

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner

Lehrauftrag Mathematik am BSW Wangen

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch

Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die in diesem Buch zitierten Internetseiten wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.

Stand: Juni 2016

Umschlag: © frhuynh - Fotolia.com, kleines Bild oben: © Picture-Factory - Fotolia.com,
kleines Bild unten: Africa Studio - Fotolia.com

* * * * *

7. Auflage 2016

© 1995 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-0206-6

Vorwort

Vorbemerkungen

Der vorliegende Band „Mathematisches Grundgerüst – Ein Mathematikbuch für die Eingangsklasse“ ist ein Arbeitsbuch für alle beruflichen Gymnasien in Baden-Württemberg. Das Lehrbuch richtet sich exakt nach dem neuen Bildungsplan für die gymnasiale Oberstufe, Mathematik, in Baden-Württemberg vom Juni 2014.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam sowohl die im Lehrplan geforderten inhalts- als auch die prozessbezogenen Kompetenzen (modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).

Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die im Bildungsplan aufgeführten Kompetenzen und Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

Der Aufbau dieses Buches

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.

The screenshot displays a coordinate system with the x and y axes. The x-axis is labeled 'x' and the y-axis is labeled 'y'. The origin is marked with 'O'. The axes are divided into four quadrants by the x-axis and y-axis.

Text above the coordinate system:

- IV. Quadrant: $P(x|y)$ mit $x < 0$ und $y > 0$
- III. Quadrant: $P(x|y)$ mit $x < 0$ und $y < 0$
- II. Quadrant: $P(x|y)$ mit $x > 0$ und $y < 0$
- I. Quadrant: $P(x|y)$ mit $x > 0$ und $y > 0$

Text below the coordinate system:

Der Punkt $A(2,5)$ hat die **x-Koordinate** $x = 2,5$ und die **y-Koordinate** $y = 1$. Das Koordinatensystem (Achsenkreuz) unterteilt die Ebene in 4 Felder (**Quadranten**).

Bemerkung: Ein Punkt $P(x|y)$ liegt **oberhalb** der **x-Achse**, wenn $y > 0$. Ein Punkt $P(x|y)$ liegt **unterhalb** der **x-Achse**, wenn $y < 0$.

Beispiel

☞ Kennzeichnen Sie im Koordinatensystem alle Punkte, deren Koordinaten die folgende Bedingung erfüllen.

a) $x = 2$ b) $y > 0$ und $y = x + 1$

Lösung

a)

b)

Jede Lerneinheit schließt mit einer ausreichenden Anzahl von **Aufgaben** ab. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Kompetenzorientierte Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Aufgaben aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her.

Die **Heftklammer** im Lehrbuch mit Seitenangabe weist auf einen entsprechenden Abschnitt im Kapitel Grundwissen hin.

Aufgaben, zu deren Lösung der Einsatz von zusätzlichen **elektronischen Hilfsmitteln sinnvoll oder notwendig ist**, sind gesondert gekennzeichnet.

Die Aufgaben „**Modellierung einer Situation**“ und „**Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse**“ werden im Anhang ausführlich gelöst.

Für **Aufgaben mit dem Download-Logo** stehen **ausführliche Lösungen zum Download** bereit. Sie finden diese in der Mediathek zum Buch auf unserer Website <http://www.merkur-verlag.de>.

Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.

12 | Funktionen

Aufgaben

- Gegeben sind die Punkte $A_1(-1|3)$, $A_2(0|1,25)$, $A_3(2,5|-4,8)$, $A_4(-4,5|0)$ und $A_5(-7|-10)$. Wo liegen diese Punkte im Koordinatensystem?
- Zeichnen Sie folgende Punkte in ein geeignetes Koordinatensystem. Es gibt einen Zusammenhang von x - und y -Koordinate. Stellen Sie hierfür einen Term auf und geben Sie drei weitere Punkte an.
 - $A(4|1)$; $B(10|4)$; $C(2|0)$; $D(8|3)$; $E(11|-0,5)$
 - $A(40|220)$; $B(100|250)$; $C(200|300)$; $D(80|240)$
- Ergänzen Sie die Koordinaten der Punkte $A(-3)$, $B(-1|...)$ und $C(-4,25|...)$ so, dass diese Punkte im 1. Quadranten liegen.
 - Welche Eigenschaften haben alle Punkte im 1. Quadranten?
 - Welche Eigenschaften haben alle Punkte auf der positiven x -Achse?
- Für welche Werte von $l \in \mathbb{R}$ liegt der Punkt $P_l(l+5|2l-6)$ unterhalb der x -Achse?
 - Für welche Werte von $l \in \mathbb{R}$ liegt der Punkt $Q_l(8-13l|-24)$ im 1. Quadranten?

Bestimmen Sie die Lösungsmenge ($x \in \mathbb{R}$).

- $20x - 3(5x + 7) = -2(3 - x)$
- $5x - (8 + 9x) = 12$
- $4x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}x - 1$
- $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = x + 4$
- $(x-3)(4-x) = 2 - (x+5)(x-1)$
- $-\frac{1}{2}(2x-1) = 1 - \frac{6}{5}x$

- g verläuft durch $A(1|-2)$ und $B(-2|3)$.
- Gegeben ist die Gerade h mit der Gleichung $y = 3x - 4$. Der Punkt $P(-1|y_P)$ liegt auf h . Die Gerade q geht durch die Punkte P und $N(2|0)$.

- Liegen die Punkte $A(1,20|16,03)$, $B(-2,40|-45,7)$ und $C(4,40|70,9)$ auf einer Geraden? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Bestimmen Sie die Gleichungen von zwei Geraden, die durch den Punkt $A(3|-1)$ verlaufen.

1 Funktionen

1 Einführung in Funktionen

Modellierung einer Situation

Im Versuchslabor der Firma Waldner GmbH werden verschiedene Gefäße benutzt. Der Laborleiter zeigt dem Praktikanten Füllkurven für 3 Wasserbehälter (hier im Längsschnitt) dargestellt. Die Zeichnungen sind nicht maßstabsgetreu.

50 | Funktionen

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

- Lösen Sie die folgende Gleichung.
 - $3x - 4 = 2(x - 3)$
 - $3x^2 - 1 = \frac{6}{x}$
 - $2 + \frac{3}{2}x = 2 - \frac{6}{x}$
- Bestimmen Sie die Gleichung von g .
 - Eine Gerade g verläuft durch die Punkte $A(1|-4,5)$ und $B(-2|1,2)$.
 - Eine Gerade g verläuft parallel zur 1. Winkelhalbierenden und durch $C(-1|5)$.
 - Eine Gerade g verläuft senkrecht zu $h: y = 2x$ und durch $D(4|-1)$.
 - Die Gerade h mit $y = -3x$ wird um 2 nach oben und um 3 nach links verschoben. Nennen Sie die Gleichung.

Aufgaben

- Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{3}x - 3$, $x \in \mathbb{R}$.
- Entscheiden Sie begründet: Liegen die Punkte $P(\frac{2}{3}|0)$, $Q(1|-\frac{13}{6})$ und $R(-2|-\frac{20}{3})$ auf dem Schaubild von f , unterhalb oder oberhalb?
 - Berechnen Sie die Stelle x_0 , so dass $f(x_0) = -\frac{10}{3}$ ist. Interpretieren Sie geometrisch.
 - Das Schaubild von f wird verschoben, sodass die verschobene Gerade durch $A(-2|1)$ verläuft. Bestimmen Sie die Geradengleichung.
 - Für welchen Wert von $a \in \mathbb{R}$ liegt der Punkt $P(2|a)$ auf dem Schaubild von f ?

Bremsweg $f(x)$ zugeordnet.

Schreibweise dieser Funktion f : f mit $f(x) = 0,01x^2$; $D = \mathbb{R}_+$

Der Term $0,01x^2$ ist der **Funktionsterm**.

Definition einer Funktion

Eine (reelle) Funktion f ist eine **eindeutige Zuordnung**, die **jeder reellen Zahl** aus einer Definitionsmenge D **genau eine reelle Zahl** zuordnet.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
I Funktionen	9
1 Einführung in Funktionen	9
1.1 Das rechtwinklige Koordinatensystem	10
1.2 Abhängigkeiten und grafische Darstellung	13
1.3 Definition einer Funktion	16
2 Polynomfunktionen (Ganzrationale Funktionen)	21
2.1 Lineare Funktionen	21
2.1.1 Einführung	22
2.1.2 Die Steigung einer Geraden	24
2.1.3 Punktprobe	27
2.1.4 Aufstellen von Geradengleichungen	28
2.1.5 Schnittpunkte	33
2.1.6 Die Strecke AB	40
2.1.7 Winkel bei Geraden	41
2.1.8 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	46
2.2 Quadratische Funktionen	51
2.2.1 Einführungsbeispiel	52
2.2.2 Von der Normalparabel zur allgemeinen Parabel	53
2.2.3 Quadratische Gleichungen und geometrische Interpretation	60
2.2.4 Aufstellen von Parabelgleichungen	74
2.2.5 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	83
2.3 Polynomfunktionen höheren Grades	88
2.3.1 Potenzfunktionen	89
2.3.2 Polynomfunktionen 3. Grades – Einführung	91
2.3.3 Polynomfunktionen 4. Grades – Einführung	95
2.3.4 Polynomgleichungen und geometrische Interpretation	100
2.3.5 Aufstellen von Funktionstermen	116
2.3.6 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	125
3 Exponentialfunktionen	131
3.1 Einführungsbeispiele	132
3.2 Definition einer Exponentialfunktion	134
3.3 Die Euler'sche Zahl e	136
3.4 Exponentialfunktionen zur Basis e	137
3.5 Schaubilder von Exponentialfunktionen	139
3.6 Exponentialgleichungen und geometrische Interpretation	144
3.6.1 Der natürliche Logarithmus	144
3.6.2 Exponentialgleichungen	145
3.6.3 Bestimmung von Schnittpunkten	150
3.7 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	156
3.7.1 Exponentielles Wachstum	156
3.7.2 Beschränktes Wachstum	161
4 Trigonometrische Funktionen	164
4.1 Einführungsbeispiele	165
4.2 Definition der Winkelfunktionen	166
4.2.1 Definition der Winkelfunktionen für Winkel von 0° bis 90°	166
4.2.2 Definition der Winkelfunktionen für beliebige Winkel	170
4.2.3 Das Bogenmaß eines Winkels	174
4.3 Trigonometrische Funktionen	175
4.3.1 Sinus- und Kosinusfunktion	175
4.3.2 Funktionen der Form $f(x) = a \sin(x) + d$ bzw. $f(x) = a \cos(x) + d$	176
4.3.3 Funktionen der Form $f(x) = a \sin(bx) + d$ bzw. $f(x) = a \cos(bx) + d$	180
4.3.4 Funktionen der Form $f(x) = a \sin[b(x - c)] + d$ bzw. $f(x) = a \cos[b(x - c)] + d$	184

8 Inhaltsverzeichnis

4.4	Trigonometrische Gleichungen und geometrische Interpretation	187
4.4.1	Lösung von trigonometrischen Gleichungen	187
4.4.2	Berechnung von Schnittstellen	194
4.5	Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	201
5	Umkehrfunktionen	206
5.1	Bestimmung einer Umkehrfunktion	206
5.2	Logarithmusfunktion	209
5.3	Wurzelfunktion	211
5.4	Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$; $x \neq 0$	214
6	Näherungsverfahren	215
6.1	Intervallhalbierungsverfahren	215
6.2	Regression	217

II Stochastik 1 220

1	Zufallsexperimente	221
1.1	Einstufiges Zufallsexperiment	222
1.2	Mehrstufiges Zufallsexperiment	224
2	Ereignisse	227
3	Wahrscheinlichkeit	232
3.1	Absolute und relative Häufigkeiten	232
3.2	Definition der Wahrscheinlichkeit	234
3.3	Wahrscheinlichkeit bei Gleichverteilung (Laplace-Experiment)	238
3.4	Wahrscheinlichkeit bei mehrstufigen Zufallsexperimenten	241
3.5	Additionssatz	248
3.6	Bedingte Wahrscheinlichkeit	251
3.7	Unabhängigkeit von Ereignissen	257
4	Kombinatorik	261
4.1	Produktregel	261
4.2	Stichproben	262
4.2.1	Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen	263
4.2.2	Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen	264
4.2.3	Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen	266
5	Zufallsvariable	270
5.1	Einführung	270
5.2	Wahrscheinlichkeitsverteilung	273
5.3	Erwartungswert einer Zufallsvariablen	276
5.4	Varianz und Standardabweichung einer Zufallsvariablen	281

III Grundwissen 287

1	Intervalle als Teilmengen der reellen Zahlen	287
2	Algebraische Begriffe und Vorübungen	288
2.1	Begriffe	288
2.2	Rechnen mit Summen und Differenzen	288
2.3	Rechnen mit Brüchen	290
2.4	Vereinfachung durch Ausklammern	291
2.5	Rechnen mit Potenzen	292
3	Gleichung und Gleichungssystem	294
3.1	Lineare Gleichungen	294
3.2	Lineare Gleichungssysteme	296
3.3	Quadratische Gleichungen	298

Anhang 302

Lösungen	302
Lösungen der Modellierungen und Tests	302
Lösungen der Aufgaben im Kapitel Grundwissen	311
FREEGEO als weiteres elektronisches Hilfsmittel	314
Mathematische Zeichen	317
Stichwortverzeichnis	318
Abbildungsverzeichnis	320