Bohner
Ott
Deusch

Mathematik für berufliche Gymnasien

Lineare Algebra

Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

Ausführliche Lösungen

zu im Buch gekennzeichneten Aufgaben

ab 1. Auflage 2016
ISBN 978-3-8120-0639-2

Merkur
Verlag Rinteln

Lehrbuch Seite 14

1 a)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & -7 \\ 3 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \end{array} \quad + \;\; \cdot(-2) \quad + \;\; \cdot(-3) \;\; \cdot 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & 5 & 23 \end{array}\right) \quad + \;\; \cdot 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 20 & 80 \end{array}\right) \quad \textbf{Dreiecksform}$$

Letzte Gleichung: $20x_3 = 80$

$x_3 = 4$

Einsetzen von $x_3 = 4$ in die

zweite Gleichung $3x_2 + 5x_3 = 11$: $3x_2 + 5 \cdot 4 = 11$

$x_2 = -3$

Einsetzen von $x_3 = 4$ und $x_2 = -3$ in

die erste Gleichung $2x_1 + x_2 - x_3 = -3$: $2x_1 - 3 - 4 = -3$

$x_1 = 2$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array} \quad \cdot(-3) \;\; + \quad \cdot 2 \;\; +$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & 4 & 6 & 11 \end{array}\right) \quad +$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

Letzte Gleichung: $-2x_3 = -5 \Rightarrow x_3 = 2{,}5$

Einsetzen von $x_3 = 2{,}5$ ergibt: $-4x_2 - 8 \cdot 2{,}5 = -16 \Rightarrow x_2 = -1$

Einsetzen von $x_3 = 2{,}5$ und $x_2 = -1$: $x_1 - 1 + 2 \cdot 2{,}5 = 5 \Rightarrow x_1 = 1$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 15

7 Es können x_1 ME an W_1, x_2 ME an W_2 und x_3 ME an W_3 hergestellt werden.

	W_1	W_2	W_3
T_1	3	1	2
T_2	0	4	1
T_3	1	0	3

Gleichungen

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 448 \\ 4x_2 + x_3 &= 442 \\ x_1 + 3x_3 &= 330 \end{aligned}$$

LGS in Matrixschreibweise

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 448 \\ 0 & 4 & 1 & 442 \\ 1 & 0 & 3 & 330 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 448 \\ 0 & 4 & 1 & 442 \\ 0 & 1 & -7 & -542 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 448 \\ 0 & 4 & 1 & 442 \\ 0 & 0 & 29 & 2610 \end{array}\right)$$

Ergebnis: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 60 \\ 88 \\ 90 \end{pmatrix}$

Es können 60 ME an W_1, 88 ME an W_2 und 90 ME an W_3 hergestellt werden.

Lehrbuch Seite 21

2 c)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -0{,}5 \end{array}\right) \end{array} \quad :2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -0{,}5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} :(-3) \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -0{,}5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} + \\ \cdot\, 2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar.

Aus der 2. Zeile: $-4x_2 - 8x_3 = 1$

Wir wählen z. B. $x_3 = r$, $r \in \mathbb{R}$ (x_3 ist frei wählbar).

Durch Einsetzen berechnet man x_2 in

Abhängigkeit von r: $-4x_2 - 8r = 1$

$x_2 = -0{,}25 - 2r$

Einsetzen in $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ ergibt: $x_1 + 2 \cdot (-0{,}25 - 2r) + 3r = 0$

$x_1 = 0{,}5 + r$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 + r \\ -0{,}25 - 2r \\ r \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$

Lösungsmenge: $L = \{ \vec{x} \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 + r \\ -0{,}25 - 2r \\ r \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}\}$

Lehrbuch Seite 21

2 d)

$$
\begin{array}{ccc}
x_1 & x_2 & x_3
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
2 & 5 & -1 & 25 \\
1 & 0 & 7 & 10 \\
1 & 2 & 1 & 12
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
+ \cdot (-2) \\
+ \cdot (-2)
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
2 & 5 & -1 & 25 \\
0 & 5 & -15 & 5 \\
0 & 1 & -3 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\\
+ \cdot (-5)
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
2 & 5 & -1 & 25 \\
0 & 5 & -15 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar.

Aus der 2. Zeile: $5x_2 - 15x_3 = 5$

Wir wählen z. B. $x_3 = r$, $r \in \mathbb{R}$ (x_3 ist frei wählbar).

x_2 in Abhängigkeit von r: $5x_2 - 15r = 5$

$x_2 = 1 + 3r$

Einsetzen in $2x_1 + 5x_2 - x_3 = 25$ ergibt: $2x_1 + 5 \cdot (1 + 3r) - r = 25$

$x_1 = 10 - 7r$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 - 7r \\ 1 + 3r \\ r \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

Lösungsmenge: $L = \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 - 7r \\ 1 + 3r \\ r \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R} \right\}$

Lehrbuch Seite 22

9 $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -9 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Das LGS ist mehrdeutig lösbar.

$x_3 = r$, $r \in \mathbb{R}$ (frei wählbar): $x_2 + 3r = 2$

x_2 in Abhängigkeit von r: $x_2 = 2 - 3r$

x_1 berechnen: $2x_1 - (2 - 3r) + r = -2$

$x_1 = -2r$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2r \\ 2-3r \\ r \end{pmatrix}$

Vergleich der Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2r \\ 2-3r \\ r \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ -22 \\ 8 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen ergibt: $\begin{pmatrix} -2r \\ 2-3r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -22 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l} r = 7{,}5 \\ r = 8 \\ r = 8 \end{array}$

Es gibt kein r, so dass alle drei Gleichungen erfüllt sind.

Der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ -22 \\ 8 \end{pmatrix}$ ist kein Lösungsvektor.

Gleichung: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$x_1 = -2r$; $x_2 = 2 - 3r$; $x_3 = r$: $-2r + 2 - 3r + r = 1$

$r = 0{,}25$

Lehrbuch Seite 25

2 Es werden x_1, x_2, x_3 g der Präparate P1, P2, P3 genommen.

Tagesbedarf an Vitamin A beträgt 2 mg: $0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}1x_3 = 2$

Tagesbedarf an Vitamin B beträgt 100 mg: $10x_1 + 10x_2 + 20x_3 = 100$

Die Kosten betragen 1,2 €: $0{,}1x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}25\,x_3 = 1{,}2$

LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 2 \\ 10 & 10 & 20 & 100 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}25 & 1{,}2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & 2 & 10 \\ 1 & 1{,}5 & 2{,}5 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Das LGS ist eindeutig lösbar.

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Mischung enthält 5 g von P1, 3 g von P2 und 1 g von P3.

Lehrbuch Seite 34

1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

b) $2A - B = 2\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -8 & 4 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & -2 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 5 \\ -4 & 15 & 3 \\ 3 & -3 & 10 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 0 & 6 \\ -3 & -0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -2{,}5 & 0{,}5 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1{,}5 & 0 & 5{,}5 \end{pmatrix}$

d) $3A - 4B = 3\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -12 & 6 \\ -6 & 15 & 9 \\ 0 & -3 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 0 & -20 & 12 \\ -12 & 4 & 16 \end{pmatrix}$

$3A - 4B = \begin{pmatrix} -5 & -8 & 10 \\ -6 & 35 & -3 \\ 12 & -7 & 5 \end{pmatrix}$

e) $\vec{x} - \vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

f) $2\vec{x} + 3\vec{y} = 2\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 40

1 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = (2 \;\; 3 \;\; -4)$

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 & 5 \\ 15 & -6 & -28 \\ -17 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ Berechnung im Schema

b) $B \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}$

c) $B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -2 & 10 \\ 5 & -14 & -2 \\ -6 & 18 & 21 \end{pmatrix}$ Berechnung im Schema

d) $(A + E) \cdot B = \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & -5 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$(A + E) \cdot B = \begin{pmatrix} -6 & -12 & 6 \\ 18 & -6 & -29 \\ -19 & 4 & 15 \end{pmatrix}$

e) $\frac{1}{20} \cdot A \cdot \vec{a} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 0 \\ -0{,}45 \end{pmatrix}$

f) $\vec{b} \cdot A = (2 \;\; 3 \;\; -4) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} = (1 \;\; 20 \;\; -19)$

g) $\vec{b} \cdot B \cdot A = (2 \;\; 3 \;\; -4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} = (19 \;\; -16 \;\; -21) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$\vec{b} \cdot B \cdot A = (54 \;\; 16 \;\; 59)$

h) $\vec{b} \cdot \vec{a} = (2 \;\; 3 \;\; -4) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Lehrbuch Seite 41

15 a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 210 & 120 \\ 180 & 220 \\ 320 & 300 \end{pmatrix}$

Maschinenlaufzeiten der Automaten je Arbeitsperiode:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1600 & 1500 \\ 1640 & 1640 \\ 1390 & 1380 \end{pmatrix}$

Automat I braucht für die Produktion von 210 E_1, 180 E_2 und 320 E_3

in Periode I:

$210 \cdot 2 + 180 \cdot 3 + 320 \cdot 2 = 1600$ (Minuten)

In Periode I läuft Automat I 1600 Minuten, Automat II 1640 Minuten und

Automat III 1390 Minuten.

In Periode II läuft Automat I 1500 Minuten, Automat II 1640 Minuten und

Automat III 1380 Minuten.

b) Maschinenlaufzeit in Periode I: 4630 Minuten.

Maschinenlaufzeit in Periode II: 4520 Minuten.

Auslastung in Periode I: $\frac{4630}{7200} \cdot 100\% = 64{,}3\%$

Auslastung in Periode II: $\frac{4520}{6000} \cdot 100\% = 75{,}3\%$

Lehrbuch Seite 47

1 a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Berechnung der Inversen

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot 2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right) \cdot (-7)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right) | :2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Berechnung der Inversen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot (-2) \quad \cdot 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \cdot (-4) \quad \cdot 4 \quad \cdot (-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 8 & 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 24 & 0 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \cdot 3 \quad \cdot (-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 24 & 0 & 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & 24 & 0 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) | \cdot 6$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 24 & 0 & 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & 24 & 0 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 24 & -6 & 6 & 12 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 8 & 0 & -8 \\ 7 & -3 & 2 \\ -6 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Lehrbuch Seite 51

1 a) $XB = C \quad | \cdot B^{-1}$ von rechts

$XB \cdot B^{-1} = C \cdot B^{-1}$

$X \cdot E = C \cdot B^{-1}$

$X = CB^{-1}$

b) $AX + B = C \quad | - B$

$AX = C - B \quad | \cdot A^{-1}$ von links

$X = A^{-1}(C - B)$

c) $(E - A)X = Y \quad | \cdot (E - A)^{-1}$ von links

$X = (E - A)^{-1}Y$

d) $AX - A = X \quad | + A$

$AX = X + A \quad | - X$

$AX - X = A$

$(A - E)X = A \quad | \cdot (A - E)^{-1}$ von links

$X = (A - E)^{-1}A$

e) $XA = E + A \quad | \cdot A^{-1}$ von rechts

$X = (E + A)\, A^{-1}$

$X = A^{-1} + E$

f) $AX - A = A^2 - X \quad | + X$

$AX - A + X = A^2 \quad | + A$

$AX + X = A^2 + A$

$(A + E)X = A^2 + A \quad | \cdot (A + E)^{-1}$ von links

$X = (A + E)^{-1}(A^2 + A)$

g) $(E - 3X)A = XA$

$A - 3XA = XA \quad | + 3XA$

$A = 4XA \quad | \cdot A^{-1}$ von rechts

$E = 4X \quad | \cdot \frac{1}{4}$

$X = \frac{1}{4}E$

Lehrbuch Seite 51

1 h) $A(E + X) = 4X$

$A + AX = 4X \qquad | - AX$

$A = 4X - AX$

$A = (4E - A)X \qquad | \cdot (4E - A)^{-1}$ von links

$X = (4E - A)^{-1} A$

i) $A + BX = AX - B \qquad | - AX$

$A + BX - AX = - B \qquad | - A$

$BX - AX = - B - A$

$(B - A)X = - (B + A) \qquad | \cdot (B - A)^{-1}$ von links

$X = -(B - A)^{-1} (B + A)$

oder: $AX - BX = B + A$

$(A - B)X = A + B$

$X = (A - B)^{-1} (A + B)$

Lehrbuch Seite 52

9 Matrizengleichung $M \cdot X = N + X$

$M \cdot X - X = N$

Ausklammern von X: $(M - E) \cdot X = N$

$X = (M - E)^{-1} N$

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$M - E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

$(M - E)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot (-5)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \end{array}\right) \cdot 3$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \end{array}\right) \quad | : (-1)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{array}\right)$$

$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$

Lehrbuch Seite 64

3 A: Rohstoff-Steckteile-Matrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

B: Steckteile-Endprodukt-Matrix: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

C: Rohstoff-Endprodukt-Matrix:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 & 16 \\ 7 & 9 & 13 & 22 \\ 3 & 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Lehrbuch Seite 70

2 a) Für die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C gilt: $A \cdot B = C$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 11 & 33 \\ 8 & 22 \end{pmatrix}$$

Tabelle:

	M_1	M_2
R_1	7	15
R_2	11	33
R_3	8	22

b) Aus $B \cdot \vec{x} = \vec{z}$ folgt $B \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 1700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10500 \\ 7100 \\ 7400 \end{pmatrix}$

Es müssen 10500 ME S_1, 7100 ME S_2 und 7400 ME S_3 vorrätig sein.

c) Aus $A \cdot \vec{z} = \vec{r}$ folgt: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 660 \\ 1140 \\ r_3 \end{pmatrix}$

Ausmultiplizieren ergibt ein lineares Gleichungssystem:

$s_1 + 2s_2 + 2s_1 = 660$

$4s_1 + 3s_2 + 2s_1 = 1140$

$s_1 + 5s_2 + s_1 = r_3$

Vereinfacht:

$3s_1 + 2s_2 = 660$ I)

$6s_1 + 3s_2 = 1140$ II)

$2s_1 + 5s_2 - r_3 = 0$ III)

Auflösung I) | ·2 – II) ergibt: $s_2 = 180$

Einsetzen z. B. in Gleichung I) ergibt $s_1 = 100$.

Einsetzen z. B. in Gleichung III) ergibt $r_3 = 1100$.

Das LGS ist eindeutig lösbar mit $s_1 = 100$; $s_2 = 180$; $r_3 = 1100$

Es müssen 100 ME S_1, 180 ME S_2 und 100 ME S_3 vorrätig sein.

Vom Rohstoff R_3 müssen 1100 ME bestellt werden.

Lehrbuch Seite 80

2 $A = A_{RB}$; $B = B_{BE}$; $C = C_{RE}$

a) $A \cdot B = C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

b) LGS: $B \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 42 \\ 51 \end{pmatrix}$ Auflösung ergibt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}$

c) $C \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ t \\ t \end{pmatrix}$, dabei ist t jeweils der Rohstoffvorrat von R_2 und von R_3

$(C \mid \vec{r}\,) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 100 \\ 9 & 3 & t \\ 5 & 5 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 100 \\ 0 & 15 & 900-4t \\ 0 & -5 & 500-4t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 100 \\ 0 & 15 & 900-4t \\ 0 & 0 & 2400-16t \end{array}\right)$

Das LGS ist lösbar für $2400 - 16t = 0 \Leftrightarrow t = 150$.

Von R_2 und R_3 benötigt man 150 ME.

Lösung des LGS: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$

Dann müssen 20 ME E_2 und 10 ME E_1 produziert werden.

Alternative: LGS für die Unbekannten x_1, x_2 und y:

$4x_1 + 3x_2 = 100 \wedge 9x_1 + 3x_2 - y = 0 \wedge 5x_1 + 5x_2 - y = 0$

Lösung ergibt: $x_1 = 10$; $x_2 = 20$; $y = 150$

d) Variable Kosten: $K_v = (\vec{k}_R \cdot C + \vec{k}_B \cdot B + \vec{k}_E) \cdot \vec{x}$

$$= (13{,}7 \quad 10{,}9)\begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix} = 1230$$

Durchschnittliche variable Kosten in GE/ME: $\frac{1230}{100} = 12{,}30$

Lehrbuch Seite 93

2 In einem Zeitabschnitt findet folgendes Wechselverhalten statt:
25 % der Teilchen im Energiezustand I bleiben im Energiezustand I; 25 % der Teilchen wechseln in den Energiezustand II; 50 % der Teilchen wechseln in den Energiezustand III;
100 % der Teilchen im Energiezustand II wechseln in den Energiezustand III
25 % der Teilchen im Energiezustand III bleiben im Energiezustand III; 25 % der Teilchen wechseln in den Energiezustand I; 50 % wechseln in den Energiezustand II.

Lehrbuch Seite 94

3 $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$ Startvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ oder auch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,333 \\ 0,500 \\ 0,167 \end{pmatrix}$

Stimmverteilung: $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,333 \\ 0,450 \\ 0,217 \end{pmatrix}$

Erwartete Stimmverteilung nach der nächsten Wahl :
33,3 % P1, 45 % P2 und 21,7 % P3

Lehrbuch Seite 100

3 a) Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

b) Anfangsverteilung $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 500 \\ 250 \\ 250 \end{pmatrix}$

Bedingung für die Verteilung der Vorwoche: $A\vec{x}_{-1} = \vec{x}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x}_{-1} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Verteilung der 1. Folgewoche: $A\vec{x}_0 = \vec{x}_1 \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 362{,}5 \\ 250 \\ 387{,}5 \end{pmatrix}$

In der Folgewoche hat die Waschanlage W1 voraussichtlich etwa 363 Kunden, W2 250 Kunden und W3 etwa 388 Kunden.

c) Stabile Verteilung $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$

ergibt $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}296 \\ 0{,}148 \\ 0{,}556 \end{pmatrix}$ und damit die Grenzmatrix $G = \begin{pmatrix} 0{,}296 & 0{,}296 & 0{,}296 \\ 0{,}148 & 0{,}148 & 0{,}148 \\ 0{,}556 & 0{,}556 & 0{,}556 \end{pmatrix}$

Langfristige Verteilung $G \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 250 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 296 \\ 148 \\ 556 \end{pmatrix}$

oder $G \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 296 \\ 148 \\ 556 \end{pmatrix}$

Langfristig waschen etwa 296 Autofahrer ihr Fahrzeug in der Anlage W1, 148 in W2 und 556 in W3.

Dies ist unabhängig von der Anfangsverteilung.

Lehrbuch Seite 104

4 a) Übergangsmatrix von Zustand 0 € nach Zustand 1 €, 2€, 3€

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Startvektor: } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zustand 0 € und Zustand 3€ sind absorbierend, sie werden erreicht, aber dann nicht mehr verlassen.

b) Nach 2 Übergängen (Zustandsänderungen) hat Karl mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 kein Geld mehr, mit 0,25 hat er 1 € und mit 0,25 hat er 3 €.

Hinweis:

Karl hat mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 bereits nach einem Übergang kein Geld mehr.

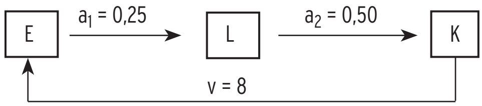
c) Möglicher Pfad zu Zustand 3 €: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

Wahrscheinlichkeit: $0{,}5^4 = 6{,}25\ \%$

Auf seinem Pfad können nur Zustand 1 € und Zustand 2 € als Zustände vorkommen.

Lehrbuch Seite 108

1 a) Übergangsdiagramm



Aus 25 % der Eier werden Larven L, aus 50 % L werden Käfer (K). Jeder K legt 8 Eier (E).

$A \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 320 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$ Population: 320 E, 10 L und 20 K

b) $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ergibt $8z = x$ $0,25x = y$ $0,5y = z$ $(y = 2z)$

Einsetzen von $8z = x$ in $0,25x = y$: $y = 2z$

Lösung: $x = 8z;\ y = 2z;\ z$

Damit sind x und y Vielfache von z.

Lösungsvektor: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Mögliche stationäre Verteilungen: 8 E; 2 L und 1 K oder 64 E; 16 L und 8 K

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0,125 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^3 = E$ A ist zyklisch mit n = 3

$a_1 \cdot a_2 \cdot v = 0,25 \cdot 0,5 \cdot 8 = 1$

Nach 3 Monaten stellt sich die gleiche Population wieder ein.

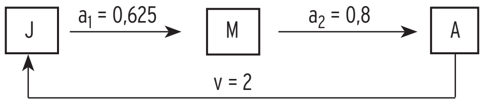
Hinweis: Jede Population reproduziert sich in 3 Monaten. Es gibt aber auch Populationen, z. B. $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, die sich sich jeden Monat reproduzieren.

Lehrbuch Seite 111

z.B. drei Altersstufen J, M, A

6 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \end{pmatrix}$ $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix}$

a) Übergangsgraph für k = 0,625



Populationsentwicklung für die ersten drei Zeitschritte

$A \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0{,}625 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 25 \\ 16 \end{pmatrix} = \vec{x}_1$ Gesamtzahl: 91

$A \cdot \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 32 \\ 31{,}25 \\ 20 \end{pmatrix} = \vec{x}_2$ Gesamtzahl: 83,25

$A \cdot \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix} = \vec{x}_3 = \vec{x}_0$ Gesamtzahl: 85

Diese Entwicklung verläuft zyklisch, da nach 3 Zeitschritten die Anfangsverteilung erreicht wird, oder $a_1 \cdot a_2 \cdot v = 1$; $0{,}625 \cdot 0{,}8 \cdot 2 = 1$

Maximale Anzahl an Säugetieren: 91

Die 3 Anzahlen wiederholen sich.

b) k = 0,7 und damit $0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 2 = 1{,}12$

Die Population wächst jetzt langfristig mit dem Faktor 1,12 innerhalb von 3 Zeitschritten

Population nach drei Zeitschritten: $1{,}12 \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44{,}8 \\ 22{,}4 \\ 28 \end{pmatrix}$

Population nach sechs Zeitschritten: $1{,}12 \cdot \begin{pmatrix} 44{,}8 \\ 22{,}4 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50{,}176 \\ 25{,}088 \\ 31{,}36 \end{pmatrix}$

c) Gesamtpopulation nach sechs Zeitschritten als Summe: 109,624

Da die Population zunimmt, müssen ab dem 7. Jahr Gegenmaßnahmen ergriffen werden.