben gegeben.



Polynomfunktionen (Ganzrationale Funktionen) 67

Aufgaben

1 Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der Schaubilder K von f und G von g.
a) $f(x) = x^2;\ g(x) = 4x$ b) $f(x) = x^2 + 1;\ g(x) = 2x$ c) $f(x) = x^2 + 1;\ g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$

2 Untersuchen Sie, ob die Parabel K von f und die Gerade G von g gemeinsame Punkte besitzen. Bestimmen Sie deren Koordinaten. Wie liegen Parabel und Gerade zueinander?
a) $f(x) = 2x^2 - 6x + 2;\ g(x) = -2x + 8$ b) $f(x) = x^2 + x - 5;\ g(x) = 3x - 6$

3 Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der beiden Graphen K von f und G von g. Welche Lage haben die beiden Graphen zueinander?
a) K: $f(x) = x^2 + 3x$ G: $g(x) = 0{,}5x^2$
b) K: $f(x) = 2x^2 - 4x + 8$ G: $g(x) = x^2 + 2x - 1$
c) K: $f(x) = -x^2 + 3x - 1{,}5$ G: $g(x) = 2{,}5 - x - x^2$

4 K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{4}(x^2 - 5x + 4);\ x \in \mathbb{R}$.
a) Die Gerade g mit der Gleichung $y = \frac{3}{4}x + 3$ schneidet K in zwei Punkten S_1 und S_2. Berechnen Sie die Koordinaten von S_1 und S_2.
b) Zeigen Sie: Die Ursprungsgerade h mit der Steigung $m = -\frac{3}{4}$ berührt K. Geben Sie die Koordinaten des Berührpunktes an. Welche auf der Geraden h senkrecht stehende Gerade schneidet K in $P(3 \mid f(3))$?

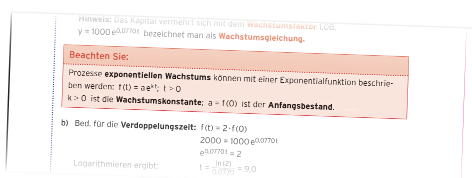
5 K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = (1 - x)(2x + 5);\ x \in \mathbb{R}$.
a) Die Gerade g verläuft parallel zur x-Achse durch $A(1 \mid 3)$. Wie liegen K und g zueinander? Welche Parallele zu g ist Tangente an K von f?
b) Welche Gerade mit Steigung −3 berührt K?
c) Zeigen Sie: Die Gerade h mit der Gleichung $y = -\frac{3}{4}x + 9$ und die Parabel K von f haben keinen gemeinsamen Punkt.

6 Die Abbildung zeigt die Parabeln K von f mit $f(x) = -0{,}5x^2 - x + 3$ und G von g mit $g(x) = x^2 - 8x + 12$.
Beschriften Sie die Achsen.
Ordnen Sie jeder Funktion ihr Schaubild zu.
Begründen Sie Ihre Wahl.
Zeigen Sie, die Gerade h schneidet eine Parabel und berührt die andere Parabel.

7 Gegeben ist die Kostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}025x^2 + 2x + 160;\ x > 0$.
a) Welche Ursprungsgerade h schneidet die Kostenkurve in $x = 20$?
Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden und die Koordinaten des weiteren Schnittpunktes. In welchem Bereich verläuft die Gerade h oberhalb der Parabel?
Interpretieren Sie den Sachverhalt ökonomisch.
b) Zeigen Sie: Die Ursprungsgerade mit Steigung 6 berührt die Kostenkurve.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Berührpunktes.

Für Aufgaben mit dem **Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese in der Mediathek zum Buch auf unserer Website: http://www.merkur-verlag.de

Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.



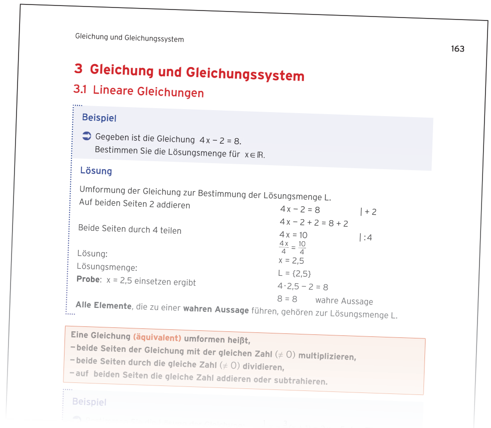
Hinweis: Das Kapital vermehrt sich mit dem **Wachstumsfaktor** 1,08.
$y = 1000e^{0{,}0770t}$ bezeichnet man als **Wachstumsgleichung**.

Beachten Sie:
Prozesse **exponentiellen Wachstums** können mit einer Exponentialfunktion beschrieben werden: $f(t) = ae^{kt};\ t \ge 0$
$k > 0$ ist die **Wachstumskonstante**; $a = f(0)$ ist der **Anfangsbestand**.

b) Bed. für die **Verdoppelungszeit**: $f(t) = 2 \cdot f(0)$
$2000 = 1000e^{0{,}0770t}$
$e^{0{,}0770t} = 2$
Logarithmieren ergibt: $t = \frac{\ln(2)}{0{,}0770} = 9{,}0$

Anhang: Grundwissen

Die Schüler im Berufskolleg kommen aus verschiedenen Schularten mit unterschiedlichen Vorkenntnissen. Um die Schüler dennoch möglichst schnell auf ein gleiches Wissensniveau zu bringen und damit gleiche Ausgangsbedingungen für den Mathematikunterricht zu schaffen, gibt es ein umfangreiches **Kapitel zur Wiederholung** der grundlegenden Rechentechniken und aller mathematischen Grundlagen aus der Mittelstufe.


Gleichung und Gleichungssystem 163

3 Gleichung und Gleichungssystem

3.1 Lineare Gleichungen

Beispiel

Gegeben ist die Gleichung $4x - 2 = 8$.
Bestimmen Sie die Lösungsmenge für $x \in \mathbb{R}$.

Lösung

Umformung der Gleichung zur Bestimmung der Lösungsmenge L.

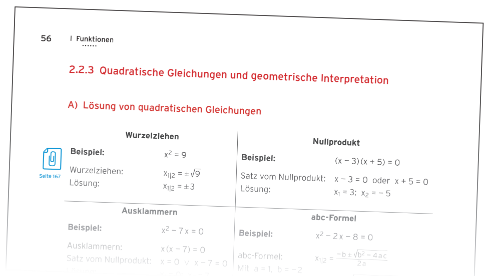
Auf beiden Seiten 2 addieren	$4x - 2 = 8$	$\mid +2$
	$4x - 2 + 2 = 8 + 2$	
Beide Seiten durch 4 teilen	$4x = 10$	$\mid :4$
	$\frac{4x}{4} = \frac{10}{4}$	
Lösung:	$x = 2{,}5$	
Lösungsmenge:	$L = \{2{,}5\}$	
Probe: $x = 2{,}5$ einsetzen ergibt	$4 \cdot 2{,}5 - 2 = 8$	
	$8 = 8$ wahre Aussage	

Alle Elemente, die zu einer **wahren Aussage** führen, gehören zur Lösungsmenge L.

Eine Gleichung (äquivalent) umformen heißt,
– beide Seiten der Gleichung mit der gleichen Zahl ($\neq 0$) multiplizieren,
– beide Seiten durch die gleiche Zahl ($\neq 0$) dividieren,
– auf beiden Seiten die gleiche Zahl addieren oder subtrahieren.

Beispiel

Die Heftklammer im Lehrbuch mit Seitenangabe weist auf ein entsprechendes Grundwissenkapitel im Anhang hin.


56 I Funktionen

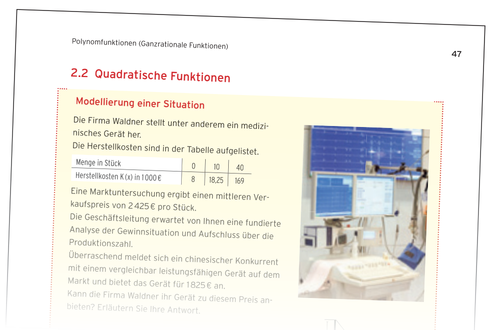
2.2.3 Quadratische Gleichungen und geometrische Interpretation

A) Lösung von quadratischen Gleichungen

Wurzelziehen		Nullprodukt	
Beispiel:	$x^2 = 9$	**Beispiel:**	$(x-3)(x+5) = 0$
Wurzelziehen:	$x_{1/2} = \pm\sqrt{9}$	Satz vom Nullprodukt:	$x - 3 = 0$ oder $x + 5 = 0$
Lösung:	$x_{1/2} = \pm 3$	Lösung:	$x_1 = 3;\ x_2 = -5$
Ausklammern		**abc-Formel**	
Beispiel:	$x^2 - 7x = 0$	**Beispiel:**	$x^2 - 2x - 8 = 0$
Ausklammern:	$x(x-7) = 0$	abc-Formel:	$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Satz vom Nullprodukt:	$x = 0 \lor x - 7 = 0$	Mit $a = 1,\ b = -2$	

Seite 167

Die Aufgaben **„Modellierung einer Situation“** und **„Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse“** werden im Anhang ausführlich gelöst.


Polynomfunktionen (Ganzrationale Funktionen) 47

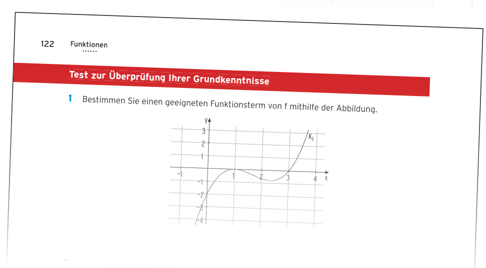
2.2 Quadratische Funktionen

Modellierung einer Situation

Die Firma Waldner stellt unter anderem ein medizinisches Gerät her.
Die Herstellkosten sind in der Tabelle aufgelistet.

Menge in Stück	0	10	40
Herstellkosten K(x) in 1000 €	8	18,25	169

Eine Marktuntersuchung ergibt einen mittleren Verkaufspreis von 2425 € pro Stück.
Die Geschäftsleitung erwartet von Ihnen eine fundierte Analyse der Gewinnsituation und Aufschluss über die Produktionszahl.
Überraschend meldet sich ein chinesischer Konkurrent mit einem vergleichbar leistungsfähigen Gerät auf dem Markt und bietet das Gerät für 1825 € an.
Kann die Firma Waldner ihr Gerät zu diesem Preis anbieten? Erläutern Sie Ihre Antwort.


122 Funktionen

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

1 Bestimmen Sie einen geeigneten Funktionsterm von f mithilfe der Abbildung.

Inhaltsverzeichnis

Anhang 156